

Pasar Malam di Kampungku

MATEMATIKA PAKET B SETARA SMP/MTs KELAS VIII



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018



Pasar Malam di Kampungku

MATEMATIKA PAKET B SETARA SMP/MTs KELAS VIII



Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2018

Matematika Paket B Setara SMP/MTs Kelas VIII
Modul Tema 9 : Pasar Malam di Kampungku

- **Penulis:** Budiharjo
- **Diterbitkan oleh:** Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-
Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan
Kebudayaan, 2018

iv+ 74 hlm + ilustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada masyarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2018
Direktur Jenderal

Harris Iskandar

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar	i
Daftar Isi	ii
A. Petunjuk Penggunaan Modul	
B. Tujuan Pembelajaran Modul	
C. Pengantar Modul	
D. Kegiatan Pembelajaran	
Unit 1. Kincir Putar di Pasar Malam	
1.1 Uraian Materi	
a. Pengertian Lingkaran	
b. Unsur-unsur Lingkaran	
c. Keliling dan Luas Lingkaran	
1.2 Kegiatan	
1.3 Penugasan/Latihan	
Unit 2. Sepeda Badut Sirkus	
2.1 Uraian Materi	
a. Hubungan Sudut Pusat dan Sudut Keliling	
b. Sifat-sifat Sudut Pusat dan Sudut Keliling	
c. Masalah yang Terkait Dengan Lingkaran	
d. Pengertian Garis Singgung Lingkaran	
e. Sifat-sifat Garis Singgung Lingkaran	
f. Panjang Garis Singgung Lingkaran	
g. Melukis Garis Singgung Lingkaran	
h. Masalah yang Terkait Dengan Garis Singgung Lingkaran	
2.2 Kegiatan	
2.3 Penugasan/Latihan	
E. Rangkuman	
F. Saran Referensi	
G. Penilaian Akhir Modul 4	
H. Rubrik Penilaian, Kunci Jawaban, dan Pembahasan	
I. Kriteria Pindah/Lulus Modul	
J. Daftar Pustaka	

PASAR MALAM DI KAMPUNGKU

Petunjuk Penggunaan Modul

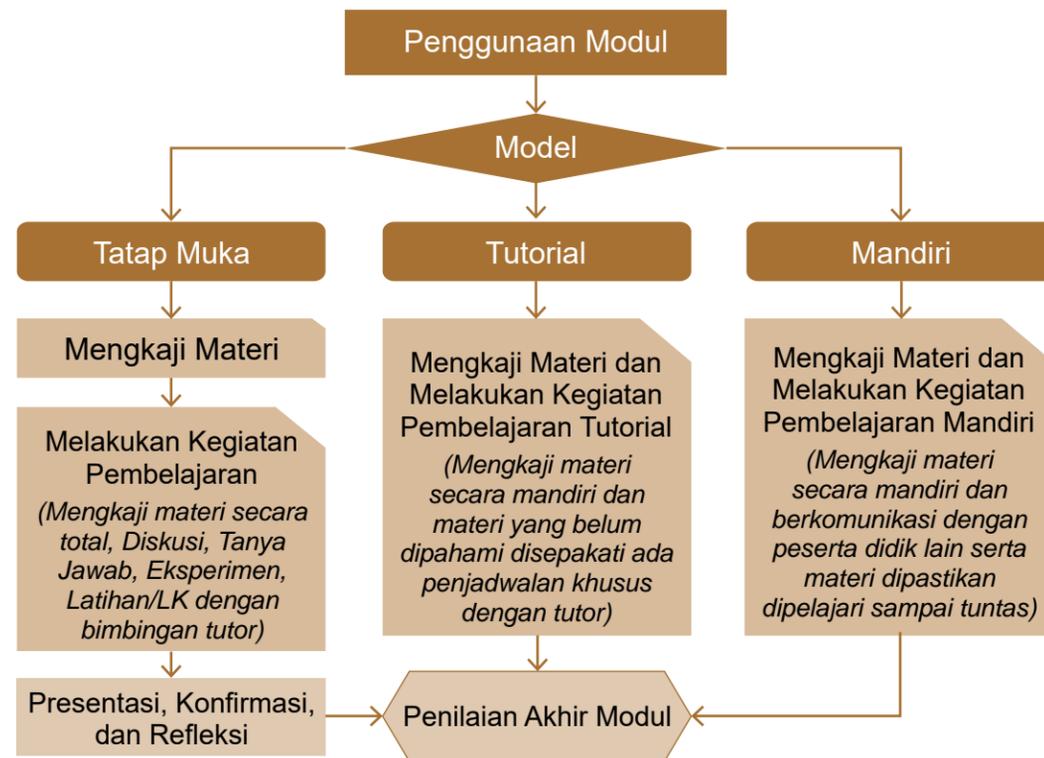


Modul ini berisi materi tentang konsep lingkaran, sedangkan materi bahasan pada modul ini adalah tentang pengertian lingkaran, unsur-unsur lingkaran (titik pusat, jari-jari, diameter, busur, tali busur, tembereng, juring, dan apotema), keliling lingkaran dan luas daerah lingkaran, hubungan sudut pusat dan sudut keliling lingkaran, sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling lingkaran, menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran, pengertian garis singgung lingkaran, sifat-sifat garis singgung lingkaran, panjang garis singgung lingkaran (persekutuan dalam dan luar lingkaran), melukis garis singgung, dan menyelesaikan soal berkaitan dengan garis singgung lingkaran. Untuk mengkaji materi-materi tersebut, Anda sudah harus menguasai materi prasyarat yaitu operasi hitung bilangan bulat dan pecahan. Cara belajar dengan menggunakan modul dapat dilakukan secara mandiri (tanpa bantuan tutor/pendidik), melalui tutorial, atau menggunakan pembelajaran tatap muka seperti yang dilaksanakan dalam sekolah formal. Tata cara penggunaan modul adalah sebagai berikut.

1. Mengikuti jadwal kontrak belajar yang telah disepakati dengan tutor
2. Membaca dan memahami uraian materi pembelajaran
3. Mengidentifikasi materi-materi pembelajaran yang sulit atau perlu bantuan konsultasi dengan tutor, sedangkan materi lainnya dipelajari dan dikerjakan secara mandiri atau penguatan pembelajaran bersama tutor
4. Melaksanakan tugas-tugas dalam modul dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran
5. Mengerjakan soal dan latihan dengan benar untuk lebih memahami materi pembelajaran

6. Mengerjakan soal penilaian akhir modul untuk lebih memahami materi pembelajaran dengan benar
7. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan tugas karena keterbatasan sarana, prasarana, alat, media dan bahan belajar yang diperlukan, maka Anda dapat berkonsultasi dengan rekan sejawat untuk merancang tugas alternative yang setara
1. Apabila Anda mengalami kesulitan mengerjakan soal, latihan dan penilaian akhir modul, maka Anda dapat menggunakan rubric penilaian, kunci jawaban dan pembahasan yang diberikan diakhir modul agar lebih memahami. Kerjakan ulang soal, latihan dan penilaian akhir sampai Anda yakin tidak mengalami kesulitan mengerjakan soal
8. Apabila Anda mengalami kesulitan atau ingin mendalami lebih lanjut uraian materi, melaksanakan tugas pembelajaran, latihan dan soal yang diberikan belum cukup membuat Anda menguasai kompetensi yang diharapkan, maka Anda perlu mempelajari lebih lanjut referensi dan daftar pustaka suatu materi pembelajaran

Secara umum, petunjuk penggunaan modul pada setiap kegiatan pembelajaran disesuaikan dengan langkah-langkah kegiatan pada setiap penyajian modul. Modul ini dapat digunakan dalam kegiatan pembelajaran oleh peserta didik, baik dilaksanakan dengan model tatap muka, model tutorial, maupun model belajar mandiri. Berikut alur petunjuk penggunaan modul secara umum dapat dilihat pada bagan di bawah ini.



Gambar 1.1. Alur Model Kegiatan Pembelajaran

1. Kegiatan Pembelajaran Tatap Muka

Pembelajaran tatap muka merupakan seperangkat tindakan yang dirancang untuk mendukung proses belajar peserta didik secara tatap muka, sedangkan kegiatan tatap muka adalah kegiatan pembelajaran yang didalamnya terjadi proses interaksi antara peserta didik dan pendidik/tutor. Metode yang sering digunakan dalam kegiatan pembelajaran seperti metode diskusi, tanya jawab, demonstrasi, eksperimen, dan lainnya.

2. Kegiatan Pembelajaran Tutorial

Pembelajaran tutorial yang dimaksud dalam kegiatan ini adalah dimana pembelajaran dilakukan secara mandiri untuk materi-materi yang dapat dengan mudah dipahami oleh peserta didik, sedangkan bagi materi-materi yang dianggap sulit untuk dipahami atau dipelajari maka dilakukan dengan tatap muka. Dalam pembelajaran metode tutorial ini diberikan dengan bantuan tutor. Setelah peserta didik diberikan bahan kajian materi pembelajaran, kemudian peserta didik diminta untuk mempelajari kajian materi yang ada dalam modul. Pada bagian kajian materi yang dirasa sulit, peserta didik dapat bertanya kepada tutor.

3. Kegiatan Pembelajaran Mandiri

Kegiatan pembelajaran mandiri merupakan kegiatan pembelajaran yang didorong agar peserta didik untuk menguasai suatu kompetensi guna menyelesaikan suatu permasalahan. Pada kegiatan pembelajaran mandiri peserta didik diberikan materi kajian yang ada dalam modul untuk dipelajari dan diarahkan untuk memegang kendali dalam menemukan dan mengorganisir jawaban yang diharapkan. Penetapan kompetensi sebagai tujuan pembelajaran mandiri dan sampai pada cara pencapaian mulai dari penentuan waktu belajar, tempat belajar, sumber belajar lainnya maupun evaluasi modul dilakukan oleh peserta didik itu sendiri. Pada pembelajaran mandiri dipastikan dengan benar bahwa peserta didik melakukan kajian materi, melakukan tahapan kegiatan pembelajaran, tahapan penugasan/latihan, evaluasi, bahkan sampai pada tahap penilaian dilakukan oleh peserta itu sendiri.



Tujuan Pembelajaran Modul

Tujuan setelah mempelajari Modul 4 ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan pengetahuan dan keterampilan tentang:

1. Mengidentifikasi bentuk lingkaran
2. Menyebutkan unsur-unsur lingkaran
3. Menentukan hubungan sudut pusat dengan sudut keliling
4. Menentukan besar sudut pusat jika sudut keliling diketahui atau sebaliknya
5. Menentukan keliling dan luas daerah lingkaran
6. Menentukan panjang busur dan luas juring lingkaran
7. Melukis lingkaran beserta unsur-unsurnya
8. Menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan sudut pusat, sudut keliling, panjang busur, dan luas juring lingkaran
9. Menjelaskan pengertian garis singgung lingkaran
10. Menentukan garis singgung persekutuan dalam dari dua lingkaran
11. Menentukan garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran
12. Melukis garis singgung persekutuan (dalam dan luar) dua lingkaran
13. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran
14. Menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan garis singgung persekutuan luar dua lingkaran



Pengantar Modul

Pembelajaran merupakan wahana untuk mendapatkan kemampuan baik sikap, pengetahuan, dan keterampilan. Untuk mendukung terciptanya kegiatan pembelajaran baik melalui model tatap muka, tutorial, maupun mandiri, maka salah satu alternatifnya adalah dengan modul ini. Materi pada Modul 4 ini yang memiliki tema "**Pasar Malam Di Kampungku**" dan didalamnya terdapat beberapa subtema yang terintegrasi dalam kegiatan pembelajaran. Secara umum materi pada modul ini membahas yang berkaitan dengan pemahaman konsep lingkaran. Modul ini memberikan gambaran uraian materi dengan penerapan dalam kehidupan sehari-hari atau bersifat kontekstual.

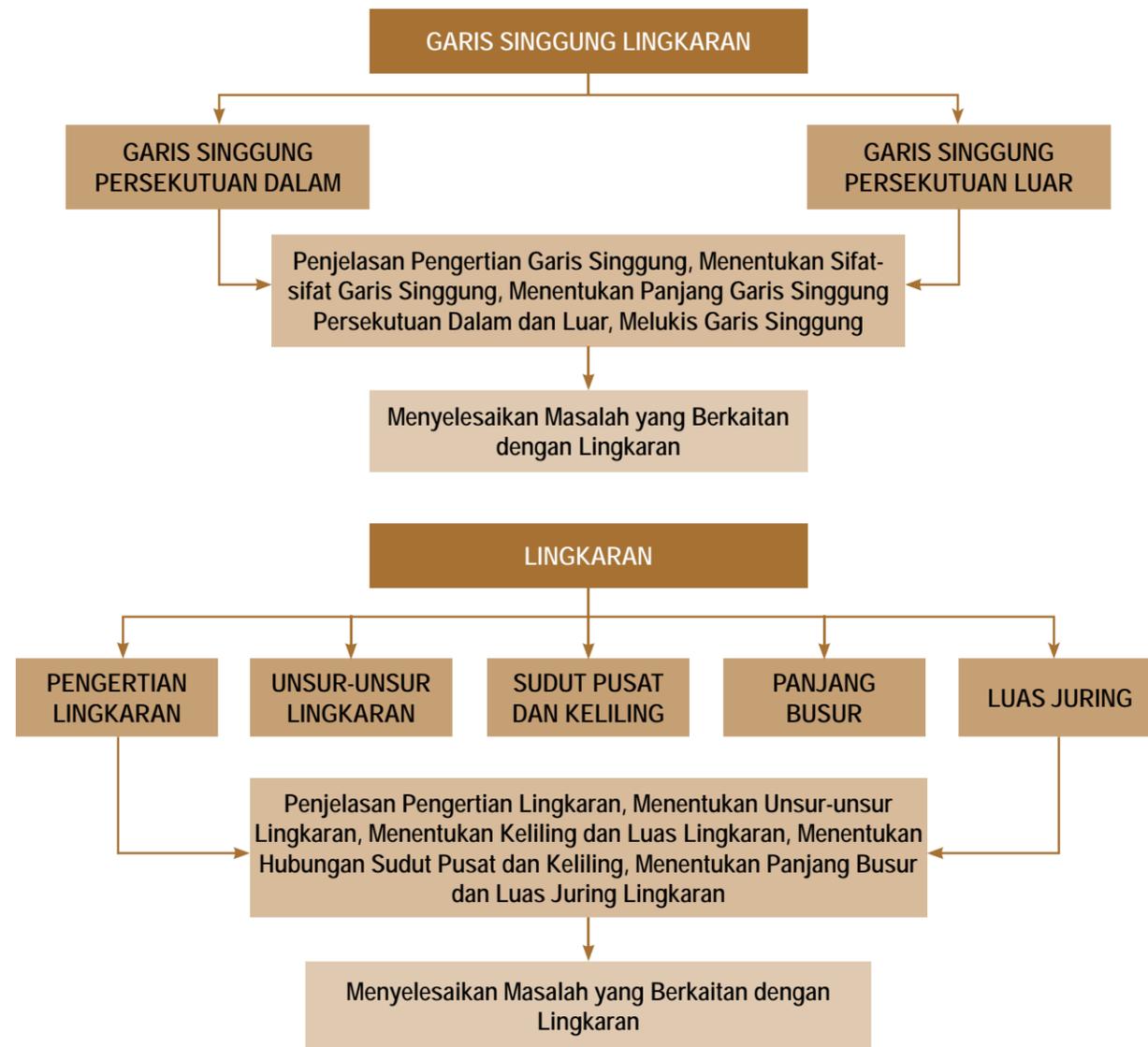
Pembagian Modul 4. Ini dibagi menjadi 2 unit yang terintegrasi ke dalam kegiatan pembelajaran, yaitu meliputi Unit 1 dengan subtema "**Kincir Putar di Pasar Malam**" dan Unit 2 dengan subtema "**Sepeda Badut Sirkus**",. Pada modul ini dalam kegiatan pembelajaran meliputi: uraian materi, penugasan, dan soal-soal latihan. Modul ini dilengkapi dengan contoh-contoh yang terjadi di kehidupan sehari-hari, misalkan yang berkaitan dengan jarak yang diempuh sebuah kendaraan, kertas atau karton yang diperlukan untuk membuat beberapa lingkaran, dll.

Dengan mempelajari modul ini dimana materi dikaitkan dengan permasalahan kehidupan sehari-hari, maka diharapkan peserta didik dengan mengkaji, mencermati, mengolah, menjawab permasalahan atau soal-soal latihan dapat memberikan manfaat dalam kehidupan sehari-hari.

Tema dan subtema yang diintegrasikan ke dalam kegiatan pembelajaran agar peserta didik lebih tertarik dan paham betapa besar kegunaan mempelajari materi lingkaran. Dengan mempelajari modul ini sudah barang tentu memberikan gambaran betapa pentingnya belajar, karena dengan belajar, peserta didik mampu menghadapi dan menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam kehidupan nyata, sehingga jelas bahwa dengan mempelajari materi lingkaran memberikan manfaat dalam mengarungi kehidupan yang akan dihadapi.

Pada Modul 4 akan dikaji masalah serta materi yang berkaitan dengan lingkaran dan secara umum materi lingkaran ini dijadikan 2 unit atau kita pilahkan menjadi 2 yaitu lingkaran itu sendiri antara lain pengertian lingkaran, unsur lingkaran keliling dan luas lingkaran, dan bagian 2 adalah bagian lingkaran yang terkait dengan sudut pusat dan sudut keliling, panjang garis singgung lingkaran, serta bagaimana melukis garis singgung lingkaran tersebut, serta garis singgung persekutuan lingkaran, baik persekutuan lingkaran luar maupun persekutuan lingkaran dalam. Dan, tentu saja tidak ketinggalan masalah-masalah dalam

kehidupan sehari-hari yang ada kaitannya dengan lingkaran. Berikut ini matri tersebut yang digambarkan dalam peta konsep seperti berikut.



KINCIR PUTAR DI PASAR MALAM

UNIT 1

Uraian Materi



Gambar 1: Suasana Pasar Malam pada waktu siang

Sumber <https://welovepangandaran.com/2017/06/09>

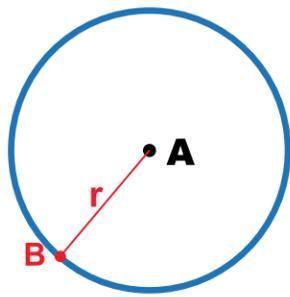
Kegiatan Pembelajaran

Pada Modul 4 ini dengan tema “Pasar Malam di Kampungku”, dibagi menjadi dua unit, yaitu:

1. Unit 1. Kincir Putar di Pasar Malam
2. Unit 2. Sepeda Badut Sirkus

A. Pengertian Lingkaran

Bila kita cermati kincir putar di pasar malam tersebut, bentuknya disebut lingkaran, yang dapat kita gambar secara matematika sebagai berikut.

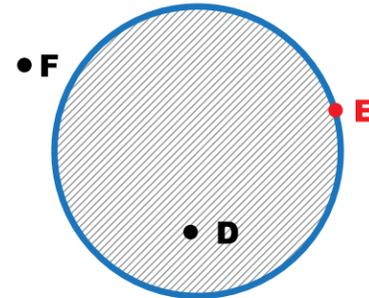


Gambar 2 (i)

Lingkaran adalah **himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu dalam suatu bidang**. Titik tertentu tersebut disebut **titik pusat** lingkaran, sedangkan jarak tertentu tersebut dinamakan jari-jari. Pada gambar titik tersebut adalah titik A dan **ruas garis AB** disebut **jari-jari** atau sering diberi nama variabel **r**. Lingkaran yang berpusat di titik A sering kali disebut **lingkaran A**.

Bila pada suatu bidang terdapat lingkaran, maka bidang tersebut terbagi menjadi tiga bagian yaitu:

- (i) di dalam lingkaran atau daerah lingkaran (diarsir), **titik D** berada di dalam lingkaran
- (ii) pada lingkaran, **titik E** berada pada lingkaran
- (iii) di luar lingkaran, **titik F** berada di luar lingkaran



Gambar 2 (ii)

Masalah 1.a

Perhatikan lingkungan Anda belajar, coba ditemukan benda-benda yang memiliki bangun lingkaran.

Alternatif Jawaban

Gelas, uang logam, kancing baju, dan lain-lain.

AYO DISKUSIKAN

Bagaimana cara mengukur jari-jari sebuah lingkaran? Diskusikan bagaimana caranya dan alat apa saja yang harus dipersiapkan untuk digunakan. Ukurlah jari-jari lingkaran dari bagian benda yang dapat Anda temukan.

B. Unsur-unsur Lingkaran

Selain pusat lingkaran dan jari-jari lingkaran, kita akan membahas unsur-unsur lingkaran lainnya.

a. Jari-jari dan Diameter,

Jari-jari (r) adalah ruas garis yang meng-hubungkan titik pada lingkaran ke pusat lingkaran. Sedangkan **diameter (d)** adalah ruas garis yang menghubungkan satu titik ke titik lain pada lingkaran dan ruas garis tersebut melalui pusat lingkaran. Dengan demikian maka;

$$d = 2r. \quad (\text{Lihat gmb. 3 (i)})$$

b. Tali busur

Tali busur adalah ruas garis yang menghubungkan satu titik ke titik lain pada suatu lingkaran. Ruas garis **KL** adalah **tali busur**. (Lihat gmb. 3 (ii))

c. Busur

Busur adalah bagian dari lingkaran yang dibatasi dua titik pada lingkaran. Sehingga dalam satu lingkaran terdapat dua busur, yaitu **busur kecil ditulis $\overset{\frown}{KL}$** dan **busur besar \frown_{KL}**

Lihat gmb. 3 (ii))

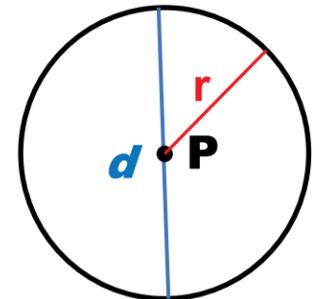
d. Juring

Juring atau sektor adalah bangun yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur. Dengan demikian bila pada lingkaran ada 2 titik M dan N, maka lingkaran akan terdapat 2 juring, yaitu **juring MNP kecil** yaitu juring yang panjang busurnya kurang dari $\frac{1}{2}$ lingkaran dan **juring MNP besar**

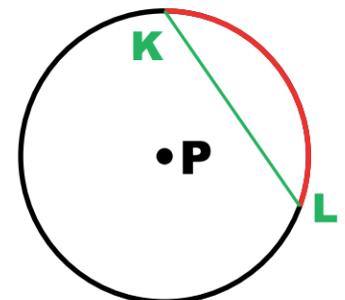
Lihat gmb. 3 (iii))

e. Sudut Pusat

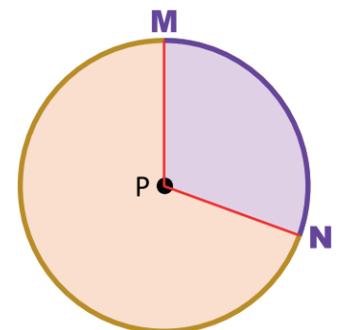
Sudut pusat yaitu sudut yang titik sudutnya di **P** pusat lingkaran dan kaki sudutnya jari-jari, pada gambar adalah $\angle MPN$. Sudut tersebut berada di depan busur MN (busur kecil), lihat gambar 3 (iii)



Gambar 3 (i)



Gambar 3 (ii)

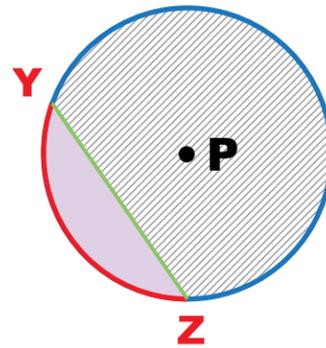


Gambar 3 (iii)

f. Tembereng

Tembereng adalah bangun yang dibatasi oleh tali busur dan busur. Dengan demikian bila pada lingkaran ada 2 titik Y dan Z, maka lingkaran akan terdapat 2 tembereng, yaitu **tembereng YZ kecil** dan **tembereng besar YZ** (daerah diarsir)

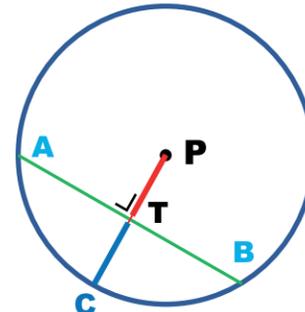
Lihat gmb. 3 (iv)



Gambar 3 (iv)

g. Apotema

Apotema adalah garis dari pusat lingkaran tegak lurus tali busur atau jarak pusat ke tali busur. Pada gmb. 3 (v), $PC \perp AB$ artinya PC tegak lurus AB, maka **PT adalah apotema**, sedangkan **TC** disebut **anak panah lingkaran**.



Gambar 3 (v)

Masalah 4.1.b

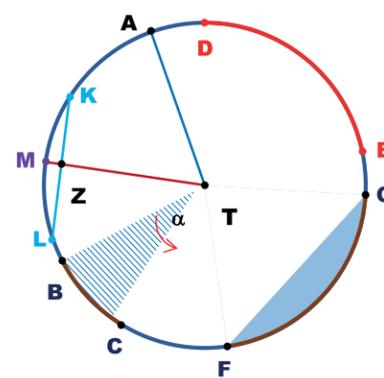
Gambarlah lingkaran T yang berdiameter 12 cm, kemudian pada lingkaran tersebut gambarlah;

- | | |
|------------------|----------------------------|
| a) jari-jari AT | d) Sudut pusat BTC |
| b) tali busur KL | e) tembereng FG |
| c) busur DE | f) apotema TZ |
| d) Juring BTC | g) anak panah lingkaran ZM |

Alternatif Jawaban

- | | |
|-----------------------|-------------------------------|
| a) jari-jari AT | e) sudut pusat BTC = α |
| b) tali busur KL | f) tembereng FG |
| c) busur DE (kecil) | g) apotema TZ |
| d) juring BTC (kecil) | h) anak panah lingkaran ZM |

Catatan: Untuk selanjutnya, bila tidak disebutkan lain maka yang dimaksud busur, juring, sudut pusat adalah busur kecil atau juring kecil, atau sudut pusat kecil yaitu besarnya kurang dari 180° .



Gambar 4

AYO DISKUSIKAN

Apakah Anda pernah menyaksikan “Perahu Ayun” di Pasar Malam? Buatlah sketsa dari perahu ayun yang pernah Anda lihat. Tuliskan unsur-unsur lingkaran yang ada pada sketsa atau gambar perahu ayun tersebut.



Gambar 5: Perahu Ayun
Sumber: <http://gopres.com/2016/02/28>

C. Keliling dan Luas Lingkaran

Keliling Lingkaran,

Keliling lingkaran adalah panjang garis lengkung dari suatu titik pada lingkaran sampai ke titik itu lagi. Pada setiap lingkaran, perbandingan keliling dan diameternya menghasilkan bilangan yang sama yang disebut π [baca: pi]. Dengan demikian, hal tersebut dapat dinyatakan;

$$K : d = \pi \Leftrightarrow K = \pi \cdot d \Leftrightarrow K = \pi \cdot 2r$$

$$\Leftrightarrow K = \pi d \text{ karena } d = 2r \text{ maka } K = 2\pi r$$

Nilai $\pi = 3,14159265358979324836 \dots$ merupakan pecahan yang tak berulang dan tak berakhir. Sehingga π adalah **bilangan irrasional**, yaitu bilangan yang tak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan; $\frac{a}{b}$. Namun demikian, untuk menyederhanakan perhitungan digunakan pendekatan nilai $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3,14$. Dalam perhitungan, bila **jari-jari merupakan bilangan kelipatan 7** atau diketahui **keliling atau luas merupakan bilangan kelipatan 11**, maka digunakan pendekatan nilai $\pi = \frac{22}{7}$. Sedangkan bila jari-jari bukan merupakan bilangan kelipatan 7 atau keliling atau luas bukan merupakan bilangan kelipatan 11 maka digunakan pendekatan nilai $\pi = 3,14$.

Contoh 1;

Sebuah lingkaran jari-jarinya 35 cm. Hitung keliling lingkaran tersebut.

Jawab: $K = 2\pi r$

$$\Leftrightarrow K = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 35 \Leftrightarrow K = 2 \cdot \frac{22}{\cancel{7}} \cdot \overset{5}{\cancel{35}} \Leftrightarrow K = 220$$

Jadi keliling lingkaran 220 cm.

Contoh 2;

Sebuah lingkaran jari-jarinya 30 cm. Hitung keliling lingkaran tersebut.

Jawab: $K = 2\pi r$

$$\Leftrightarrow K = 2 \cdot 3,14 \cdot 30 \quad \Leftrightarrow K = 188,4$$

Jadi keliling lingkaran 188,4 cm.

Contoh 3;

Sebuah lingkaran kelilingnya 88 cm. Hitung jari-jari lingkaran tersebut.

Jawab: $K = 2\pi r$

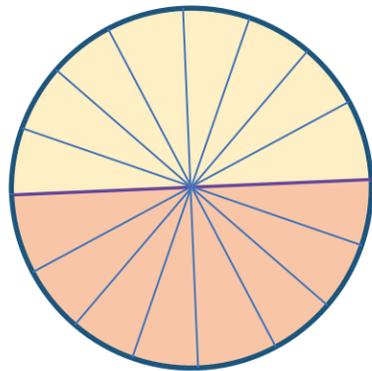
$$\Leftrightarrow 88 = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r = 88$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{7}{44} \cdot r \cdot x = 88 \times \frac{7}{44} \Leftrightarrow r = 14$$

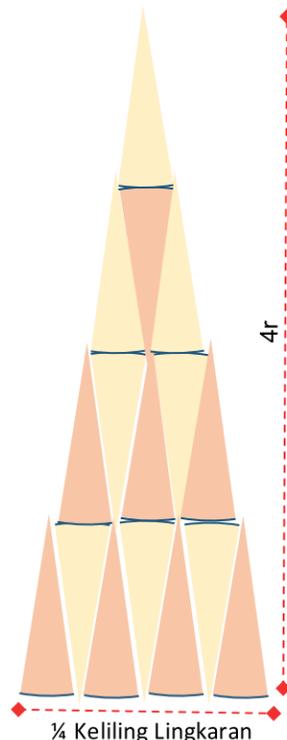
Jadi jari-jari lingkaran 14 cm.

Luas Lingkaran

Luas daerah lingkaran untuk selanjutnya ditulis **luas lingkaran**. Untuk menemukan rumus luas lingkaran dapat dilakukan sebagai berikut; pada sebuah lingkaran (gunakan kertas untuk mencoba) dibagi menjadi 16 juring yang sama besar (lihat gambar (i)).



Gambar 6 (i)



Gambar 6 (ii)

Potonglah juring tersebut, kemudian rangkailah seperti gambar (ii). Bangun yang terbentuk adalah "segitiga sama kaki" dengan panjang alas = $\frac{1}{4}$ keliling lingkaran = $\frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \pi r$ dan tinggi segitiga = $4r$.

Perhatikan gambar (i) dan (ii).

$$L_{\text{lingkaran}} = L_{\Delta \text{ sama kaki}}$$

$$\Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \frac{1}{2} a_{\Delta} \cdot t_{\Delta} \Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi r \cdot 4r$$

$$\Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \pi r \cdot r \quad \Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \pi r^2$$

Karena $d = 2r$ atau $r = \frac{1}{2} d$, rumus luas lingkaran juga dapat ditulis:

$$\Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \pi r^2 \Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \pi \left(\frac{1}{2} d\right)^2$$

$$\Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \frac{1}{4} \pi d^2$$

Penggunaan π seperti halnya pada saat perhitungan keliling lingkaran.

Contoh 1

Jari-jari sebuah lingkaran panjangnya 14 cm. Hitung luasnya.

Diketahui: Lingkaran

$$r = 14 \text{ cm,}$$

karena r merupakan bilangan kelipatan 7, maka $\pi = \frac{22}{7}$

Jawab: $L_{\text{lingkaran}} = \pi r^2$

$$\Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \frac{22}{7} \cdot 14^2 \Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = \frac{22}{7} \cdot 14 \cdot 14 \Leftrightarrow L_{\text{lingkaran}} = 616$$

Jadi luas lingkaran 616 cm².

Contoh 2

Luas sebuah lingkaran 1256 cm². Hitung keliling lingkaran tersebut.

Diketahui: Lingkaran

$$L = 628 \text{ cm}^2$$

Karena luasnya bukan kelipatan 11, maka $\pi = 3,14$.

Soal: Keliling

Jawab: Untuk menghitung keliling lingkaran, terlebih dahulu harus menemukan jari-jari lingkaran.

$$L_{\text{lingkaran}} = \pi r^2$$

$$\Leftrightarrow 1256 = 3,14 r^2 \Leftrightarrow 400 = r^2 \Leftrightarrow r = 20$$

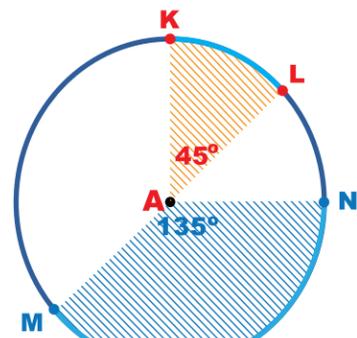
$$K_{\text{lingkaran}} = 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{lingkaran}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 20$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{lingkaran}} = 125,6$$

Jadi keliling lingkaran 125,6 cm

Hubungan sudut pusat, busur, dan juring.



Gambar 7

$$\text{Panjang busur KL} = x = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r = \frac{1}{8} \times 2\pi r = \frac{1}{4} \pi r$$

$$\text{Panjang busur MN} = x = \frac{135^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r = \frac{3}{8} \times 2\pi r = \frac{3}{4} \pi r$$

Panjang Busur = $\frac{\alpha}{360^\circ} \times 2\pi r$
 Panjang busur KL : busur MN = 1 : 3

$$\text{Luas Juring AKL} = \frac{45^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{1}{8} \pi r^2$$

$$\text{Luas Juring AMN} = \frac{135^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2 = \frac{3}{8} \pi r^2$$

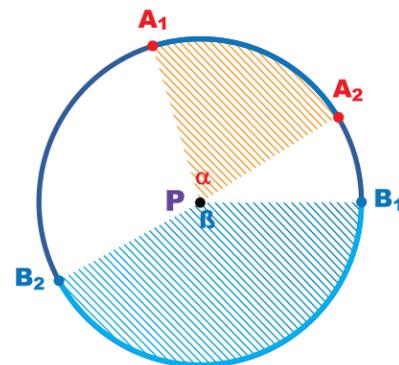
Luas Juring = $\frac{\alpha}{360^\circ} \times \pi r^2$
 Luas juring AKL : juring AMN = 1 : 3

Sudut pusat AKL = 45°
 Sudut pusat AMN = 135°

sudut pusat AKL : sudut pusat AMN = 1 : 3

Secara umum disimpulkan bahwa **perbandingan dua sudut pusat** sama dengan **perbandingan dua busur** sama dengan **perbandingan dua juring**. Atau, hal ini dapat ditulis: Bila α menghadap busur A_1A_2 dan β menghadap busur B_1B_2 maka:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\text{Panjang busur } A_1A_2}{\text{Panjang busur } B_1B_2} = \frac{\text{Luas juring } PA_1A_2}{\text{Luas juring } PB_1B_2}$$



Gambar 8



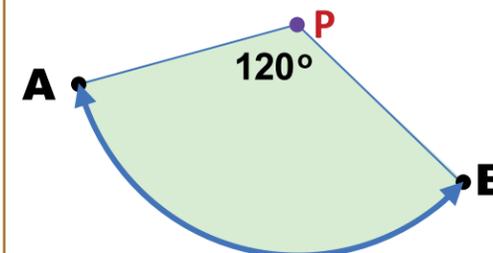
Gambar 9: Perahu Ayun
 Sumber: <http://gopres.com/2016/02/28>

Masalah 4.1.c

Jari-jari perahu ayun di Pasar Malam itu panjangnya 4 meter dan berayun-ayun bergerak membentuk sudut sebesar-besarnya hingga 120° . Berapa panjang lintasan para penumpang perahu ayun di pasar malam saat berayun hingga 120° ?

Alternatif Jawaban

Perhatikan gambar sketsa berikut.



Gambar 10

Panjang lintasan penumpang perahu ayun tersebut berupa busur lingkaran yang jari-jari 4 meter dan membentuk sudut sebesar 120° .

$$\text{Panjang lintasan AB} = \frac{120}{360} \times K_{\text{lingkaran}}$$

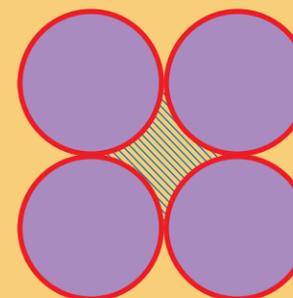
$$\Leftrightarrow \text{Panjang lintasan AB} = \frac{1}{3} \times 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow \text{Panjang lint. AB} = \frac{1}{3} \times 2 \cdot 3,14 \cdot 4$$

$$\Leftrightarrow \text{Panjang lint. AB} = \frac{1}{3} \times 25,12 = 8,37$$

Panjang lintasan 8,37 meter.

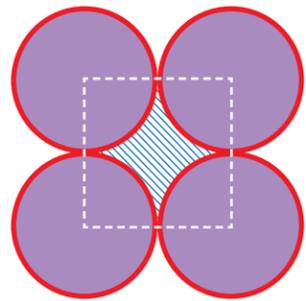
Masalah 4.1.d



Gambar 11

Empat buah drum yang masing-masing berdiameter 70 cm ditata seperti gambar di samping. Berapa luas daerah di antara keempat drum tersebut (daerah yang diarsir)?

Alternatif Jawaban



Gambar 12

Dibuat garis bantu seperti gambar di samping. Nampak bahwa daerah yang diarsir berada di dalam persegi yang titik sudutnya adalah pusat lingkaran dengan sisi persegi $= 2r = 140\text{cm}$. Dan pada tiap titik sudut terdapat juring dengan sudut pusat 90° .

$$\text{Jadi Luas daerah yang diarsir} = L_{\text{persegi}} - 4 L_{\text{juring}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas daerah yang diarsir} = s^2 - 4 \cdot \frac{90}{360} \pi r^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas daerah yang diarsir} = 140^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{22}{7} 70^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas daerah yang diarsir} = 19600 - 15400$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas daerah yang diarsir} = 4200 \text{ cm}^2.$$

AYO DISKUSIKAN

Silahkan mencari benda di sekitar Anda yang memiliki unsur lingkaran. Gunakan tali atau benang untuk mengukur diameter dan keliling lingkaran tersebut.. Perbandingan keliling dan diameter lingkaran yang merupakan bagian benda yang Anda temukan. Bandingkan hasil perbandingan $K : d$ yang Anda peroleh dengan hasil teman-teman Anda. Bila hasilnya berbeda lebih dari 2 silahkan didiskusikan bagaimana masing-masing mengukur benda tersebut.

Penugasan

Pada kegiatan Unit 4. “**Pasar Malam di Kampungku**”, meliputi beberapa kajian materi yaitu; pengertian lingkaran, unsur-unsur lingkaran, keliling dan luas lingkaran..

a. Tujuan

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik:

- Memahami pengertian lingkaran dan unsur-unsur lingkaran
- Terampil menggunakan rumus keliling dan luas lingkaran

b. Media, Alat, Bahan, dan Sumber Belajar Lainnya

Alat dan Bahan yang digunakan: Alat dan Bahan yang digunakan: Kertas karton, jangka, busur, penggaris, benang-tali, lem, benda-benda di lingkungan belajar yang terkait lingkaran.

c. Langkah-Langkah Kegiatan Pembelajaran Peserta Didik:

Kegiatan Pembelajaran 4.3. Pengertian Lingkaran, Unsur-unsur Lingkaran, Keliling dan Luas Lingkaran

Kegiatan Pembelajaran 4.3.a Pengertian Lingkaran,

Kegiatan 4.3.a

- 1) Bayangkan saat ini Anda berada di “Pasar Malam”. Berilah contoh benda-benda di lingkungan Pasar Malam tersebut yang memiliki unsur lingkaran.
- 2) Gambarlah sebuah lingkaran yang berpusat di P dengan jari-jari 4 cm gunakan pensil, jangka, dan penggaris pada saat melukis.

Kegiatan Pembelajaran 4.3.b .Unsur-unsur Lingkaran.

Kegiatan 4.3.b

Gambarlah sebuah lingkaran dengan jari-jari 5 centimeter dengan pusat di titik A, kemudian gambarlah pula;

- | | | |
|-----------------|-----------------|-------------------------|
| 1) Jari-jari AB | 4) Talibusur LM | 7) Sudut pusat ZAB |
| 2) Diameter KL | 5) Juring ACD | 8) Apotema AE |
| 3) Busur CD | 6) Tembereng EF | 9) Anak panah lingkaran |

Kegiatan Pembelajaran 4.3.c. Keliling dan Luas Lingkaran

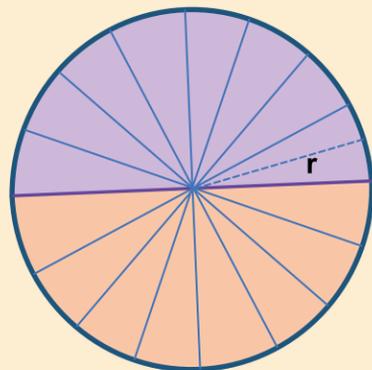
Kegiatan 4.3.a

1. Secara berkelompok masing-masing tiga peserta didik, Silahkan mencari tiga benda di sekitar Anda yang masing-masing memiliki unsur lingkaran. Gunakan tali atau benang untuk mengukur diameter dan keliling lingkaran tersebut, kemudian isikan hasil pengukuran pada tabel berikut.

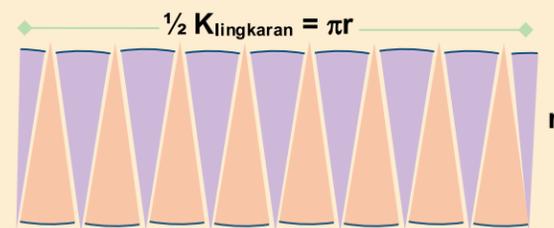
Benda	Nama Benda	Diameter (d)	Keliling (K)	K : d
1				
2				
3				
4				

Bila $K : d = \pi$, apa kesimpulan dari pengukuran keliling lingkaran ini?

2. Buatlah lingkaran dari kertas, ukuran disesuaikan dengan kertas yang Anda siapkan. Gambarlah diameternya sehingga lingkaran terbagi dua bagian, lihat gambar (i), masing-masing berilah warna yang berbeda. Pada tiap-tiap bagian ($\frac{1}{2}$ bagian daerah lingkaran) bagilah menjadi 8 bagian yang sama besar, kemudian rangkailah seperti gambar di bawah ini, lihat gambar (ii).



Gambar 13 (i)

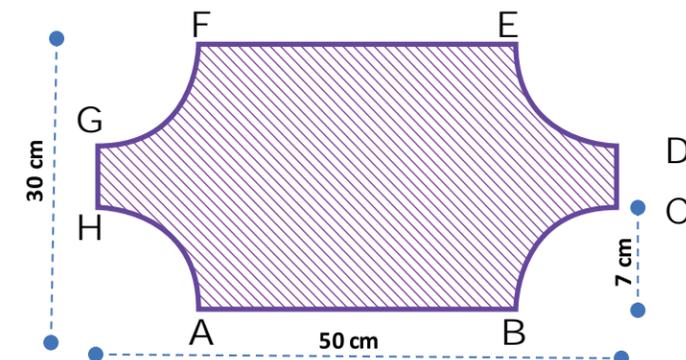


Gambar 13 (ii)

Hitung luas persegi panjang yang merupakan rangkaian juring tersebut. lihat gambar (ii). Apa kesimpulan dari perhitungan Anda tersebut?

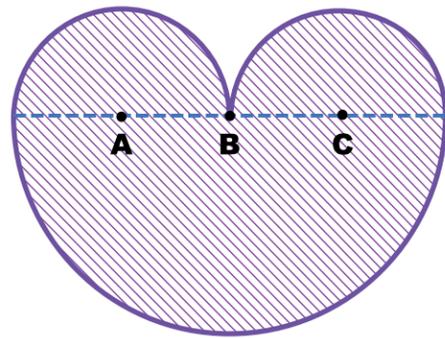
Soal Latihan-Tugas

- 1) Hitung keliling dan luas lingkaran bila jari-jarinya 21 cm.
- 2) Hitung keliling dan luas lingkaran bila diameternya 25 cm.
- 3) Lingkaran P kelilingnya 44 cm, hitunglah luas lingkaran P.
- 4) Lingkaran A luasnya 157 cm^2 , hitung keliling lingkaran A.
- 5) Titik A, B, C, dan D terletak pada lingkaran P. Besar $\angle APB = 60^\circ$ sedangkan besar $\angle CPD = 72^\circ$ dan panjang busur CD = 60 cm. Berapa panjang busur AB?
- 6) Titik P, Q, R, dan S terletak pada lingkaran A. Besar $\angle PAQ = 45^\circ$ sedangkan besar $\angle RAS = 105^\circ$ dan luas juring PAQ = 12 cm^2 . Berapa luas juring RAS?
- 7) Arena panggung sirkus berbentuk lingkaran dengan diameter 20 meter. Seorang badut naik sepeda dan berkeliling melalui tepi panggung berputar tiga kali. Berapa kali ban sepeda badut itu berputar jika jari-jari sepeda badut sirkus 20 cm.
- 8) Salah satu warung di Pasar Malam itu ada 3 buah drum berjari-jari 35 cm diikat tali menjadi satu sebanyak 3 lilitan. Berapa panjang tali yang diperlukan untuk ikatan drum itu?
- 9) Perhatikan gambar persegi panjang dan juring lingkaran yang berpusat di titik sudut persegi panjang berikut.



Hitung keliling dan luas daerah yang diarsir.

10) Perhatikan rangkaian juring lingkaran berikut



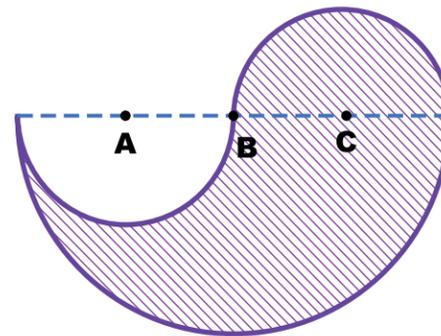
Pada gambar tersebut A, B, dan C adalah pusat lingkaran. Hitung luas dan keliling bangun yang diarsir, bila $AC = 20$ cm,

11) Jari-jari lingkaran A adalah 20 cm dan jari-jari lingkaran B 30 cm. Hitunglah perbandingan:

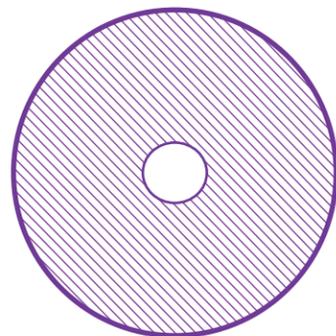
- Jari-jarinya
- Diameter
- Keliling
- Luas

12) Perhatikan rangkaian juring lingkaran berikut.

Gambar di samping kanan A, B, dan C adalah pusat lingkaran. Hitung luas dan keliling bangun yang diarsir, bila $AC = 14$ cm,



13) Perhatikan gambar berikut.



Diameter lingkaran besar 180 cm dan lingkaran kecil diameter 20 cm. Hitung luas daerah yang diarsir.



Gambar 14: Sepeda Badut Sirkus

Sumber: <http://www.badut.id/product/badut-sirkus-akrobat-show/>

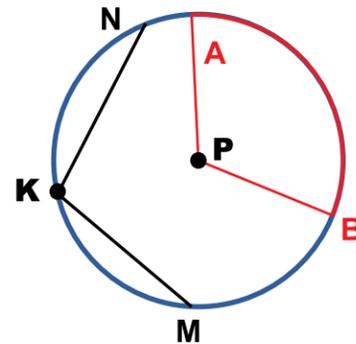
Perhatikan jeruji sepeda badut di atas, seolah-olah jeruji tersebut membentuk sudut, Baik itu sudut di pelek sepeda maupun sudut di as roda, Secara matematika, sudut yang berada di pelek sepeda tersebut bisa kita anggap sudut yang titik sudutnya pada lingkaran, sedangkan sudut yang dibentuk jeruji pada as roda kita anggap sudut yang titik sudutnya di pusat lingkaran. Hal inilah yang kita kaji kali ini, **sudut keliling** dan **sudut pusat lingkaran**.

Uraian Materi

a. Hubungan sudut pusat dan sudut keliling

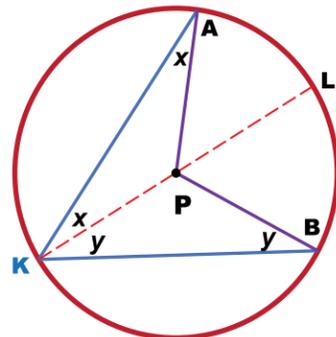
Sudut pusat yaitu sudut yang titik sudutnya di pusat lingkaran dan kaki sudutnya jari-jari, pada gambar adalah $\angle APB$. Sudut tersebut berada di depan busur AB.

Sudut keliling yaitu sudut yang titik sudutnya pada lingkaran dan kaki sudutnya tali busur, pada gambar adalah $\angle MKN$, sudut tersebut berada di depan busur MN (busur besar).



Gambar 15

Besar sudut pusat dan sudut keliling



Gambar 16

Perhatikan gambar lingkaran di atas, $\angle AKB$ adalah **sudut keliling** menghadap **busur AB**. $\angle APB$ adalah **sudut pusat** menghadap **busur AB**.

Misal; besar $\angle AKP = x$ dan $\angle BKP = y$, sehingga $\angle AKB = (x + y)$

$\triangle APK$ sama kaki, $\angle AKP + \angle KAP + \angle APK = 180^\circ$. (sudut dalam segitiga)

$$\left. \begin{aligned} x + x + \angle APK &= 180^\circ \Leftrightarrow 2x + \angle APK = 180^\circ \\ \text{Pada sudut lurus KPL,} \quad \angle APL + \angle APK &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \angle APL = 2x$$

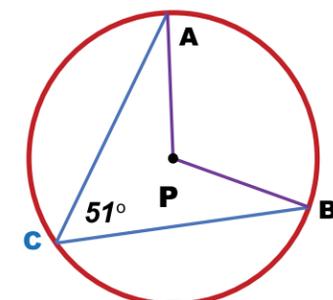
$\triangle BPK$, sama kaki $\angle BKP + \angle KBP + \angle BPK = 180^\circ$. (sudut dalam segitiga)

$$\left. \begin{aligned} y + y + \angle BPK &= 180^\circ \Leftrightarrow 2y + \angle BPK = 180^\circ \\ \text{Pada sudut lurus KPL,} \quad \angle BPL + \angle BPK &= 180^\circ \end{aligned} \right\} \angle BPL = 2y$$

$$\begin{aligned} \angle APL &= 2x \\ \angle BPL &= 2y \quad + \\ \hline \text{Jadi } \angle APB + \angle BPL &= 2x + 2y \\ \angle APB &= 2(x + y) \Leftrightarrow \angle APB = 2 \angle AKB \end{aligned}$$

Kesimpulan:
Besar sudut pusat sama dengan dua kali sudut keliling jika kedua sudut tersebut menghadap busur yang sama

Contoh:

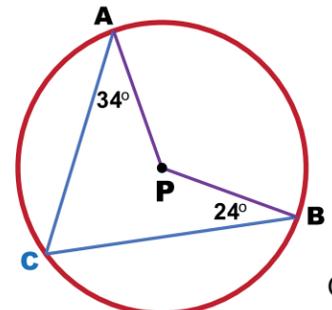


Gambar 17

Hitung besar $\angle APB$.
 Perhatikan bahwa $\angle ACB$ (sudut keliling) dan $\angle APB$ (sudut pusat) menghadap pada busur yang sama yaitu $\cap AB$.
 Jadi $\angle APB = 2 \angle ACB$
 $\Leftrightarrow \angle APB = 2 \times 51^\circ$
 $\Leftrightarrow \angle APB = 102^\circ$

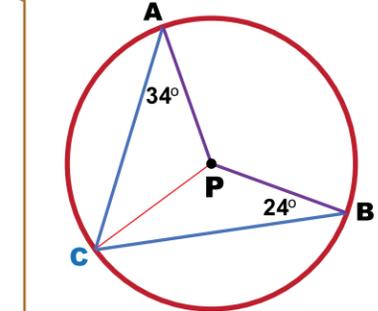
Masalah 4.2.a

Hitung besar $\angle APB$.



Gambar 18

Alternatif Jawaban



Gambar 19

Buat garis bantu CP, $\triangle ACP$ dan $\triangle BCP$ segitiga sama kaki.
 Perhatikan $\triangle ACP$ segitiga sama kaki.
 $\angle ACP = \angle CAP = 34^\circ$
 $\angle BCP = \angle CBP = 24^\circ$
 $\angle ACB = 58^\circ$
 Jadi $\angle APB = 2 \cdot \angle ACB = 2 \cdot 58^\circ = 116^\circ$.



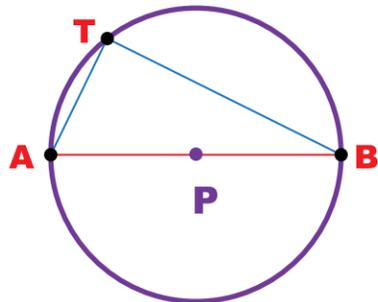
Gambar 20

AYO DISKUSIKAN

Perhatikan pedal sepeda tersebut, bila kita “membuat” garis tengah sembarang pada ban sepeda. Apakah dua sudut pusat yang dibentuk pedal sepeda dan jari-jari pada garis tengah selalu sama? Berilah penjelasan jawaban Anda?

b. Sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling

Sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran besarnya 90° .



Gambar 21

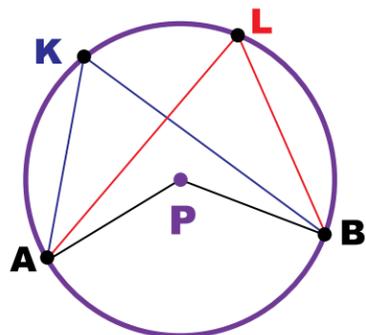
Bukti, perhatikan gambar 21.
 AB diameter, $\angle APB$ adalah sudut lurus 180° ,
 T adalah sembarang titik pada busur AB, jadi
 $\angle ATB$ adalah sudut pusat di depan busur AB
 Maka $\angle APB = 2 \cdot \angle ATB$

(hubungan sudut pusat dan sudut keliling)

$$\Leftrightarrow 180^\circ = 2 \cdot \angle ATB$$

$$\Leftrightarrow \angle ATB = 90^\circ \text{ (terbukti)}$$

Sudut keliling yang menghadap busur yang sama, besar sudutnya sama



Gambar 22

Bukti, perhatikan gambar 22.
 $\angle APB$ adalah sudut pusat, titik K dan L adalah sembarang titik pada busur besar AB.

$$\text{Maka } \angle APB = 2 \cdot \angle AKB \text{ 1)}$$

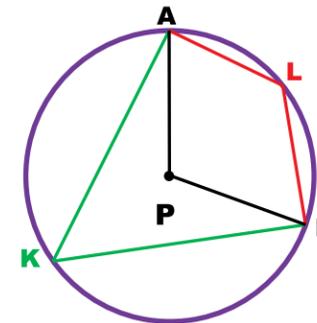
(hubungan sudut pusat dan sudut keliling)

$$\angle APB = 2 \cdot \angle ALB \text{ 2)}$$

(hubungan sudut pusat dan sudut keliling)

Berdasarkan pernyataan 1) dan 2) disimpulkan $\angle AKB = \angle ALB$
 (terbukti)

Jumlah besar sudut keliling yang saling berhadapan adalah 180° .



Gambar 23

Bukti, perhatikan gambar 23.

$\angle APB$ adalah sudut pusat, titik K adalah sembarang titik pada busur besar AB dan titik L adalah sembarang titik pada busur kecil AB.

$$\text{Maka: } \angle APB = 2 \cdot \angle AKB \text{ 1)}$$

(hubungan sudut pusat dan sudut keliling di depan busur kecil AB)

$$\angle APB = 2 \cdot \angle ALB \text{ 2)}$$

(hubungan sudut pusat dan sudut keliling di depan busur besar AB)

Persamaan 1) + 2) disimpulkan:

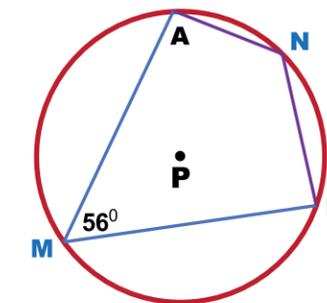
$$\angle APB_{\text{busurKecil}} + \angle APB_{\text{busurBesar}} = (\text{sudut 1 putaran}) = 360^\circ = 2 \cdot \angle AKB + 2 \cdot \angle ALB$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \angle AKB + 2 \cdot \angle ALB = 360^\circ \Leftrightarrow 2 \cdot (\angle AKB + \angle ALB) = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle AKB + \angle ALB = 180^\circ \text{ (terbukti)}$$

Masalah 4.2.b

Hitung besar $\angle ANB$



Gambar 24

Alternatif Jawaban

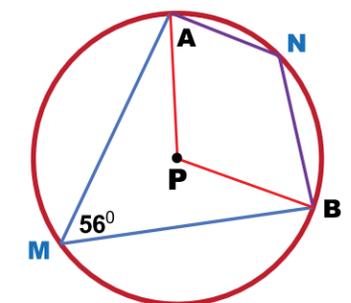
Perhatikan: $\angle AMB$ & $\angle ANB$ adalah sudut keliling menghadap busur AB.

$$\angle AMB + \angle ANB = 180^\circ \text{ (sifat sudut keliling yang berhadapan)}$$

$$\Leftrightarrow 56^\circ + \angle ANB = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow 56^\circ - 56^\circ + \angle ANB = 180^\circ - 56^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle ANB = 124^\circ$$



Gambar 25

AYO DISKUSIKAN

Diketahui lingkaran L, titik A, B, C, dan D terletak pada lingkaran L, serta $\angle ADC = \angle ABC$. Diskusikan apa yang Anda ketahui tentang BD, berbentuk apakah ABCD. Berilah alasan dan penjelasan jawaban Anda dan sampaikan hal tersebut kepada teman-teman.

c. Masalah yang terkait dengan lingkaran

Lingkaran adalah salah satu bentuk bangun yang indah, sehingga tidak heran jika benda-benda di sekitar kita cukup banyak yang berbentuk lingkaran. Lingkaran adalah bangun datar bersisi satu. Salah satu benda yang berbentuk lingkaran adalah ban kendaraan. Pernahkah kita tahu atau ingin mengetahui berapa kali ban kendaraan berputar ketika berjalan di suatu tempat menuju tempat lain?



Gambar 26: Sepeda Badut Sirkus
Sumber: <http://www.badut.id/product/badut-sirkus>

Jari-jari ban sepeda badut sirkus ini 25 cm. Dia berjalan sejauh 2 km berjalan-jalan di area pasar malam untuk mempromosikan pertunjukan sirkusnya. Berapa kali ban sepeda badut sirkus itu berputar selama dia berjalan di area pasar malam?

Untuk menjawab pertanyaan ini, kita hitung keliling lingkaran ban sepeda tersebut,

$$K_{\text{lingkaran}} = 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{lingkaran}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 25$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{lingkaran}} = 2 \cdot 3,14 \cdot 25$$

$$\Leftrightarrow K_{\text{lingkaran}} = 157$$

$$\begin{aligned} \text{Ban tersebut berputar} &= 2\text{km} : 157\text{cm} \\ &= 200000 \text{ cm} : 157 \text{ cm} \\ &= 1.273,8 \end{aligned}$$

Jadi ban tersebut berputar 1274 kali

Masalah 4.2.c

Arena pertunjukan sirkus berbentuk lingkaran dengan diameter 35 meter. Di tepian arena dihiasi lampu sorot warna-warni, lampu tersebut dipasang setiap 2 meter di pinggiran arena pertunjukan. Berapa banyak lampu yang terpasang di arena pertunjukan tersebut?



Gambar 27: Arena Sirkus
Sumber: <https://coretanirai.wordpress.com/2015/01/05/oriental-circus-indonesia-di-balikpapan/>

Alternatif Jawaban

Berdasarkan cerita pada soal tersebut, diketahui:

Lingkaran, $d = 35$ meter, tiap 2 meter di tepi lingkaran dipasang lampu.

Soal: banyaknya lampu

Jawab: $K = \pi d$

$$\Leftrightarrow K = \frac{22}{7} \times 35$$

$$\Leftrightarrow K = 110 \text{ meter}$$

$$\text{Banyaknya lampu} = 110 \text{ meter} \times \frac{1 \text{ lampu}}{2 \text{ meter}} = 55 \text{ lampu.}$$

AYO DISKUSIKAN

Saya ingin membuat model lingkaran-lingkaran utuh dari karton yang luasnya 154 cm^2 . Karton yang tersedia berukuran $100 \text{ cm} \times 16 \text{ cm}$. Apakah saya dapat membuat 10 lingkaran utuh dari karton yang tersedia? Berilah penjelasan. Berapa sebanyak-banyaknya saya dapat membuat model lingkaran utuh dari karton yang tersedia tersebut.

d. Pengertian garis singgung lingkaran

Coba perhatikan bagaimana posisi rantai pada gir sepeda badut sirkus di samping. Ketika kaki badut mengayuh, antara gir depan dan belakang dihubungkan dengan rantai. Untuk menyentuh gir maka diperlukan "gigi gir".



Gambar 28 : Rantai Sepeda
Sumber: <https://www.superadventure.co.id/news/4574/>

Posisi rantai pada gir sepeda ini bila dinyatakan dalam matematika adalah: **rantai sebagai garis** dan **gir sebagai lingkaran**. Sehingga keadaan ini disebut "**garis singgung**" lingkaran, Garis singgung lingkaran adalah garis yang memotong lingkaran di satu titik.

Masalah 4.2.d

Berikanlah contoh lain dalam kehidupan sehari-hari benda yang menggunakan **model matematika: garis singgung lingkaran**.

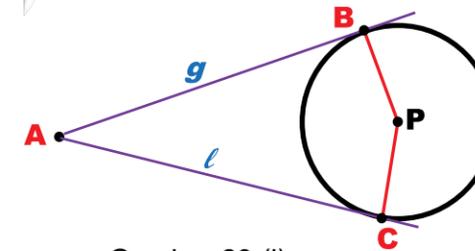
Alternatif Jawaban

- ❖ Tali timba sumur ditautkan pengerek, sumur yang menggunakan timba untuk mengambil air ini masih cukup banyak digunakan di daerah pedesaan. Bila Anda berada di kota, apalagi kota besar, keberadaan sumur yang menggunakan pengerek timba ini sudah jarang dijumpai.
- ❖ Tali bendera di sekolah ditautkan pengerek di puncak tiang bendera.

AYO DISKUSIKAN

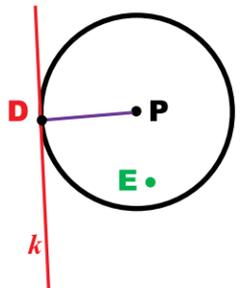
Gambarlah sebuah lingkaran A, tentukan titik B di luar lingkaran. **Gambarlah** garis singgung dari B ke lingkaran A, ukurlah panjang AB, **panjang garis singgung**, dan jari-jari lingkaran. Bagaimana hubungan ketiga besaran (panjang AB, **panjang garis singgung**, dan jari-jari lingkaran) tersebut?

e. Sifat sifat garis singgung lingkaran



Gambar 29 (i)

- Titik **di luar lingkaran** (titik A) dapat dibuat 2 garis singgung. Garis g dan garis l adalah garis singgung lingkaran P dari titik A. Titik B dan titik C disebut titik singgung, lihat gambar 29 (i).
- $AB \perp PB$ dan $AC \perp PC$
- Panjang $AB = AC$



Gambar 29 (ii)

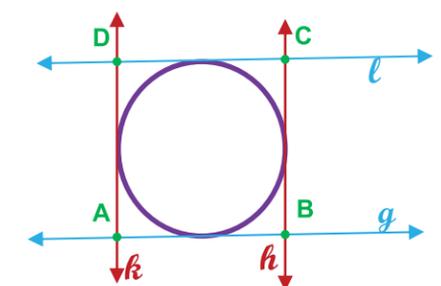
- Titik **pada lingkaran** (titik D), hanya dapat dibuat satu garis singgung yaitu garis k, lihat gambar 29 (ii), $AD \perp PD$.
- Titik **di dalam lingkaran** (titik E) tak dapat dibuat garis singgung lingkarannya, lihat gambar (ii), setiap garis yang dibuat melalui E selalu memotong lingkaran di 2 titik.

Masalah 4.2.e

Gambar sebuah lingkaran, gambar 2 garis sejajar yang masing-masing merupakan garis singgung pada lingkaran tersebut, kemudian gambar garis singgung lain sedemikian hingga garis singgung yang ada tegak lurus dengan garis singgung yang lain. Berbentuk apakah bangun yang dibentuk oleh garis-garis singgung tersebut?

Alternatif Jawaban

Garis $g \parallel l$ dan g, l merupakan garis singgung. Garis k dan h adalah garis singgung. Garis $g \perp k, g \perp h, l \perp k$ dan $l \perp h$.
Panjang $AB=BC=CD=AD= 2r$.
Jadi ABCD berbentuk **persegi**.



Gambar 30

AYO DISKUSIKAN

Gambar sebuah lingkaran dan tiga titik pada lingkaran tersebut sedemikian hingga bila dari ketiga titik itu dibuat garis singgung akan terbentuk segitiga sama sisi.

f. Panjang garis singgung lingkaran

Garis singgung lingkaran dari titik di luar lingkaran

Salah satu sifat garis singgung adalah garis singgung tersebut tegak lurus terhadap jari-jari lingkaran di titik singgungnya atau menurut gambar berikut hal tersebut dapat ditulis $AB \perp BP$ atau $g \perp r$.

Ditentukan “ g ” adalah panjang garis singgung lingkaran P, “ r ” adalah panjang jari-jari, dan “ j ” adalah jarak titik A ke pusat lingkaran P, dan $\triangle ABP$ siku-siku di B. (Lihat gambar 31)

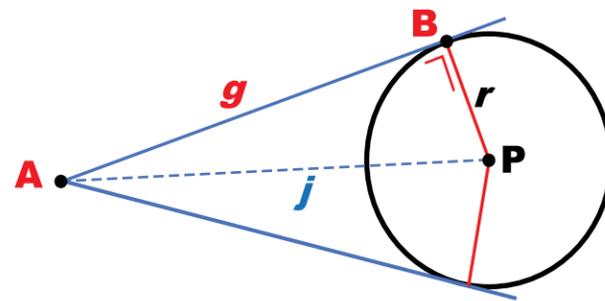
$AB^2 + BP^2 = AP^2$ (Teorema Pythagoras)

$$\Leftrightarrow g^2 + r^2 = j^2$$

$$\Leftrightarrow g^2 + r^2 - r^2 = j^2 - r^2$$

$$\Leftrightarrow g^2 = j^2 - r^2$$

$$\Leftrightarrow g = \sqrt{j^2 - r^2}$$



Gambar 31

Dengan demikian panjang garis singgung lingkaran dari suatu titik di luar lingkaran

$$\text{adalah: } g = \sqrt{j^2 - r^2}$$

Contoh:

Jari-jari sebuah lingkaran A adalah 7 cm. Titik B berjarak 25 cm dari A. Dari B dibuat garis singgung lingkaran A. Hitung panjang garis singgung tersebut.

Berdasarkan keterangan soal di atas dapat diketahui bahwa:

Lingkaran A, $r = 7$ cm, $j_{AB} = 25$ cm

Soal: g

$$\text{Jawab: } g = \sqrt{j^2 - r^2}$$

$$\Leftrightarrow g = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

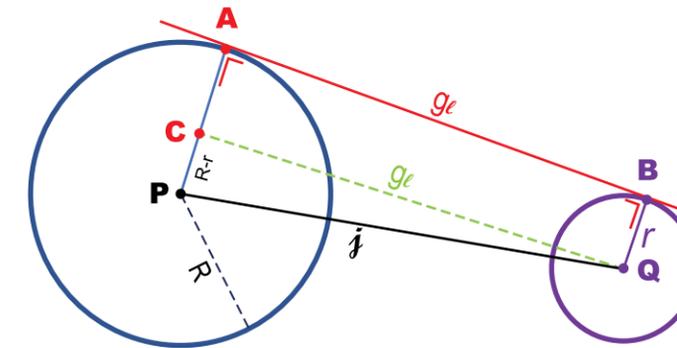
$$\Leftrightarrow g = \sqrt{625 - 49}$$

$$\Leftrightarrow g = \sqrt{576} = 24$$

Jadi panjang garis singgung lingkaran tersebut 24 cm.

Garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran

Garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran adalah sebuah garis yang menyinggung dua buah lingkaran dan tidak memotong garis yang menghubungkan dua pusat lingkaran tersebut. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 32

$AP =$ jari-jari lingkaran besar = R

$QB =$ jari-jari lingkaran kecil = r

$AB =$ garis singgung persekutuan luar = g_e

$PQ =$ jarak kedua pusat lingkaran = j

$AP \perp QC$, sehingga $ABQC$ persegi panjang, $AB = QC$ dan $AC = BQ$

$CP = R - r$, perhatikan $\triangle PQC$ siku-siku di C

Menurut teorema Pythagoras; $CP^2 + CQ^2 = PQ^2$

$$\Leftrightarrow (R-r)^2 + g_e^2 = j^2$$

$$\Leftrightarrow (R-r)^2 + g_e^2 - (R-r)^2 = j^2 - (R-r)^2$$

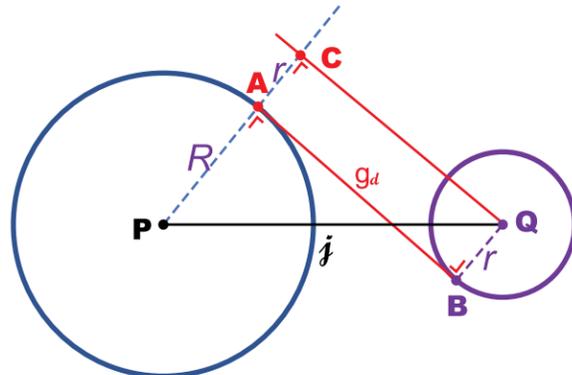
$$\Leftrightarrow g_e^2 = j^2 - (R-r)^2$$

$$\Leftrightarrow g_e^2 = j^2 - (R-r)^2$$

$$\Leftrightarrow g_e = \sqrt{j^2 - (R-r)^2}$$

Garis singgung persekutuan dalam dari dua lingkaran

Garis singgung persekutuan dalam dari dua lingkaran adalah sebuah garis yang **menyinggung dua buah lingkaran** dan **memotong garis yang menghubungkan dua pusat lingkaran** tersebut.



Gambar 33

AP = jari-jari lingkaran besar = R

QB = jari-jari lingkaran kecil = r

AB = garis singgung persekutuan dalam = g_d

PQ = jarak kedua pusat lingkaran = j

AP diperpanjang $AP \perp QC$, sehingga ABQC persegi panjang,

AB = QC = g_d dan AC = BQ = r

CP = R + r, perhatikan $\triangle PQC$ siku-siku di C

Menurut teorema Pythagoras; $CP^2 + CQ^2 = PQ^2$

$$\Leftrightarrow (R+r)^2 + g_d^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow (R+r)^2 + g_d^2 - (R+r)^2 = d^2 - (R+r)^2$$

$$\Leftrightarrow g_d^2 = j^2 - (R+r)^2$$

$$\Leftrightarrow g_d^2 = j^2 - 2$$

$$\Leftrightarrow g_d = \sqrt{j^2 - (R+r)^2}$$

Contoh:

Jari jari lingkaran A adalah 10 cm dan jari-jari lingkaran B adalah 6 cm. Jarak kedua pusat lingkaran 34 cm. Hitung panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut.

Jawab, dari soal tersebut,

Diketahui: 2 lingkaran

R = 10 cm, r = 6 cm, dan j = 34 cm

Soal: g_d

Jawab: $g_d = \sqrt{j^2 - (R+r)^2}$

$$\Leftrightarrow g_d = \sqrt{34^2 - (10+6)^2}$$

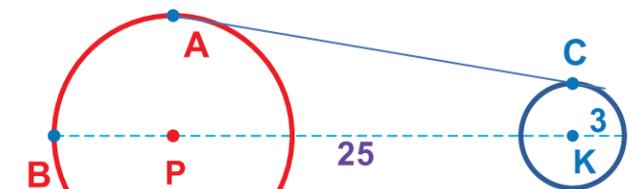
$$\Leftrightarrow g_d = \sqrt{34^2 - 16^2} \Leftrightarrow g_d = \sqrt{1156 - 256} \Leftrightarrow g_d = \sqrt{900}$$

$$\Leftrightarrow g_d = 30$$

Jadi panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut 30 cm.

Masalah 2.f

Jari jari lingkaran P adalah 10 cm dan jari-jari lingkaran K adalah 3 cm. Jarak kedua pusat lingkaran 25 cm. Hitung panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut.



Gambar 34

Alternatif Jawaban

Diketahui: R = 10 cm, r = 3, & j = 25 cm

Soal: Garis singgung persekutuan luar,

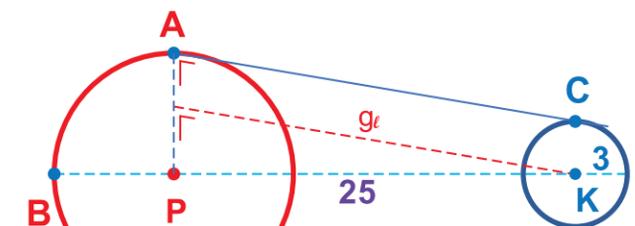
Jawab: $g_l = \sqrt{j^2 - (R-r)^2}$

$$= \sqrt{25^2 - (10-3)^2}$$

$$= \sqrt{625 - 49} = \sqrt{576}$$

$$= 24$$

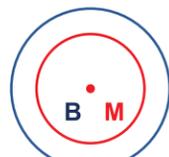
Garis singgung persekutuan luar 24cm



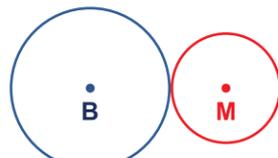
Gambar 35

AYO DISKUSIKAN

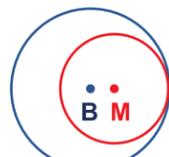
- ✓ Apakah dua buah lingkaran yang **sepusat** (lihat gambar 36) memiliki garis singgung persekutuan, bila kedua lingkaran tersebut jari-jarinya tidak sama panjang.
- ✓ Apakah dua buah lingkaran yang **bersinggungan luar** (lihat gambar 37) memiliki garis singgung persekutuan, bila kedua lingkaran tersebut jari-jarinya tidak sama panjang.
- ✓ Apakah dua buah lingkaran yang **bersinggungan dalam** (lihat gambar 38) memiliki garis singgung persekutuan, bila kedua lingkaran tersebut jari-jarinya tidak sama panjang.



Gambar 36



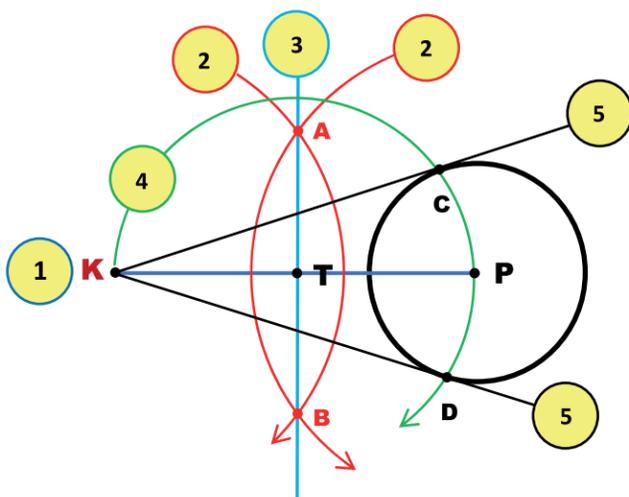
Gambar 37



Gambar 38

g. Melukis garis singgung lingkaran

Melukis garis singgung lingkaran dari titik di luar lingkaran

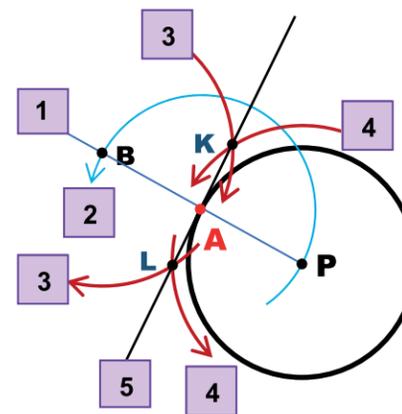


Gambar 39

Langkah-langkah melukis;

- 1) Hubungkan K ke pusat lingkaran P.
- 2) Jangkakan dari K dan P dengan jari-jari sama panjang sedemikian hingga kedua busur berpotongan di A dan B.
- 3) Hubungkan A dan B memotong KP di T.
- 4) Berpusat di T jangkakan dengan jari-jari TP sehingga busurnya memotong lingkaran P di C dan D,
- 5) K dihubungkan ke C, KC garis singgung terlukis. K dihubungkan ke D, KD garis singgung terlukis.

Melukis garis singgung lingkaran dari titik pada lingkaran



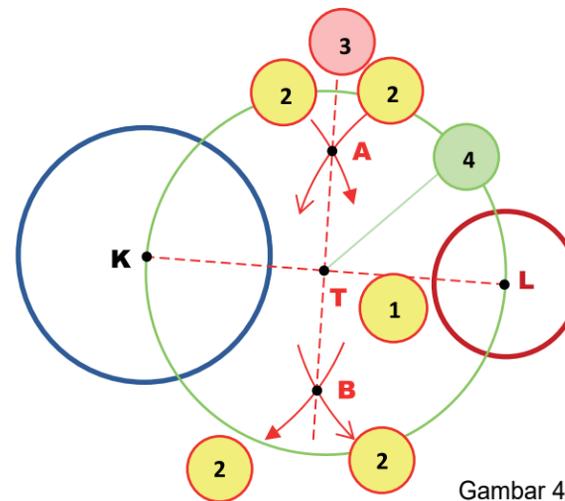
Gambar 40

Langkah-langkah melukis;

Hubungkan P ke A kemudian diperpanjang.

- 1) Jangkakan dari A dengan jari-jari AP sehingga busurnya memotong perpanjangan PA di B.
- 2) Dari P dan B dijangkakan dengan jari-jari lebih panjang dari panjang AB sehingga kedua busurnya potong memotong di K dan L.
- 3) K dan L dihubungkan, KL garis singgung lingkaran melalui A terlukis.

Melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran

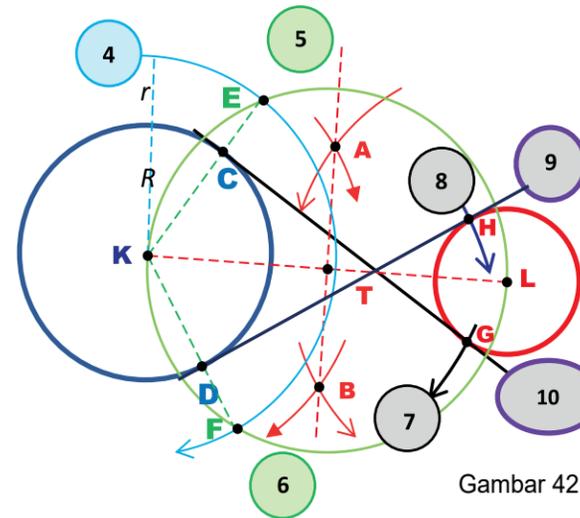


Gambar 41

Jari-jari lingkaran K adalah R dan jari-jari lingkaran L adalah r .

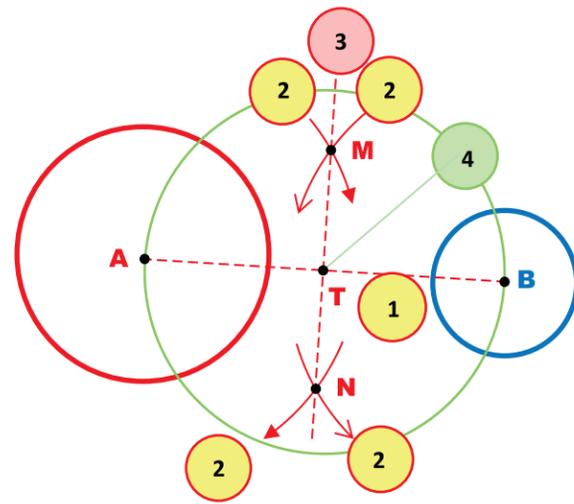
Langkah-langkah melukis:

- 1) Hubungkan K dan L
- 2) Buat busur berpusat di K dan L dengan jari-jari sama panjang sedemikian hingga kedua busur tersebut potong memotong di A dan B
- 3) Hubungkan A dan B sehingga memotong KL di T, T adalah tengah-tengah KL
- 4) Buat busur perpusat di K dengan jari-jari $(R + r)$ sehingga memotong lingkaran T di E dan F.
- 5) Hubungkan K dan E memotong lingkaran K di C
- 6) Hubungkan K dan F memotong lingkaran K di D
- 7) Jangkakan dari C dengan jari-jari EL sehingga memotong lingkaran L di G
- 8) Jangkakan dari D dengan jari-jari FL sehingga memotong lingkaran L di H
- 9) D dihubungkan H, terlukis DH garis singgung persekutuan dalam.
- 10) C dihubungkan G, terlukis CG garis singgung persekutuan dalam.

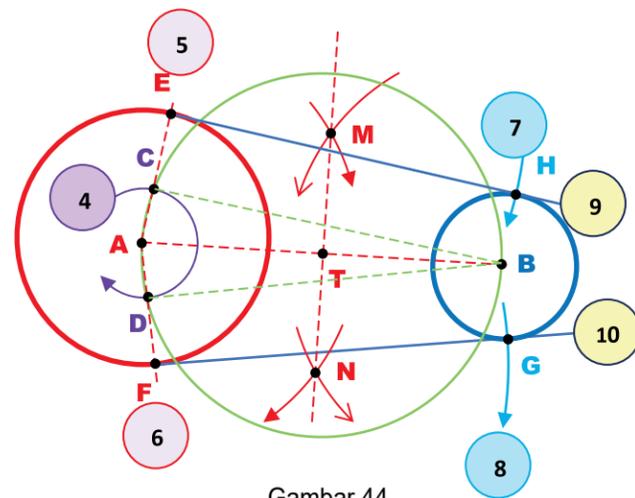


Gambar 42

Melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran



Gambar 43



Gambar 44

Jari jari lingkaran A adalah R dan jari-jari lingkaran B adalah r .

Langkah-langkah melukis:

- 1) Hubungkan A dan B
- 2) Buat busur berpusat di A dan B dengan jari-jari sama panjang sedemikian hingga kedua busur tersebut potong memotong di M dan N
- 3) Hubungkan M dan N sehingga memotong AB di T, T adalah tengah-tengah AB
- 4) Buat busur perpusat di A dengan jari-jari $(R-r)$ sehingga memotong lingkaran A di C dan D,
- 5) Hubungkan AC sehingga garis tersebut memotong lingkaran A di E
- 6) Hubungkan AD sehingga garis tersebut memotong lingkaran A di F
- 7) Dari E dijangkakan busur dengan jari-jari CB sehingga memotong lingkaran B di H.
- 8) Dari F dijangkakan busur dengan jari-jari DB sehingga memotong lingkaran B di G
- 9) E dan H dihubungkan, **terlukis EH** garis singgung persekutuan luar lingkaran A dan B.
- 10) F dan G dihubungkan, **terlukis FG** garis singgung persekutuan luar lingkaran A dan B.

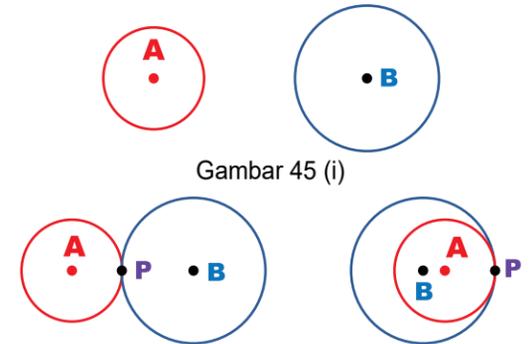
Masalah 2.g

Bagaimana kedudukan dua lingkaran bila dilukis dalam satu bidang?

Alternatif Jawaban

Dua lingkaran dilukis dalam satu bidang terjadi 4 kemungkinan, yaitu:

- 1) Lingkaran yang satu berada di luar lingkaran yang lain, perhatikan gambar 45 (i).
- 2) Lingkaran yang satu menyinggung lingkaran yang lain, perhatikan gambar 45 (ii). Sehingga kedua lingkaran memiliki 1 titik sekutu, yaitu titik P.
- 3) Lingkaran yang satu memotong lingkaran yang lain, perhatikan gambar 45 (iii). Sehingga kedua lingkaran memiliki 2 titik sekutu, yaitu titik P dan Q.
- 4) Lingkaran yang satu berada di dalam lingkaran yang lain, perhatikan gambar 45 (iv).



Gambar 45 (i)

Gambar 45 (ii)

Gambar 45 (iii)

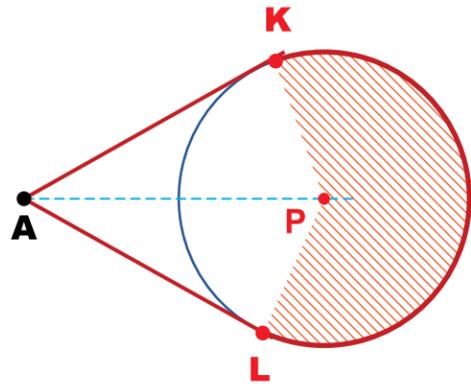
Gambar 45 (iv)

AYO DISKUSIKAN

Hitung panjang **garis singgung persekutuan dalam** dan **garis singgung persekutuan luar** dari dua lingkaran, bila diketahui $R= 5$ cm, $r = 4$ cm, dan $j = 9$ cm. Bagaimana kedudukan kedua lingkaran tersebut?

h. Soal terkait garis singgung lingkaran

Salah satu masalah dalam kehidupan sehari-hari terkait garis singgung lingkaran adalah penggunaan tali atau rantai pada gir. Salah satu contoh soalnya adalah sebagai berikut.



Gambar 46

Lempengan logam berbentuk lingkaran, pusatnya P dipakukan di tembok. Dari titik A dililitkan tali ke lempengan logam tersebut sehingga sudut pusat ($\angle KPL$) yang dibentuk dengan jari-jari lingkaran pada titik singgung adalah 120° . Berapa panjang lilitan tali tersebut bila jarak $AP = 140$ cm.

Pembahasan:

Perhatikan $\triangle APK$ siku-siku, $\angle APK = 60^\circ$ (mengapa?), & $AP = 140$ cm. Maka dapat diketahui bahwa $PK = 70$ cm dan $AK = 70$ cm.

(Pelajari lagi teorema Pythagoras, pada sudut istimewa).

Panjang tali yang dililitkan = $AK + \text{busur } KL + AL$

$AK = AL$ adalah garis singgung lingkaran dari titik A

$\text{busur } KL$ (**busur besar**) dengan sudut pusat $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$.

$$\text{busur } KL = \frac{240}{360} \times K_{\text{lingkaran P}}$$

$$\text{busur } KL = \frac{2}{3} \times 2\pi r = \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 70$$

$$\text{busur } KL = \frac{880}{3} = 293,3$$

$$\begin{aligned} \text{Panjang tali yang dililitkan} &= AK + \text{busur } KL + AL \\ &= 70 + 293,3 + 70 \\ &= (140 + 293,3) \text{ cm} \end{aligned}$$

Masalah 2.h

Sebuah rantai menghubungkan dua buah gir seperti tampak pada gambar. Jarak pusat kedua gir 26 cm. Jari-jari gir besar 15 cm dan jari-jari gir kecil 5 cm. Pada gir besar, sudut pusat yang dibentuk dengan jari-jari pada titik singgung adalah 135° . Berapa panjang rantai yang diperlukan untuk menghubungkan kedua gir tersebut?



Gambar 47

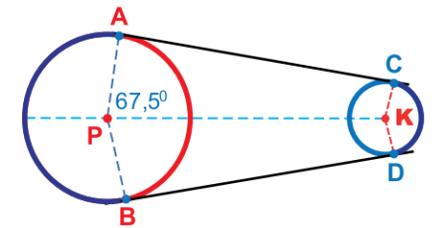
Alternatif Jawaban

Panjang rantai yang diperlukan =

busur AB + busur CD + 2 x garis singgung persekutuan luar

atau

$$\text{busur } AB_{\text{lingkaran besar}} + \text{busur } CD_{\text{lingkaran kecil}} + 2 \cdot g_{\ell}$$



Gambar 48

$$\angle APB = 2 \times 67,5^\circ = 135^\circ. \text{ (busur kecil)}$$

$$\text{busur } AB_{\text{lingkaran besar}} = \frac{360-135}{360} \times K_{\text{lingkaran besar}} \text{ (busur besar)}$$

$$\begin{aligned} \text{busur } AB_{\text{lingkaran besar}} &= \frac{225}{360} \times 2 \pi R = \frac{5}{8} \times 2 \cdot 3,14 \cdot 15 = \frac{5}{8} \times 94,2 = \frac{471}{8} \\ &= 58,87 = 58,9 \end{aligned}$$

$$\text{busur } CD_{\text{lingkaran kecil}} = \frac{135}{360} \times K_{\text{lingkaran kecil}} \text{ (busur kecil)}$$

$$\text{busur } CD_{\text{lingkaran kecil}} = \frac{3}{8} \times 2 \pi r = \frac{3}{8} \times 2 \cdot 3,14 \cdot 5 = \frac{3}{8} \times 31,4 = \frac{94,2}{8} = 11,77 = 11,8$$

$$\text{Panjang rantai yang diperlukan} = \text{busur } AB + \text{busur } CD + 2 \cdot \sqrt{j^2 - (R-r)^2}$$

$$= 58,9 + 11,8 + 2 \cdot \sqrt{j^2 - (R-r)^2} = 70,7 + 2 \cdot \sqrt{26^2 - (15-5)^2}$$

$$= 70,7 + 2 \cdot \sqrt{676 - 100} = 70,7 + 2 \cdot 24 = 70,7 + 48 = 118,7$$

Panjang rantai yang diperlukan 118,7 cm

AYO DISKUSIKAN

Bagaimana bila sebuah rantai menghubungkan dua buah gir dengan ukuran diameter kedua gir tersebut sama panjang? Tentukan rumus yang menyatakan panjang rantai tersebut, bila jarak kedua pusatnya "j" dan masing-masing jari-jarinya "r".

Penugasan

Pada kegiatan Unit 1. “Kincir Putar di Pasar Malam”, kajian materi adalah pengertian lingkaran, unsur-unsur lingkaran, serta keliling dan luas daerah lingkaran..

a. Tujuan

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik:

- memahami hubungan sudut pusat dan sudut keliling lingkaran,
- memahami sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling lingkaran,
- mampu menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran
- memahami pengertian garis singgung lingkaran,
- memahami sifat-sifat garis singgung lingkaran,
- dapat menggunakan rumus garis singgung lingkaran
- dapat menggunakan rumus garis singgung persekutuan 2 lingkaran
- terampil memelukis garis singgung lingkaran
- terampil memelukis garis singgung persekutuan 2 lingkaran
- mampu menyelesaikan masalah yang terkait dengan garis singgung lingkaran

b. Media, Alat, Bahan, dan Sumber Belajar Lainnya

Alat dan Bahan yang digunakan: Kertas karton, jangka, busur, penggaris, lem, benda-benda di lingkungan belajar yang terkait lingkaran.

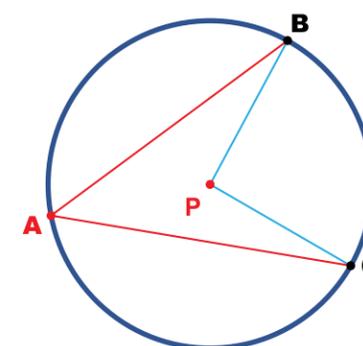
c. Langkah-Langkah Kegiatan Pembelajaran Peserta Didik:

Kegiatan Pembelajaran 4.2. Hubungan sudut pusat dan sudut keliling lingkaran, Sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling lingkaran, Menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran, Pengertian garis singgung lingkaran, Sifat-sifat garis singgung lingkaran, Panjang garis singgung lingkaran (persekutuan dalam dan luar lingkaran), Melukis garis singgung, dan Menyelesaikan soal berkaitan dengan garis singgung lingkaran.

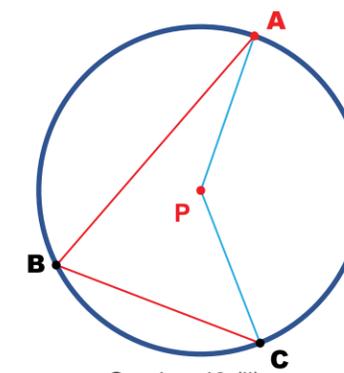
Kegiatan Pembelajaran 4.2.a Hubungan sudut pusat dan sudut keliling lingkaran.

Kegiatan 2.a

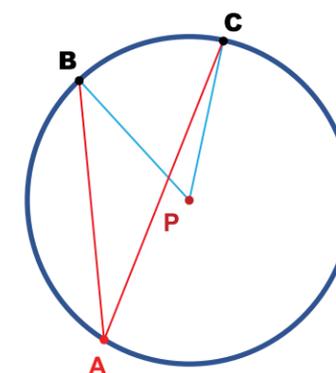
Dengan menggunakan busur derajat, ukurlah semua sudut pusat dan sudut keliling pada gambar 49. Usahakan agar pengukuran Anda teliti dan benar, sangat disarankan: jari-jari atau tali busur sebagai kaki sudut diperpanjang agar terbaca dengan tepat ukuran di busur derajat (jangan diperkirakan). Isikan hasil pengukuran tersebut di tabel berikut. Pada gambar no 49 terdapat 4 lingkaran, ilahkan membuat gambar sejenis dua buah lingkaran lagi, dengan ukuran bebas.



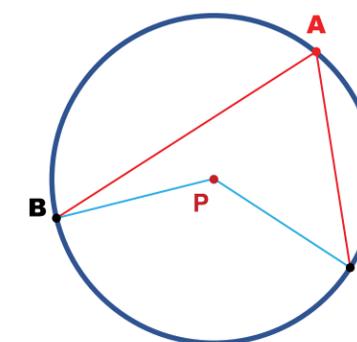
Gambar 49 (i)



Gambar 49 (ii)



Gambar 49 (iii)



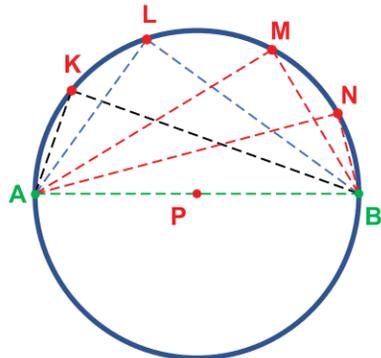
Gambar 49 (iv)

NO	GAMBAR NOMOR	SUDUT PUSAT $\angle BPC$	SUDUT KELILING $\angle BAC$	Hubungan $\angle BPC$ dan $\angle BAC$
1	49 (i)			
2	49 (ii)			
3	49 (iii)			
4	49 (iv)			
5	Gambar 1			
6	Gambar 2			

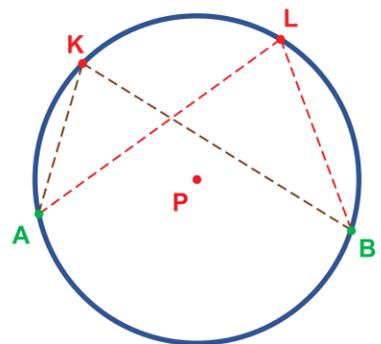
Buat kesimpulan tentang hubungan sudut pusat dan sudut keliling yang menghadap pada busur yang sama.

Kegiatan Pembelajaran 4.2.b Sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling lingkaran.

Kegiatan 2.b



Gambar 50



Gambar 51

- 1) AB adalah diameter lingkaran P. K, L, M, dan N pada lingkaran. Ukurlah besar sudut keliling $\angle AKB$, $\angle ALB$, $\angle AMB$, dan $\angle ANB$.

Apa kesimpulan Anda?

Ulangi lagi, buat lingkaran A, BC adalah diameter lingkaran A. Tentukan titik-titik P, Q, R, dan S.

Ukurlah besar sudut keliling $\angle BPC$, $\angle BQC$, $\angle BRC$, dan $\angle BSC$.

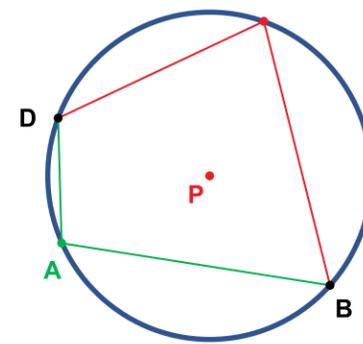
Apa kesimpulan Anda?

- 2) A dan B adalah sembarang titik pada lingkaran P. Hitung besar sudut keliling $\angle AKB$ dan $\angle ALB$. Bagaimana besar kedua sudut tersebut?

Ulangi lagi, buat lingkaran Q, A dan B adalah sembarang titik pada lingkaran Q. Tentukan titik C dan D berada sepihak pada busur AB. Hitung besar sudut keliling $\angle ACB$ dan $\angle ADB$. Bagaimana besar kedua sudut tersebut?

Ulangi lagi, buat lingkaran R, A dan B adalah sembarang titik pada lingkaran R. Tentukan titik E dan F berada sepihak pada busur AB. Hitung besar sudut keliling $\angle AEB$ dan $\angle AFB$. Bagaimana besar kedua sudut tersebut?

Berdasarkan percobaan dan pengukuran di atas, apa kesimpulan Anda.



Gambar 52

- 3) A, B, C, dan D adalah sembarang titik pada lingkaran P. Sudut keliling $\angle BAD$ berhadapan dengan sudut keliling $\angle BCD$. Ukurlah besar masing-masing sudut tersebut. Berapa $\angle BAD + \angle BCD$?

Ulangi kegiatan ini, buatlah lingkaran Q. E, F, G, dan H adalah sembarang titik pada lingkaran Q.

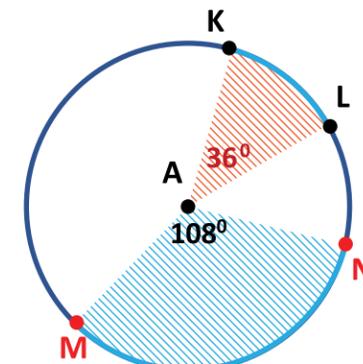
Sudut keliling $\angle FEH$ berhadapan dengan sudut keliling $\angle FGH$. Ukurlah besar masing-masing sudut tersebut. Berapa $\angle FEH + \angle FGH$?

Ulangi sekali lagi kegiatan ini, buatlah lingkaran R. K, L, M, dan N adalah sembarang titik pada lingkaran R. Sudut keliling $\angle LKN$ berhadapan dengan sudut keliling $\angle LMN$. Ukurlah besar masing-masing sudut tersebut. Berapa $\angle LKN + \angle LMN$?

Apa kesimpulan akhir dari ketiga percobaan berdasarkan pengukuran ini?

Kegiatan Pembelajaran 4.2.c Menyelesaikan masalah yang terkait dengan lingkaran,

Kegiatan 2.c



Gambar 53

Hitung sudut pusat KAL dan MAN!

Hitung panjang busur KL dan MN!

Hitung luas juring AKL dan juring MAN!

Bagaimana perbandingan sudut pusat, panjang busur, dan luas juring tersebut?

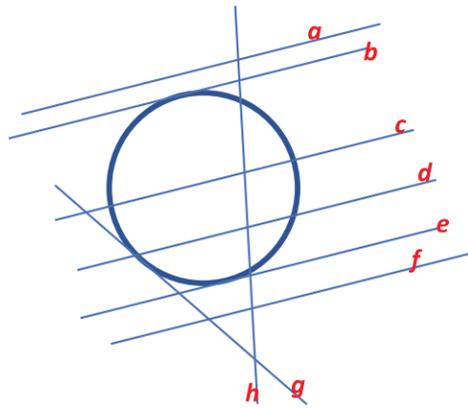
Apakah benar?

$$\frac{\text{sudut pusat KAL}}{\text{sudut pusat MAN}} = \frac{\text{panjang busur KL}}{\text{panjang busur MN}} = \frac{\text{luas juring AKL}}{\text{luas juring MAN}}$$

Cobalah buat lingkaran P tentukan dua sudut pusat dan lakukan seperti soal-soal di atas! **Bagaimana kesimpulan Anda?**

Kegiatan Pembelajaran 4.2.d. Pengertian garis singgung lingkaran.

Kegiatan 2.d

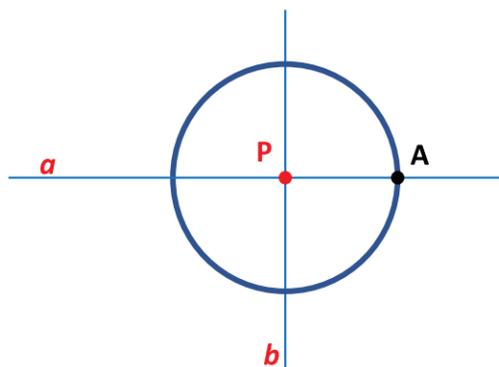


Gambar 54

Garis	Garis Singgung		Alasan
	Ya	Tidak	
a.			
b.			
c.			
d.			
e.			
f.			
g.			
h.			

Kegiatan Pembelajaran 4.2.e. Sifat-sifat garis singgung lingkaran,

Kegiatan 2.e



Gambar 55

Garis $a \perp b$, gambarlah garis singgung lingkaran P dari titik A, ada berapa garis singgung yang dapat kalian buat dari titik A?

Bagaimana hubungan garis singgung tersebut dengan garis a? Berapa besar sudut yang dibentuk garis singgung tersebut dengan AP (jari-jari lingkaran)

Bagaimana hubungan garis singgung tersebut dengan garis b?

Kegiatan Pembelajaran 4.2.f. Panjang garis singgung lingkaran (persekutuan dalam dan luar lingkaran),

Kegiatan 2.f

- ❖ Jari-jari lingkaran P adalah 10 cm dan lingkaran Q adalah 6 cm. Jarak $PQ = 34$ cm. Hitung panjang **garis singgung persekutuan dalam** kedua lingkaran tersebut.
- ❖ Jari-jari lingkaran A adalah 20 cm dan lingkaran B adalah 4 cm. Jarak $AB = 34$ cm. Hitung **panjang garis singgung persekutuan luar** kedua lingkaran tersebut.

Kegiatan Pembelajaran 4.2.g. Melukis garis singgung,

Kegiatan 2.g

Pelajari dan perhatikan langkah-langkah melukis garis singgung lingkaran pada modul ini, praktikan dalam melakukan kegiatan berikut:

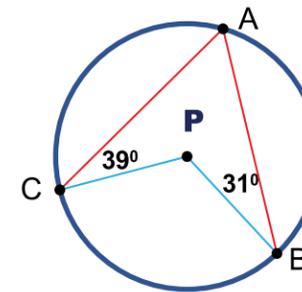
- Jari-jari lingkaran A sama dengan 5 cm, lukis garis singgung lingkaran A dari titik B bila $AB = 13$ cm. Tulis pula langkah-langkah yang kalian lakukan, kemudian **ukurlah panjang garis singgung lingkaran A dari titik B dengan menggunakan penggaris seteliti mungkin**. Cek jawaban hasil pengukuran panjang garis singgung tersebut bila Anda menghitung menggunakan rumus.
- Jari-jari lingkaran A dan lingkaran B berturut-turut adalah 5 cm dan 3 cm. **Lukis garis singgung persekutuan dalam** lingkaran A dan lingkaran B, bila jarak $AB = 10$ cm. Tulis pula langkah-langkah yang kalian lakukan, **kemudian ukurlah panjang garis singgung persekutuan dalam kedua lingkaran tersebut dengan menggunakan penggaris seteliti mungkin**. Cek jawaban hasil pengukuran panjang garis singgung persekutuan dalam tersebut bila Anda menghitung menggunakan rumus.

Kegiatan 2.h

Apakah Anda memiliki sepeda? Coba dibuka penutup rantai pada gir sepeda Anda. Ukurlah berapa **diameter gir depan** dan berapa **diameter gir belakangnya**, ukur berapa derajat **sudut pusat yang dibentuk oleh jari-jari di depan rantai yang melilit gir**, ukur pula **jarak kedua as gir** tersebut. Gunakan data itu untuk menghitung panjang rantai sepeda Anda. Pajang hasil pengukuran dan perhitungan Anda tersebut, minta teman atau tutor memberi komentar dan penilaian.

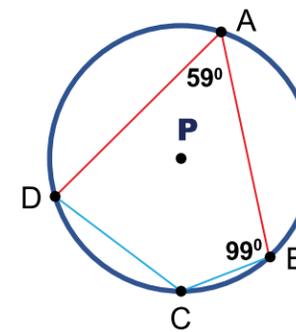
Soal Latihan

- 1) Lukislah sebuah lingkaran A yang berjari-jari 5 cm. Gunakan busur derajat untuk membuat sudut pusat KAL sebesar 70° . Titik B dan titik C pada lingkaran, gambarlah sudut keliling KBL dan KCL. Ukurlah besar $\angle KBL$ dan $\angle KCL$. Hitung dengan rumus yang Anda ketahui besar $\angle KBL$ dan $\angle KCL$. Bandingkan hasil perhitungan dan pengukuran Anda.
- 2) Perhatikan gambar berikut.



Hitung besar $\angle BPC$ yang menghadap busur kecil.

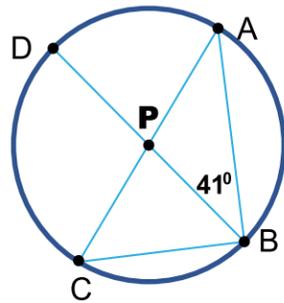
- 3) Perhatikan gambar berikut.



Hitung besar $\angle ADC$.

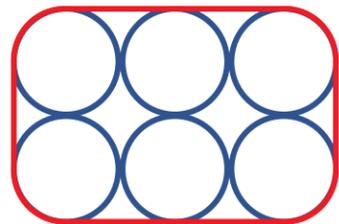
- 4) Diameter sebuah ban sepeda 49 cm digunakan untuk bersepeda sejauh 7,7 km. Berapa kali ban tersebut berputar?

5) Perhatikan gambar berikut.



Hitung besar $\angle ACB$.

- 6) Dalam membuat hiasan di stand Pasar Malam, Pak Kardi membuat hiasan dari plastik tebal yang dipotong-potong berbentuk lingkaran. Pak Kardi menghendaki luas tiap lingkaran 616 cm^2 . Pak Kardi memiliki plastik tebal berbentuk persegi panjang berukuran $300 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$. Berapa sebanyak-banyaknya Pak Kardi dapat membuat model lingkaran utuh dari plastik tersebut?
- 7) Titik A berada di luar lingkaran P sejauh 25 cm dari pusat lingkaran. Hitung panjang garis singgung lingkaran dari A, bila diameter lingkaran 30 cm .
- 8) Jari-jari lingkaran A = 13 cm , jari-jari lingkaran B = 6 cm , sedangkan $AB = 25 \text{ cm}$, Hitung panjang garis singgung persekutuan luar lingkaran A dan lingkaran B.
- 9) Jari-jari lingkaran P = 13 cm , panjang garis singgung persekutuan dalam lingkaran P dan lingkaran Q = 50 cm , sedangkan $PQ = 40 \text{ cm}$, Hitung panjang jari-jari lingkaran Q.
- 10) Lukis garis singgung persekutuan luar lingkaran K dan lingkaran L bila diketahui jari-jari lingkaran K = 6 cm , jari-jari lingkaran L = 4 cm , dan jarak $KL = 12 \text{ cm}$. Tulis pula langkah-langkah yang dilakukan saat melukis.
- 11) Perhatikan gambar penampang pralon berikut.

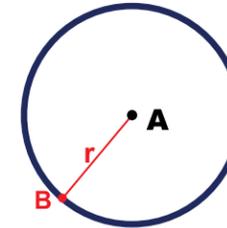


Berapa sekurang-kurangnya panjang tali yang diperlukan untuk mengikat ke-enam pralon tersebut, bila diameter pralon 5 inci .

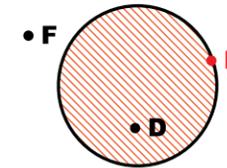
($1 \text{ inci} = 2,54 \text{ cm}$)

Rangkuman

Pengertian Lingkaran



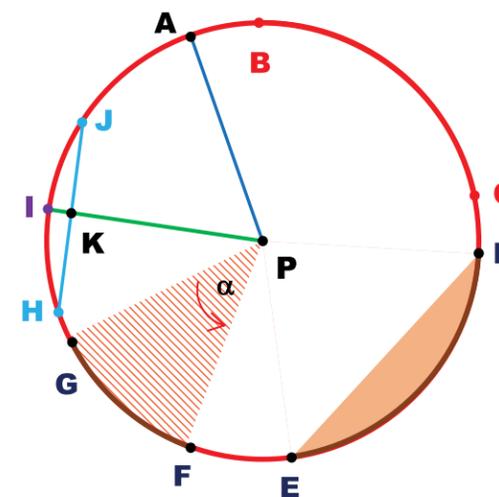
Lingkaran adalah himpunan titik-titik yang berjarak sama terhadap titik tertentu dalam suatu bidang. Titik tersebut adalah titik A disebut pusat lingkaran dan **ruas garis AB** disebut **jari-jari** atau sering diberi nama variabel **r**. Lingkaran yang berpusat di titik A sering kali disebut **lingkaran A**.



Suatu bidang terdapat lingkaran, bidang tersebut terbagi menjadi tiga bagian yaitu:

- (i) di dalam lingkaran, contoh **titik D**
- (ii) pada lingkaran, contoh **titik E**
- (iii) di luar lingkaran, contoh **titik F**

Unsur-unsur Lingkaran



- a. jari-jari AP
- b. tali busur MJ
- c. busur BC (kecil)
- d. juring, daerah GPF (kecil)
- e. sudut pusat $\angle GPF = \alpha$
- f. tembereng, daerah ED
- g. apotema PK
- h. anak panah lingkaran KI

Catatan: Untuk selanjutnya, bila tidak disebutkan lain maka yang dimaksud busur, juring, sudut pusat adalah busur kecil atau juring kecil, atau sudut pusat kecil yaitu besarnya kurang dari 180° .

Keliling Lingkaran

$$K = 2\pi r \text{ karena } d = 2r \text{ maka } K = \pi d$$

K adalah keliling lingkaran, r = jari-jari, dan d = diameter

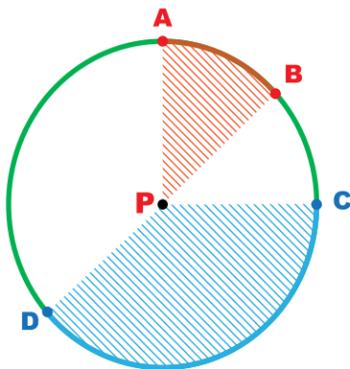
Nilai $\pi = 3,14159265358979324836 \dots$ merupakan pecahan yang tak berulang dan tak berakhir. Sehingga π adalah **bilangan irrasional**, yaitu bilangan yang tak dapat dinyatakan dalam bentuk pecahan; $\frac{a}{b}$. Namun demikian, untuk menyederhanakan perhitungan digunakan pendekatan nilai $\pi = \frac{22}{7}$ atau $\pi = 3,14$.

Luas Lingkaran

$$L_{\text{lingkaran}} = \pi r^2 \text{ karena } d = 2r \text{ atau } r = \frac{1}{2}d, \text{ maka } L_{\text{lingkaran}} = \frac{1}{4}\pi d^2$$

$L_{\text{lingkaran}}$ artinya luas daerah (di dalam) lingkaran

Hubungan Sudut pusat, busur, dan juring.



Perbandingan dua sudut pusat sama dengan perbandingan dua busur sama dengan perbandingan dua juring yang menghadap pada sudut pusat yang sama.

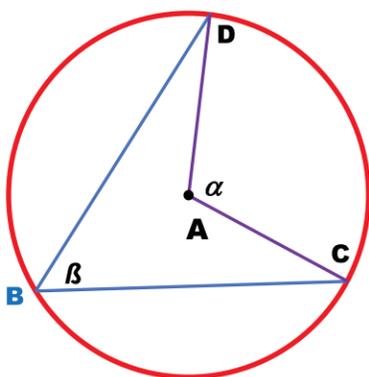
atau

$$\frac{\text{besar } \angle APB}{\text{besar } \angle CPD} = \frac{\text{Panjang busur AB}}{\text{Panjang busur CD}} = \frac{\text{Luas juring APB}}{\text{Luas juring CPD}}$$

$$\text{Panjang Busur AB} = \frac{\text{besar } \angle APB}{360^\circ} \times K_{\text{lingkaran}} = \frac{\text{besar } \angle APB}{360^\circ} \times 2\pi r$$

$$\text{Luas Juring APB} = \frac{\text{besar } \angle APB}{360^\circ} \times L_{\text{lingkaran}} = \frac{\text{besar } \angle APB}{360^\circ} \times \pi r^2$$

Hubungan sudut pusat dan sudut keliling



Besar sudut pusat sama dengan dua kali sudut keliling jika kedua sudut tersebut menghadap busur yang sama.

Sudut pusat $\angle CAD$ dan sudut keliling $\angle CBD$ menghadap busur yang sama yaitu busur CD.

$\angle CAD = \alpha$ dan $\angle CBD = \beta$, maka:

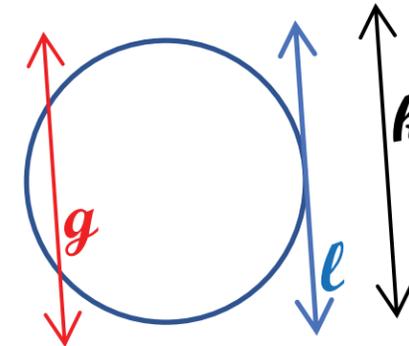
$$\alpha = 2 \times \beta$$

Sifat-sifat sudut pusat dan sudut keliling

- Sudut keliling yang menghadap diameter lingkaran besarnya 90° .
- Sudut keliling yang menghadap busur yang sama, besar sudutnya sama.
- Jumlah besar sudut keliling yang saling berhadapan adalah 180° .

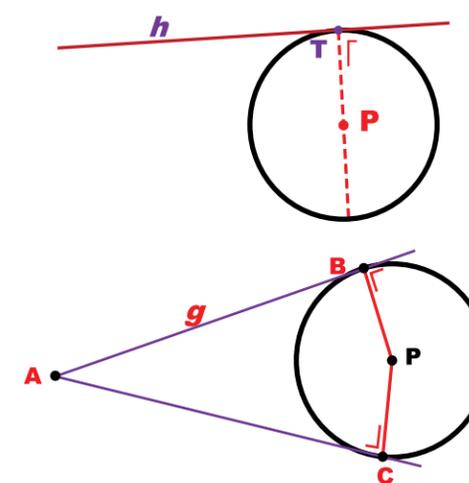
Pengertian garis singgung lingkaran

Garis singgung lingkaran adalah garis yang **memotong lingkaran di satu titik**.



- Garis g memotong lingkaran di 2 titik,
- Garis l menyinggung lingkaran, memotong di 1 titik.
- Garis k tidak memotong atau menyinggung lingkaran

Sifat-sifat garis singgung lingkaran



- Sebuah titik **pada lingkaran**, hanya dapat dibuat satu garis singgung
- Sebuah titik **di luar lingkaran** dapat dibuat 2 garis singgung.
- Garis singgung tegak lurus dengan jari-jari atau diameter lingkaran dari titik singgungnya ($AB \perp PB$ dan $AC \perp PC$).
- Panjang garis singgung dari titik di luar lingkaran, sama panjang ($AB = AC$).

Panjang garis singgung lingkaran dari titik di luar lingkaran

$$g^2 = j^2 - r^2 \Leftrightarrow g =$$

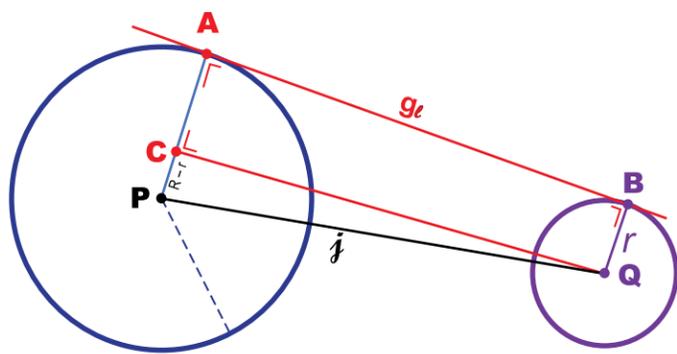
"g" adalah panjang garis singgung lingkaran dari titik di luar lingkaran

"r" adalah jari-jari lingkaran

"j" adalah jarak dari titik di luar lingkaran ke pusat lingkaran

Garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran

Garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran adalah sebuah garis yang **menyinggung dua buah lingkaran dan tidak memotong garis yang menghubungkan dua pusat lingkaran** tersebut. Perhatikan gambar berikut.



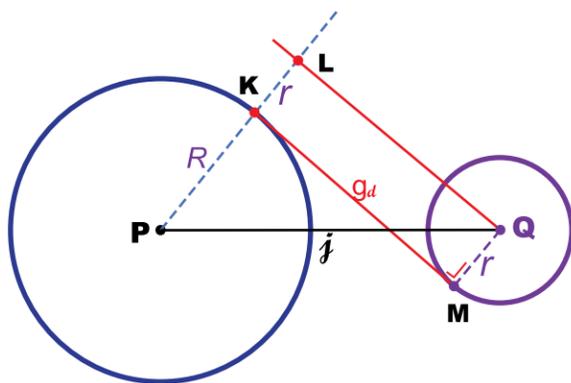
$$CQ^2 = PQ^2 - r^2$$

$$\Leftrightarrow g_l^2 = j^2 - r^2$$

$$\Leftrightarrow g_l = \sqrt{j^2 - r^2}$$

g_l adalah garis singgung persekutuan luar lingkaran (AB)
 R adalah jari-jari lingkaran besar (AP)
 r adalah jari-jari lingkaran kecil (BQ)
 j adalah jarak dua pusat lingkaran (PQ)

Garis singgung persekutuan dalam dari dua lingkaran



Garis singgung persekutuan dalam dari dua lingkaran adalah sebuah garis yang **menyinggung dua buah lingkaran dan memotong garis yang menghubungkan dua pusat lingkaran** tersebut.

$$QL^2 = PQ^2 - r^2$$

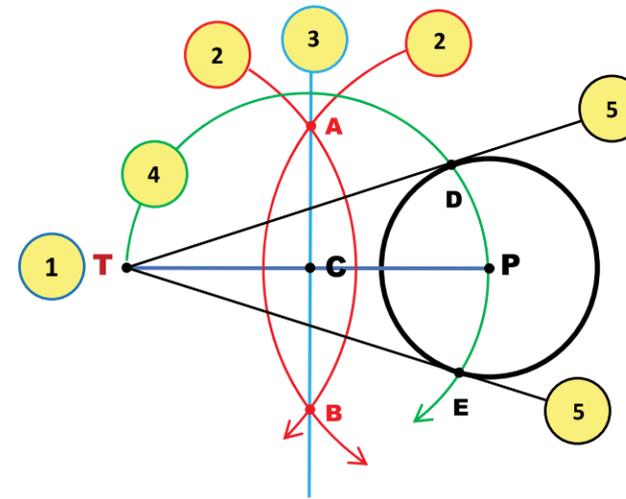
$$g_d^2 = j^2 - r^2$$

$$\Leftrightarrow g_d = \sqrt{j^2 - r^2}$$

g_d adalah panjang garis singgung persekutuan dalam lingkaran (AB)
 R adalah jari-jari lingkaran besar (PK)
 r adalah jari-jari lingkaran kecil (QM)
 j adalah jarak dari pusat lingkaran besar ke lingkaran kecil (PQ)

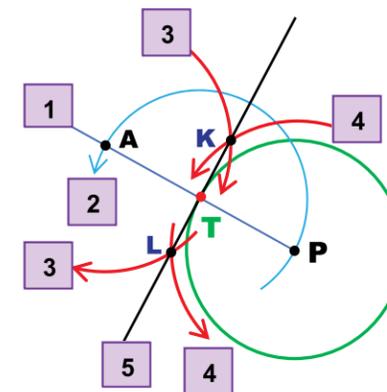
Melukis garis singgung lingkaran

- Melukis garis singgung lingkaran dari titik di luar lingkaran



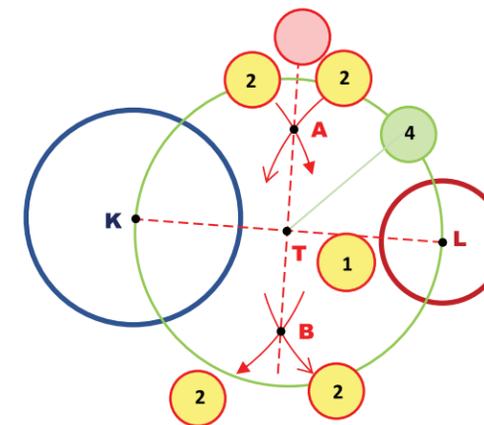
Langkah-langkahnya silahkan memperhatikan urutan nomor di dalam lingkaran kecil.

- Melukis garis singgung lingkaran dari titik pada lingkaran



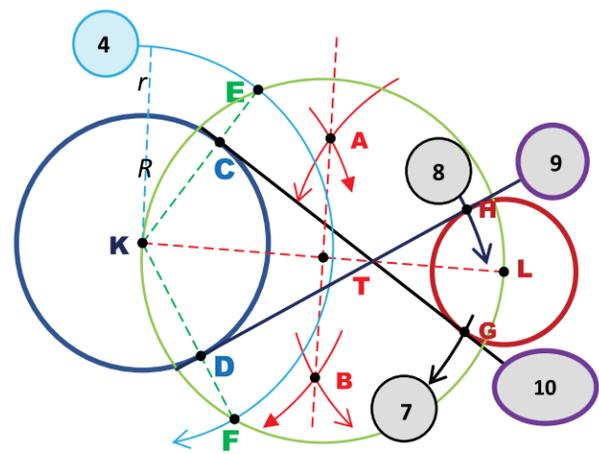
Langkah-langkahnya silahkan memperhatikan urutan nomor di dalam persegi kecil.

- Melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran



Agar tidak terlalu menyulitkan, maka cara melukis garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran berikut ini terbagi menjadi 2 bagian.

Bagian 1, terdiri dari 3 langkah, melukis titik tengah KL

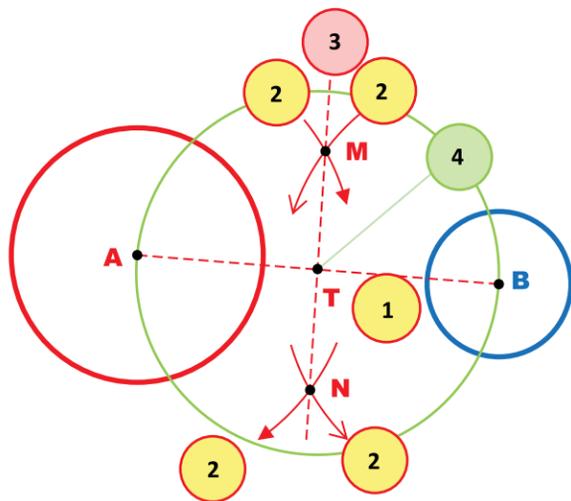


Bagian 2, terdiri dari langkah ke-4 sampai dengan ke-10

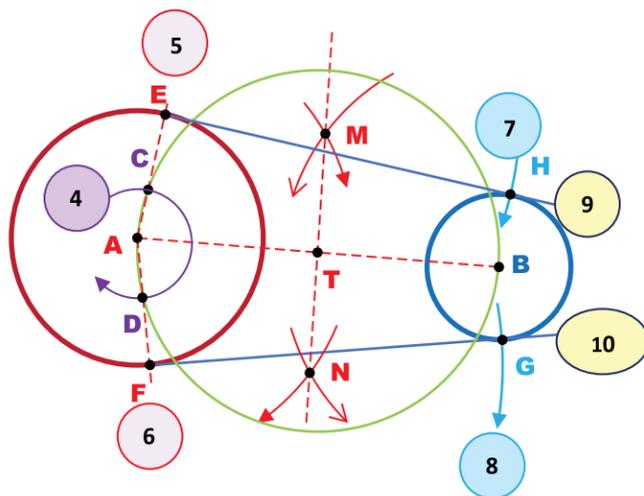
Langkah-langkahnya silahkan memperhatikan urutan nomor di dalam lingkaran kecil.

• **Melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran**

Agar tidak terlalu menyulitkan, maka cara melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran berikut ini terbagi menjadi 2 bagian.



Bagian 1, terdiri dari 3 langkah, melukis titik tengah KL



Bagian 2, terdiri dari langkah ke-4 sampai dengan ke-10

Langkah-langkahnya silahkan memperhatikan urutan nomor di dalam lingkaran kecil.

Saran Referensi

Untuk menambah wawasan dalam pemahaman terkait Modul 4 yang meliputi materi **Lingkaran dan Garis Singgung Lingkaran**, maka diharapkan mencari sumber lain atau referensi. Saran referensi untuk mendukung penambahan wawasan tersebut adalah sebagai berikut:

1. Judul Buku: “Ensiklopedia Matematika Terapan”, Karya Sue Thomshon dan Ian Fortster, dengan judul tema terjemahan:
 - a. Matematika dalam Masyarakat
 - b. Matematika dalam Olahraga
 - c. Matematika dalam Lingkungan
 - d. Matematika dalam Tempat Kerja
 - e. Matematika dalam Makanan
 - f. Matematika dalam Rancang Bangun
 - g. Matematika dalam Televisi
 - h. Matematika dalam Sains
 - i. Matematika dalam Teknologi
 - j. Matematika dalam Perjalanan
 - k. Matematika dalam Rumah
 - l. Matematika dalam Tubuh
2. Judul Buku: “Tingkatkan Kemampuan Otak Anda (*Improve Your Brain Power*)”, Karya Jackie Guthrie dan Tim Preston
3. Judul Buku: “Referensi Matematika dalam Kehidupan Manusia”, Karya Dr. Wahyudin dan Drs. Sudrajat, M.Pd.
4. Judul Buku: “Menyelamatkan Lingkungan Hidup”, Karya Adrian R. Nugraha
5. Sumber media internet (melalui *browsing*: lingkaran penerapannya dalam kehidupan sehari-hari)



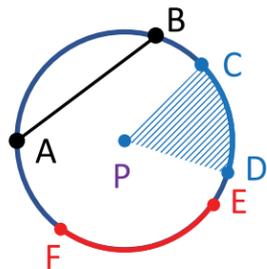
Penilaian Akhir Modul

I. Pilihlah jawaban yang Anda anggap benar dengan cara memberi tanda silang pada huruf A, B, C, atau D!

1. Titik A pada lingkaran P diketahui $AP = 20$ cm. Panjang diameter lingkaran tersebut adalah ...
 - A. 10 cm
 - B. 20 cm
 - C. 40 cm
 - D. 400 cm

2. Berapa keliling lingkaran yang luasnya 3850 cm².
 - A. 220 cm
 - B. 110 cm
 - C. 70 cm
 - D. 35 cm

3. Perhatikan gambar lingkaran berikut.



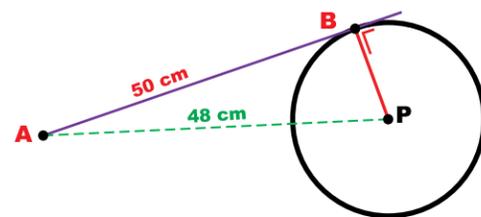
Juring pada gambar di atas adalah ...

- A. garis AB
- B. garis lengkung EF
- C. bangun CPD
- D. garis lengkung CD

4. Titik A dan B pada lingkaran P, $\angle APB = 20^\circ$ dan panjang busur $AB = 7$ cm. Keliling lingkaran P = ...
 - A. 154 cm
 - B. 140 cm
 - C. 126 cm
 - D. 44 cm
5. Titik A, B, C, dan D pada lingkaran P, $\angle APB = 20^\circ$, $\angle CPD = 50^\circ$, dan panjang busur $AB = 30$ cm. Panjang busur CD = ...
 - A. 60 cm
 - B. 75 cm
 - C. 80 cm
 - D. 100 cm
6. Titik A, B, C, dan D pada lingkaran P, $\angle APB = 40^\circ$, $\angle CPD = 50^\circ$, dan luas juring APB = 60 cm². Luas juring CPD = ...
 - A. 70 cm²
 - B. 75 cm²
 - C. 80 cm²
 - D. 100 cm²
7. Pak Budi ingin membuat hiasan di pasar malam berbahan dasar kayu berbentuk lingkaran yang luasnya 3850 cm². Di tepian lingkaran tersebut diberi hiasan pita. Bila Pak Budi membuat 10 hiasan, berapa meter sekurang-kurangnya panjang pita yang diperlukan?
 - A. 22 meter
 - B. 25 meter
 - C. 31 meter
 - D. 32 meter

8. Sebuah lingkaran berdiameter 16 cm, titik A terletak 25 cm dari pusat lingkaran. Berapa panjang garis singgung lingkaran dari titik A?
- A. 12 cm
B. 18 cm
C. 22 cm
D. 24 cm

9. Perhatikan gambar lingkaran berikut.



Berapa panjang diameter lingkaran tersebut?

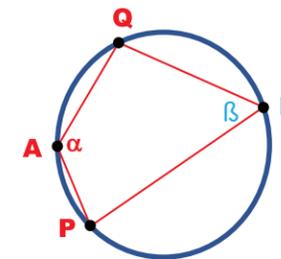
- A. 7 cm
B. 14 cm
C. 21 cm
D. 28 cm

10. Diameter sebuah lingkaran adalah 21 cm. Berapa besar busur pada lingkaran tersebut yang menghadap sudut pusat 135° ?
- A. 12,375 cm
B. 12,500 cm
C. 13,275 cm
D. 13,500 cm

11. Diameter sebuah lingkaran adalah 40 cm. Berapa luas juring lingkaran tersebut yang dibatasi jari-jari dan busur dengan sudut pusat 45° ?
- A. 628 cm^2
B. 314 cm^2
C. 157 cm^2
D. $78,5 \text{ cm}^2$

12. Jari-jari ban sebuah sepeda adalah 21 cm. Sepeda tersebut berjalan sejauh 132 meter. Berapa kali ban sepeda tersebut berputar?
- A. 50 kali
B. 100 kali
C. 200 kali
D. 420 kali

13. Perhatikan gambar lingkaran berikut.



Diketahui bahwa selisih besar $\angle PAQ$ dan $\angle PBQ$ adalah 68° . Nilai $\alpha = \dots$

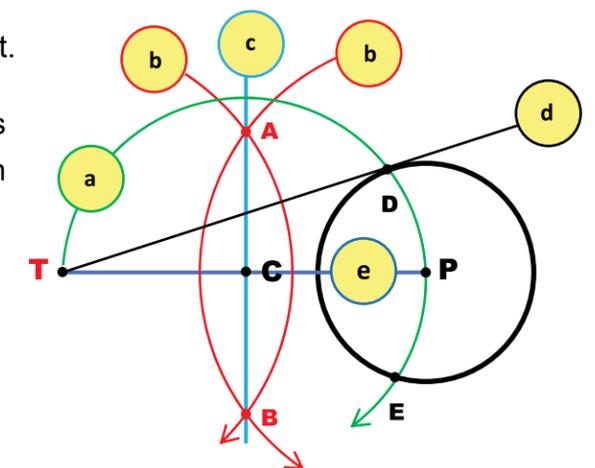
- A. 112°
B. 129°
C. 136°
D. 158°

14. Titik A dan B terletak pada lingkaran P yang berdiameter 8 cm. Q pada tali busur AB sedemikian hingga PQ adalah apotema lingkaran tersebut. Berapa panjang PQ bila diameter lingkaran P adalah 8 cm dan $\angle APB = 45^\circ$?
- A. 2 cm
B. $2\sqrt{2}$ cm
C. 4 cm
D. $4\sqrt{2}$ cm

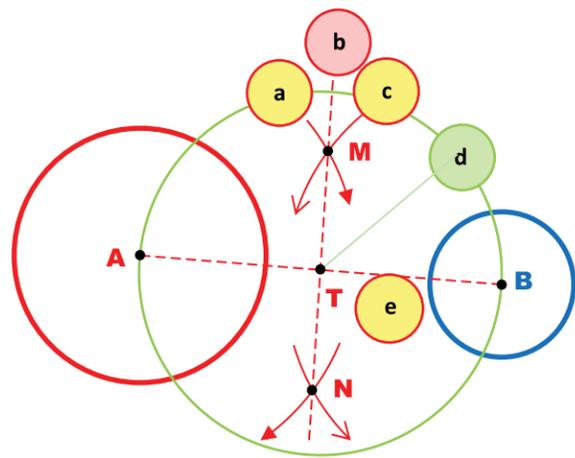
15. Perhatikan lukisan garis singgung berikut.

Berdasarkan urutan langkah melukis garis singgung lingkaran P dari titik T, urutan yang benar adalah \dots

- A. e-d-a-b-c
B. a-b-c-d-e
C. e-a-c-b-d
D. e-b-c-a-d



16. Perhatikan lukisan garis singgung berikut.



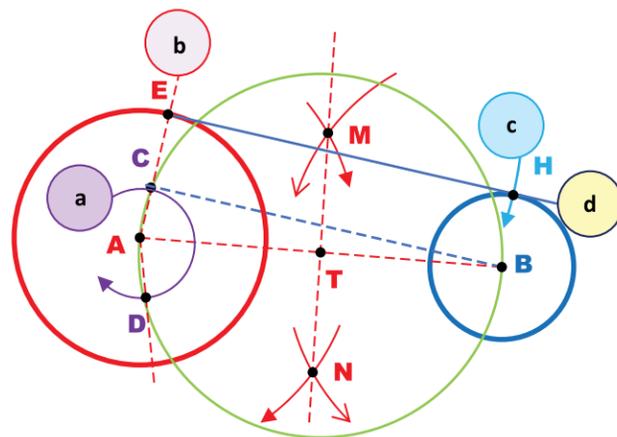
Bila kita akan melukis garis singgung persekutuan luar dua lingkaran A dan lingkaran B atau garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran A dan lingkaran B maka dilukis terlebih dahulu lingkaran berpusat di pertengahan ruas garis AB, urutan yang benar adalah

- A. a-b-c-e-d
- B. b-a-c-e-d
- C. e-b-c-d-a
- D. e-a-c-b-d

17. Jari-jari lingkaran P dan lingkaran Q berturut-turut adalah 15 cm dan 9 cm. Jarak kedua pusat lingkaran 40 cm, Panjang garis singgung persekutuan luar dari dua lingkaran tersebut adalah . . .

- A. 16 cm
- B. 24 cm
- C. 32 cm
- D. 64 cm

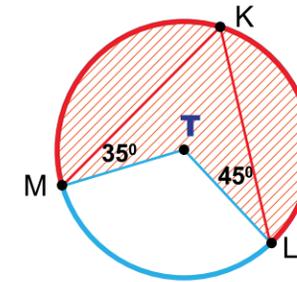
18. Perhatikan lukisan garis singgung persekutuan 2 lingkaran berikut.



Berdasarkan urutan langkah melukis, setelah melukis lingkaran berpusat di pertengahan AB kemudian akan melukis garis singgung persekutuan luarnya, urutan yang benar adalah

- A. a-b-c-d
- B. b-a-c-d
- C. c-b-d-d
- D. a-d-c-b

19. Perhatikan gambar berikut.



Jari-jari lingkaran T = 30 cm, hitung daerah yang diarsir pada gambar tersebut.

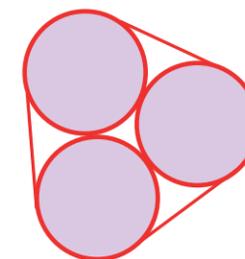
- A. 6280 cm²
- B. 3140 cm²
- C. 1570 cm²
- D. 625 cm²

20. Panjang garis singgung persekutuan dalam 2 lingkaran adalah 60 cm. Jari-jari lingkaran besar 36 cm dan jarak kedua pusat lingkaran tersebut 65 cm. Panjang jari-jari lingkaran kecil adalah

- A. 10 cm
- B. 11 cm
- C. 15 cm
- D. 22 cm

II. Kerjakan sebagaimana mestinya.

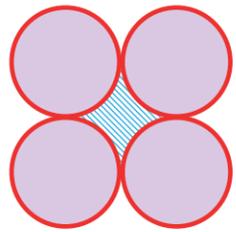
1. Perhatikan gambar berikut.



Berapa sekurang-kurangnya panjang tali ikatan tiga pralon yang berdiameter 10 cm seperti tampak pada gambar.

2. Dalam rangka promosi Pasar Malam, pihak panitia menyelenggarakan karnaval sepeda hias. Pak Badu, pemilik stan pakaian anak, menghias 2 sepeda anaknya. Pada ban sepeda seluruh jeruji ditutup kertas warna-warni. Keliling ban sepeda Pak Badu berdasarkan pengukuran adalah 110 cm. Berapa sekurang-kurangnya kertas hias yang dibutuhkan Pak Badu untuk kedua sepedanya?

3. Perhatikan gambar berikut.



Jari-jari ke-empat lingkaran di atas adalah 10 cm. Hitung luas daerah yang diarsir.

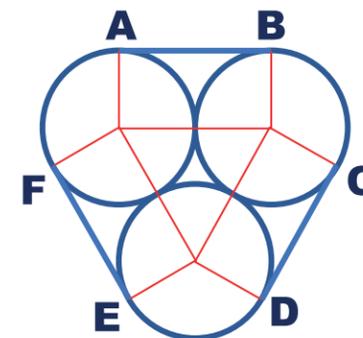
4. Lukislah garis singgung lingkaran A dari titik M yang berjarak 6,5 cm dari pusat lingkaran, bila jari-jari lingkaran tersebut 2,5 cm. Tulis pula langkah-langkah melukis.
5. Panjang garis singgung persekutuan luar 2 lingkaran adalah 60 cm. Jari-jari lingkaran besar 20 cm dan jari-jari lingkaran kecil 9 cm. Hitung jarak kedua pusat lingkaran tersebut.

Kunci Jawaban, Rubrik Penilaian, dan Pembahasan

Kunci Soal Latihan Modul 4 Unit 1



- 1) $K = 132 \text{ cm}$ dan $L = 1386 \text{ cm}^2$.
- 2) $K = 78,5 \text{ cm}$ dan $L = 490,625 \text{ cm}^2$.
- 3) $K = 2 \pi r \Leftrightarrow 44 = 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot r \Leftrightarrow r = 44 \times \frac{7}{22 \times 2} = 7$
 $L = \pi r^2 \Leftrightarrow L = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 154 \text{ cm}^2$.
- 4) $L = \pi r^2 \Leftrightarrow 314 = 3,14 \times r^2 \Leftrightarrow 314 = 3,14 \times r^2 \Leftrightarrow r^2 = 314 : 3,14 = 100 \Leftrightarrow r = 10$
 $K = 2\pi r \Leftrightarrow K = 2 \cdot 3,14 \times 10 \Leftrightarrow K = 62,8 \text{ cm}$
- 5) Panjang busur AB = 50 cm.
- 6) Luas juring RAS = 28 cm².
- 7) $K_{\text{ban}} = 2\pi r \Leftrightarrow K = 2 \cdot 3,14 \times 20 \Leftrightarrow K = 125,6 \text{ cm}$
 $K_{\text{arena}} = 2\pi r \Leftrightarrow K = 2 \cdot 3,14 \times 10 \Leftrightarrow K = 62,8 \text{ m}$
 Ban berputar = $3 \times 62,8 \text{ m} : 125,8 \text{ cm} = 3 \times 6280 \text{ cm} : 125,8 \text{ cm}$
 = 150 kali
- 8) Lihat penampang drum berikut



$$\begin{aligned} \cap AF = \cap BC = \cap DE &= \frac{120}{360} \times K_{\text{lingkaran}} \\ &= \frac{1}{3} \times 2\pi r \end{aligned}$$

$$AB = CD = EF = 2r$$

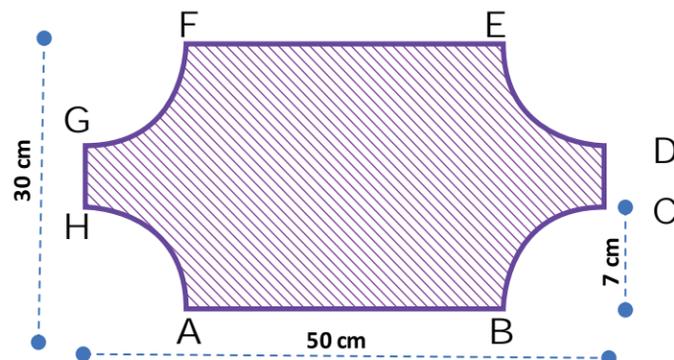
$$\text{Panjang 1 lilitan} = \cap AF + AB + \cap BC + CD + \cap DE + EF$$

$$\Leftrightarrow \text{Panjang 1 lilitan} = \cap AF + \cap BC + \cap DE + AB + CD + EF$$

$$\Leftrightarrow \text{Panjang 1 lilitan} = \frac{1}{3} \times 2\pi r + \frac{1}{3} \times 2\pi r + \frac{1}{3} \times 2\pi r + 2r + 2r + 2r$$

$$\Leftrightarrow \text{Panjang 1 lilitan} = 1 \times 2\pi r + 6r = 2 \times \frac{22}{7} \times 35 + 6 \times 35 = 220 + 210 = 430$$

9) Panjang 3 lilitan = $3 \times 430 = 1290$ cm. Lihat gambar.



$$r = 7 \text{ cm}, p = 50 \text{ cm}, \ell = 30 \text{ cm}$$

$$AB = EF = (50 - 14) \text{ cm} = 36 \text{ cm}, CD = GH = 16 \text{ cm}.$$

$$\text{Kel} = AB + \cap BC + CD + \cap DE + EF + \cap FG + GH + \cap AH$$

$$\Leftrightarrow \text{Kel} = 36 + \frac{1}{4} \times K_{\text{lingk}} + 16 + \frac{1}{4} \times K_{\text{lingk}} + 36 + \frac{1}{4} \times K_{\text{lingk}} + 16 + \frac{1}{4} \times K_{\text{lingk}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Kel} = 104 + K_{\text{lingk}} = 104 + 2\pi r = 104 + 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 104 + 44$$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling bangun} = 148 \text{ cm}$$

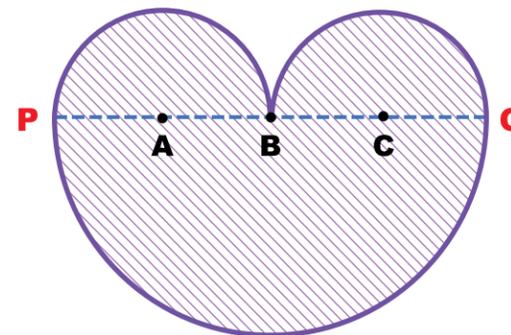
$$\text{Luas bangun} = L \text{ persegi panjang} - 4 \times \frac{1}{4} \times L_{\text{lingkaran}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = p \times l - 1 \times \pi r^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = 50 \times 30 - 1 \times \frac{22}{7} \times 7^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = 1500 - 154 = 1346 \text{ cm}^2.$$

10) Perhatikan gambar.



Ada $\frac{1}{2}$ daerah lingkaran besar B, dengan jari-jari (R) = 20 cm dan $\frac{1}{2}$ daerah lingkaran kecil A dan C dengan jari-jari (r) = 10 cm.

$$\text{Luas bangun} = L_{\frac{1}{2} \text{ daerah lingkaran B}} + L_{\frac{1}{2} \text{ daerah lingkaran A}} + L_{\frac{1}{2} \text{ daerah lingkaran C}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = \frac{1}{2} \pi R^2 + \frac{1}{2} \pi r^2 + \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 10^2 + \frac{1}{2} \cdot 3,14 \cdot 10^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = 628 + 157 + 157 = 942 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Keliling bangun} = K_{\frac{1}{2} \text{ lingkaran B}} + K_{\frac{1}{2} \text{ lingkaran A}} + K_{\frac{1}{2} \text{ lingkaran C}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling bangun} = \frac{1}{2} \times 2\pi R + \frac{1}{2} \times 2\pi r + \frac{1}{2} \times 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling bangun} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3,14 \times 20 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3,14 \times 10 + \frac{1}{2} \times 2 \times 3,14 \times 10$$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling bangun} = 62,8 \times 20 + 31,4 + 31,4 = 125,6 \text{ cm}$$

11) Jari-jari lingkaran A = 20 cm dan jari-jari lingkaran B = 30 cm.

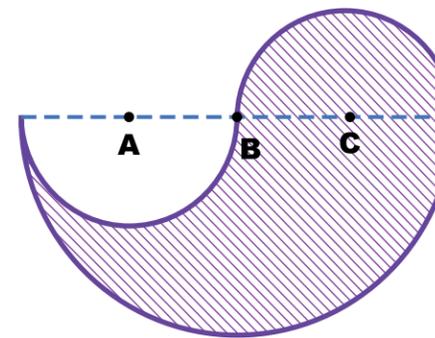
$$\text{a). } r_{\text{lingkaran A}} : r_{\text{lingkaran B}} = 20 : 30 = 2 : 3$$

$$\text{b). } d_{\text{lingkaran A}} : d_{\text{lingkaran B}} = 40 : 60 = 2 : 3$$

$$\text{c). } K_{\text{lingkaran A}} : K_{\text{lingkaran B}} = 2 \times 3,14 \times 20 : 2 \times 3,14 \times 30 = 2 : 3$$

$$\text{d). } L_{\text{lingkaran A}} : L_{\text{lingkaran B}} = 3,14 \cdot 20^2 : 3,14 \cdot 30^2 = 4 : 9$$

12) Perhatikan rangkaian juring lingkaran berikut.



Gambar di atas A, B, dan C adalah pusat lingkaran. Hitung luas dan keliling bangun yang diarsir, bila AC = 14 cm,

Ada $\frac{1}{2}$ daerah lingkaran besar B, dengan jari-jari 14 cm dan $\frac{1}{2}$ daerah lingkaran kecil A dan C dengan jari-jari 7 cm.

$$\text{Luas bangun} = L_{\frac{1}{2} \text{ daerah lingkaran B}} + L_{\frac{1}{2} \text{ daerah lingkaran A}} - L_{\frac{1}{2} \text{ daerah lingkaran C}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = \frac{1}{2} \pi R^2 + \frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi r^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 14^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 7^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{7} \cdot 7^2$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas bangun} = 308 + 0 = 308 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Keliling bangun} = \frac{1}{2} \times 2\pi R + \frac{1}{2} \times 2\pi r + \frac{1}{2} \times 2\pi r$$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling bangun} = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 14 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7 + \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling bangun} = 44 + 22 + 22 = 88 \text{ cm}$$

13) Diameter lingkaran besar 180 cm maka $R = 90$ cm dan

diameter lingkaran kecil 20 cm maka $r = 10$ cm.

$$\text{Luas daerah yang diarsir} = L_{\text{daerah lingkaran besar}} - L_{\text{daerah lingkaran kecil}}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas daerah yang diarsir} = \pi R^2 - \pi r^2.$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas daerah yang diarsir} = 3,14 \cdot 90^2 - 3,14 \cdot 10^2.$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas daerah yang diarsir} = 3,14 \cdot (90^2 - 10^2) = 3,14 \cdot (8.100 - 100)$$

$$\text{Luas daerah yang diarsir} = 3,14 \times 8.000 = 25.120 \text{ cm}^2.$$

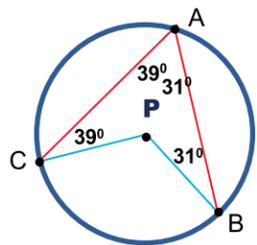


Kunci Soal Latihan Modul 4 Unit 2

1) Silahkan dikerjakan dan mintalah pendapat Tutor.

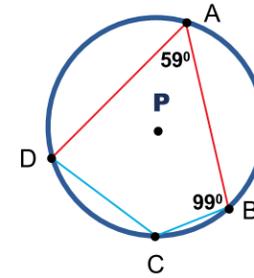
Hasil pengukuran semakin mendekati hasil perhitungan adalah hasil pengukuran yang baik.

2) Perhatikan gambar berikut.



$$\angle BAC = 70^\circ. \text{ Jadi } \angle BPC = 2 \times \angle BAC = 140^\circ.$$

3) Perhatikan gambar berikut.



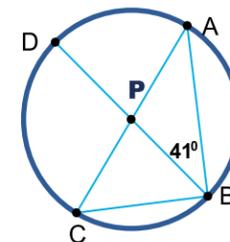
$$\angle ADC + \angle ABC = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ADC + 99^\circ = 180^\circ.$$

$$\Leftrightarrow \angle ADC + 99^\circ - 99^\circ = 180^\circ - 99^\circ \Leftrightarrow \angle ADC = 81^\circ.$$

4) Ban tersebut berputar = $7,7 \text{ km} : K_{\text{lingkaran}} = 770.000 \text{ cm} : \pi r$

$$= 770000 : \frac{22}{7} \times 49 = 770.000 : 154 = 5.000 \text{ kali}$$

5) Perhatikan gambar berikut.



$$\angle PAB = \angle PBA = 41^\circ (\triangle APB \text{ sama kaki}),$$

$$\angle ABC = 90^\circ (\text{di depan diameter}),$$

$$\angle ACB + \angle CAB + \angle ABC = 180^\circ \Leftrightarrow \angle ACB + 41^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle ACB = 180^\circ - 41^\circ - 90^\circ = 49^\circ$$

6) $L = 616 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow \pi r^2 = 616 \Leftrightarrow r^2 = 616 : \pi \Leftrightarrow r^2 = 616 :$

$$\Leftrightarrow r^2 = 196 \Leftrightarrow r = 14 \text{ atau } d = 28$$

Ukuran plastik $300 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$., lingkaran utuhnya $p = 300 : 28 = 10$ dan lebar $60 : 28 = 2$.

Jadi lingkaran utuhnya $10 \times 2 = 20$ lingkaran utuh.

7) 20 cm.

8) 24 cm.

9) 17 cm.

10) Lihat contoh melukis pada modul..

11) Panjang tali = $K \text{ lingkaran} + 2r + 4r + 2r + 4r$

$$\text{Panjang tali} = \pi d + 12r = \pi d + 6d$$

$$\text{Panjang tali} = 3,14 \times 5 + 6 \times 5 = 15,7 + 30 = 45,7 \text{ inci} = 116,078 \text{ cm}$$



Kunci dan Rubrik Penilaian Akhir Modul 4

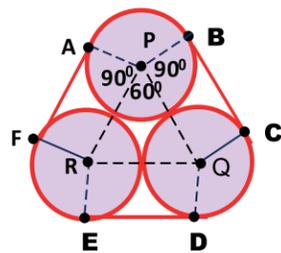
Pilihan Ganda

No	Jawaban	No	Jawaban
1	C	11	C
2	A	12	B
3	C	13	B
4	C	14	A
5	B	15	D
6	B	16	D
7	A	17	C
8	D	18	A
9	D	19	C
10	A	20	B

tiap jawaban benar skor 3

Kunci Jawaban Soal Uraian

1) Perhatikan gambar berikut.



Garis pertolongan skor 2

Jawab : P, Q, dan R adalah pusat lingkaran, $d = 10$ cm, $r = 5$ cm

$\angle APB = \angle APB = \angle APB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 120^\circ$... skor 1

Panjang tali = $\cap AB + BC + \cap CD + DE + \cap EF + FA$... skor 2

Panjang tali = $3 \times \cap AB + 3 \times BC$

Panjang tali = $3 \times 2\pi r + 3 \times 2r$ skor 1

Panjang tali = $2 \cdot 3,14 \cdot 5 + 3 \times 2 \cdot 5$

= $31,4 + 30 = 61,4$ skor 1

Panjang tali sekurang-kurangnya 61,4 cm. skor 1

2) Jawab : Lingkaran, $K = 110$ cm

Dua sepeda, ada 4 lingkaran

$K = 2\pi r$ skor 1

$\Leftrightarrow 110 = 2 \cdot r$

$\Leftrightarrow 2 \cdot r = 110$

$\Leftrightarrow r = 110 \div 2$

$\Leftrightarrow r = 110 \div 2 = 55$ skor 2

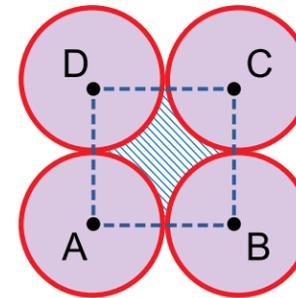
Kertas hias yang dibutuhkan = $4 \times L_{\text{lingkaran}}$ skor 1

Kertas hias yang dibutuhkan = $4 \times \pi r^2$ skor 1

= $4 \times \pi \times 55^2 = 3850$ skor 2

Kertas hias yang dibutuhkan sekurang-kurangnya 3850 cm². skor 1

3) Perhatikan gambar "garis pertolongan" berikut.



Jawab: A, B, C, dan D adalah pusat lingkaran skor 2

$r = 10$ cm. Sisi persegi ABCD = $s = 2r = 20$ cm skor 1

Luas daerah yang diarsir = $L_{\text{persegi ABCD}} - 4 L_{\text{juring}}$ skor 2

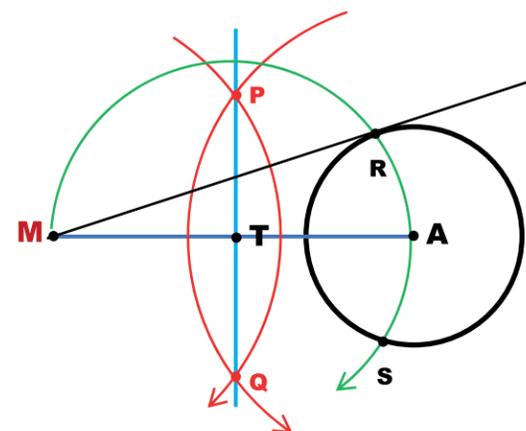
= $s^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot r^2$ skor 1

= $20 \times 20 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3,14 \cdot 10 \cdot 10$

= $400 - 314 = 86$ skor 1

Jadi Luas daerah yang diarsir = 86 cm². skor 1

4) Lukisan garis singgung lingkaran A dari titik M.



Langkah-langkah melukis:

✓ Lukis lingkaran A dengan jari-jari 2,5 cm. skor 1

✓ Tentukan M berjarak 6,5 cm dari A, hubungkan M dan A. skor 1

✓ Jangkakan dari A dan M dengan jari-jari yang sama sedemikian hingga kedua busur berpotongan di P dan Q. skor 1

- ✓ Hubungkan P dan Q sehingga memotong AM di T, AT = TM skor 2
- ✓ Jangkakan dari T dengan jari-jari AT sehingga memotong lingkaran A di R dan S skor 1
- ✓ Hubungkan M dengan R, MR garis singgung lingkaran A terlukis. skor 1
- ✓ Hubungkan M dengan R, MR garis singgung lingkaran A terlukis. skor 1

5) Jawab : Dua lingkaran

$R = 20 \text{ cm}, r = 9 \text{ cm}, \text{ dan } g_{\text{luar}} = 60 \text{ cm. skor 1}$

$g_i^2 = j^{2-2} \text{ skor 1}$

$\Leftrightarrow 60^2 = j^{2-2} \text{ skor 1}$

$\Leftrightarrow 3600 = j^2 - 121$

$\Leftrightarrow j^2 - 121 = 3600 \text{ skor 1}$

$\Leftrightarrow j^2 - 121 + 121 = 3600 + 121$

$\Leftrightarrow j^2 = 3721 \text{ skor 1}$

$\Leftrightarrow j = \text{ skor 1}$

$\Leftrightarrow j = 61 \text{ skor 1}$

Jarak kedua pusat lingkaran 61 cm..... skor 1

Kriteria Pindah / Lulus Modul

Kriteria pindah/lulus modul peserta didik setelah memenuhi syarat berikut.

1. Menyelesaikan seluruh materi pembelajaran;
2. Mengerjakan seluruh latihan soal/penugasan;
3. Mendapat nilai ketuntasan belajar ≥ 75 dari penilaian akhir modul;
4. Apabila nilai masih di bawah kriteria ketuntasan belajar maka dilakukan remedial
5. Bagi peserta didik yang nilai penilaian akhir modul ≥ 75 , maka bisa melanjutkan ke modul selanjutnya

Berdasarkan hasil analisis penilaian akhir modul, peserta didik yang belum mencapai ketuntasan belajar diberi kegiatan pembelajaran remedial dalam bentuk;

1. bimbingan perorangan jika peserta didik yang belum tuntas $\leq 20\%$;
2. belajar kelompok jika peserta didik yang belum tuntas antara 20% dan 50% ; dan
3. pembelajaran ulang jika peserta didik yang belum tuntas $\geq 50\%$.

Guru memberikan remedial kepada peserta didik yang belum mencapai kompetensi dasar. Berikut alternatif *remedial teaching* yang bisa diberikan.

1. Guru membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam membandingkan, menentukan, dan menyelesaikan yang berkaitan dengan konsep lingkaran dengan alat bantu (benda konkrit) dan tanpa alat bantu.
2. Guru membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menentukan, melakukan, dan menyelesaikan masalah berkaitan unsur-unsur lingkaran.
3. Guru membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menyatakan dan menyelesaikan masalah keliling dan luas lingkaran.

Nilai Akhir = Jumlah Perolehan Skor Soal Pilihan Ganda + Uraian

4. Guru membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari terkait keliling dan luas lingkaran.
5. Guru membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan masalah hubungan sudut pusat dan sudut keliling serta hubungan dua sudut pusat, busurnya, dan luas juring pada kedua sudut pusat tersebut.
6. Guru membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menyatakan dan menyelesaikan masalah melukis garis singgung lingkaran.
7. Guru membimbing kembali peserta didik yang masih mengalami kesulitan dalam menyelesaikan masalah sehari-hari terkait garis singgung lingkaran.

Daftar Pustaka

- Negoro, ST. dan B. Harahap. (1999). *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia
- Panduan Penilaian oleh Pendidik dan Satuan Pendidikan untuk Sekolah Menengah Pertama. Direktorat Pembinaan Sekolah Menengah Pertama. Dirjendikdasmen. Kemendikbud
- Kontekstualisasi Kurikulum 2013 Pendidikan Kesetaraan Program Paket B Setara SMP/MTs. Mata Pelajaran Matematika. (2017). Jakarta: Kemendikbud.
- Muatan Kurikulum Mata Pelajaran Matematika, Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah (SMP/MTs.). (2017). Jakarta: Balitbang, Puskurbuk, Kemendikbud..
- Model Silabus Mata Pelajaran Pendidikan Kesetaraan Paket B Setara Sekolah Menengah Pertama/Madrasah Tsanawiyah (SMP/MTs.) Mata Pelajaran Matematika. (2017). Jakarta: Kemendikbud.
- Wahyudin dan Sudrajat,.(2008). *Referensi Matematika dalam Kehidupan Manusia 2*. Bandung: CV. IPA Abong
- Wahyudin dan Sudrajat,.(2008). *Referensi Matematika dalam Kehidupan Manusia 4*. Bandung: CV. IPA Abong
- Watson, Goerge,.(2008). *190 Kegiatan Siap Saji yang Membuat Matematika Menyenangkan*. Bandung: Pakar Raya
- Sulaiman, R.,...[et. al]. -- (2008). *Contextual Teaching and Learning Matematika: Sekolah Menengah Pertama/ Madrasah Tsanawiyah Kelas IX Edisi 4*. Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional,
- Nuharini, Dewi dan Wahyuni, Tri,.(2008). *Matematika Konsep dan Aplikasinya: untuk SMP/MTs Kelas VIII*. Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional
- Rahaju, Endah Budi,...[et. al].— (2008). *Contextual Teaching and Learning Matematika: Sekolah Menengah Pertama/ Madrasah Tsanawiyah Kelas VIII Edisi 4*. Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional

BIODATA PENULIS



Nama : Budi Hardjo
Kelahiran : Klaten, 19 Februari 1956
Jabatan : Praktisi
E-mail : masbud06@yahoo.co.id
Telpon : 087700270703

Pendidikan

- Bachelor of Art Jurusan Civics Hukum
IKIP Veteran-1982
- Strata 1 Jurusan Pendidikan Matematika
UNNES-2007

Pengalaman Akademis

- Guru SMP Negeri 6 Semarang
Dinas Pendidikan Kota Semarang (1977-2016)
- Instruktur Pelatihan Guru SMP/MTs
Dinas Pendidikan Provinsi Jawa Tengah (1993-2012)
- Regular Course : Diagnostic Assessment
Seameo Recsam-Penang Malaysia (1996)
- Tim Pengembang Kurikulum-Pelatihan Guru
Dinas Pendidikan Provinsi Jawa Tengah (1998-2012)
- Pembina Tim OSN Matematika SMP Provinsi Jawa Tengah
Dinas Pendidikan Provinsi Jawa Tengah (2004-2010)
- Pembina Tim Lomolari Provinsi Jawa Tengah
Dinas Pendidikan Provinsi Jawa Tengah (2005-2015)
- Penatar Guru Bina SMP Terbuka Provinsi Jawa Tengah
Dinas Pendidikan Provinsi Jawa Tengah (2006-2012)
- Penatar Tutor Kejar Paket B Provinsi Jawa Tengah
Dinas Pendidikan Provinsi Jawa Tengah (2008-2014)
- Core Team Video Study I dan II
Depdikbud-World Bank (2006-2014)