Rosihan Ari Y.
Indriyastuti

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Khazanah Matematika 2

untuk Kelas XI SMA dan MA
Program Ilmu Pengetahuan Sosial

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Khazanah Matematika 2 untuk Kelas XI SMA dan MA Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Rosihan Ari Y. - Indriyastuti

Khazanah Matematika 2

untuk Kelas XI SMA dan MA

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Rosihan Ari Y.
Indriyastuti

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Khazanah Matematika 2

untuk Kelas XI SMA dan MA

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Penulis : Rosihan Ari Y.
Indriyastuti
Perancang kulit : Agung Wibawanto
Perancang tata letak isi : Agung Wibawanto
Penata letak isi : Bonawan
Ilustrator : Kusdirgo

Preliminary : vi
Halaman isi : 244 hlm.
Ukuran buku : 17,6 x 25 cm

510.07
ROS ROSIHAN Ari Y
k Khazanah Matematika 2 : untuk Kelas XI SMA / MA
Program Ilmu Pengertahuan Sosial / penulis, Rosihan Ari Y, Indriyastuti
; ilustrator, Kusdirgo. -- Jakarta : Pusat Perbukuan,
Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
vi, 244 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 237-238
Indeks
ISBN 978-979-068-858-2 (No. Jil lengkap)
ISBN 978-979-068-860-5
-
1. Matematika Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Indriyastuti III. Kusdirgo

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009

Diperbanyak oleh ....

Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Prakata

Penulis mengucapkan selamat kepada kalian yang telah naik ke kelas XI. Kalian masuk dalam Program Ilmu Pengetahuan Sosial (IPS). Tentunya hal ini menjadi kebanggaan tersendiri. Semoga kalian terpacu untuk lebih semangat lagi dalam belajar. Teruslah rajin belajar, gigih, pantang menyerah, dan jangan lupa berdoa kepada Tuhan agar cita-cita kalian tercapai.

Buku *Khazanah Matematika* ini akan membantu kalian dalam mempelajari matematika. Buku ini disusun dengan urutan penyajian sedemikian rupa sehingga kalian akan merasa senang untuk mendalaminya. Buku ini akan membantu kalian dalam belajar. Dalam pembelajarannya, buku ini menuntut kalian untuk aktif dan bertindak sebagai subjek pembelajaran. Kalian dituntut untuk mengobservasi, mengonstruksi, mengeksplorasi, dan menemukan sendiri konsep-konsep matematika sehingga kalian akan menjadi orang yang dapat berpikir kritis, kreatif, dan inovatif.

Di kelas XI Program IPS ini, kalian akan mempelajari materi-materi berikut:

- Statistika
- Peluang
- Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers
- Limit Fungsi
- Turunan Fungsi

Penulis berharap semoga buku ini dapat membantu kalian dalam mempelajari konsep-konsep matematika. Akhirnya, semoga kalian sukses.

Solo, Februari 2008

Penulis

Daftar Isi

Semester 2

Bab III Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Bab IV Limit Fungsi

Bab V Turunan

Bab I

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat
1. membaca data dalam bentuk diagram garis, diagram batang daun, dan diagram kotak garis;
2. menyatakan data dalam bentuk diagram garis, diagram batang daun, dan diagram kotak garis;
3. membaca data dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram;
4. menyajikan data dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram;
5. menafsirkan kecenderungan data dalam bentuk tabel dan diagram;
6. menentukan ukuran pemusatan data: rataan, median, dan modus;
7. menentukan ukuran letak data: kuartil dan desil;
8. menentukan ukuran penyebaran data: rentang, simpangan kuartil, dan simpangan baku;
9. memeriksa data yang tidak konsisten dalam kelompoknya;
10. memberikan tafsiran terhadap ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran.

Sumber: *Dokumen Penerbit*

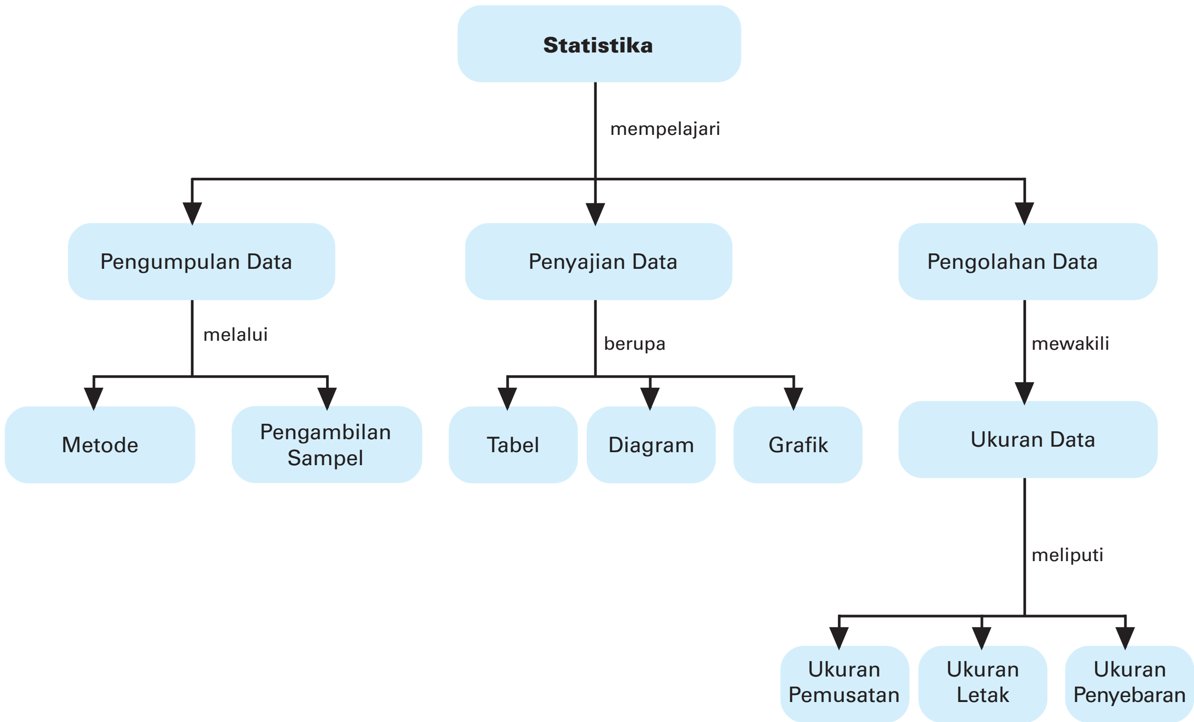
Statistika

Motivasi

Pernahkah kalian memerhatikan salah satu kegiatan ekonomi di suatu pasar, swalayan, mal, atau minimarket? Seorang penjaga stan di tempat-tempat tersebut tentu akan selalu mencatat jumlah barang dagangan yang terjual pada periode tertentu, misalnya setiap sore atau setiap hari sekali.

Kegiatan yang dilakukan oleh penjaga stan ini dapat dikatakan sebagai kegiatan pengumpulan suatu informasi. Dalam hal ini, informasi berupa angka-angka yang menyatakan jumlah penjualan suatu barang. Berawal dari kegiatan seperti ini, kalian dapat mengerti apa arti statistik.

Peta Konsep



Kata Kunci

- data
- datum
- desil
- diagram
- frekuensi
- histogram
- jangkauan
- kuartil
- kumulatif
- langkah
- mean
- median
- modus
- ogif
- pagar
- poligon
- simpangan kuartil
- simpangan rata-rata
- statistik
- statistik deskriptif
- statistika
- tabel distribusi
- *tally*
- varians

Ketika masih duduk di SMP, kalian telah diperkenalkan dengan statistika meskipun masih sangat sederhana. Kalian telah mengenal pengumpulan data, mengurutkan data tunggal, menentukan mean, median, modus, dan kuartil data tunggal, dan menyajikan data dalam bentuk berbagai diagram. Materi-materi yang telah kalian peroleh itu akan kita bahas lebih mendalam, dengan penambahan beberapa materi yang sebelumnya belum kalian peroleh di SMP, seperti kuartil, desil, diagram batang daun, diagram kotak garis, dan pemeriksaan data yang tidak konsisten.

Sebelum mempelajari bab ini, coba jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

Prasyarat

Kerjakan di buku tugas

1. Apa yang dimaksud dengan mean, median, dan modus,? Berapakah mean, median, dan modus dari data: 3, 1, 2, 3, 2, 1, 4, 5, 2, 6?
2. Apa yang dimaksud data tunggal dan data berkelompok? Berikan contohnya.
3. Apakah yang dimaksud diagram garis, diagram batang, dan diagram lingkaran?

Jika pertanyaan-pertanyaan di atas telah terjawab, mudah bagi kalian untuk mempelajari materi berikut. Untuk itu, mari kita mulai materi ini.

A. Statistik dan Statistika

Misalkan dari 8 jenis pakaian yang dijual di swalayan, harganya masing-masing ditampilkan pada tabel berikut.

Jenis Pakaian	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Harga Pakaian (ribuan rupiah)	20	25	27	28	30	45	50	80

Pada tabel di atas tampak bahwa harga pakaian jenis V adalah Rp30.000,00. Dari informasi yang terdapat pada tabel tersebut, angka Rp30.000,00 dinamakan *datum*, sedangkan keseluruhan harga dari 8 jenis pakaian itu dinamakan *data*. Data dapat diperoleh dengan *wawancara*, *kuesioner*, dan *observasi*. Wawancara dilakukan secara langsung dengan narasumber. Kuesioner dilakukan dengan cara menyusun sejumlah pertanyaan dalam suatu daftar, kemudian disebarkan kepada orang yang hendak diambil datanya. Observasi dilakukan dengan melakukan pengamatan terhadap objek atau orang yang akan diambil datanya. Setelah diperoleh data, agar lebih mudah dianalisis, data disederhanakan baik dengan penyusunan, pengelompokan, maupun pembulatan. Dari data di atas juga tampak bahwa harga pakaian termurah (terendah) adalah jenis pakaian I, yaitu Rp20.000,00 dan harga pakaian termahal (tertinggi) adalah jenis pakaian VIII, yaitu Rp80.000,00.

Nilai-nilai harga termahal dan harga termurah dalam kumpulan datum di atas termasuk statistik. Selain nilai terendah dan tertinggi dari suatu data, statistik lainnya adalah *rataan hitung* (*mean*), *nilai tengah* (*median*), *nilai yang sering muncul* (*modus*), dan *kuartil*. Nilai-nilai ini akan kita pelajari pada subbab berikut. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa statistik adalah ukuran-ukuran yang dapat mewakili suatu kumpulan datum. Statistik dapat diperoleh dari hasil perhitungan terhadap data yang ada. Ilmu yang mempelajari tentang metode pengumpulan, perhitungan, pengolahan, cara menganalisis data, serta penarikan suatu kesimpulan dinamakan *statistika*.

B. Membaca dan Menyajikan Data

Seperti yang telah kalian ketahui bahwa data dapat diperoleh melalui wawancara, kuesioner, dan observasi. Data-data itu akan mudah dipahami atau dibaca jika disajikan dalam sajian tertentu. Penyajian data dapat berupa tabel maupun diagram. Sebelum kalian mempelajari bentuk-bentuk penyajian itu, mari terlebih dahulu kita pelajari beberapa statistik deskriptif berikut.

1. Menyajikan Data Ukuran Menjadi Data Statistik Deskriptif

Kalian telah mengetahui pengertian data, datum, statistik, dan statistika. Data awal yang diperoleh baik dengan wawancara, kuesioner, maupun observasi ada yang bersifat *kualitatif* (baik, buruk, sedang) dan ada yang bersifat *kuantitatif* (berupa angka-angka). Data yang bersifat kuantitatif terdiri atas *data cacahan* (*diskret*), dan *data ukuran* (*kontinu*). Misalnya, jumlah siswa kelas XI ada 120 putra dan 90 putri (data diskret), sedangkan waktu yang diperlukan untuk menempuh Kota Baru ke Kota Damai 4,5 jam (data kontinu).

Sekarang mari kita mengingat kembali beberapa ukuran (statistik), di antaranya adalah mean, median, modus, dan kuartil. Di samping itu, kita juga akan mengenal statistik lima serangkai, desil, jangkauan data, dan jangkauan antarkuartil.

a. Rataan Hitung (Mean)

Untuk memahami rataan hitung, perhatikan ilustrasi berikut ini. Misalkan nilai Matematika Dina 8 dan nilai Matematika Andi 10. Nilai rata-rata mereka dapat dicari dengan cara $\frac{8 + 10}{2} = 9$.

Misalkan nilai Matematika Dina 8, Andi 10, dan Damar 6. Nilai rata-rata mereka dapat dicari dengan cara $\frac{8 + 10 + 6}{3} = 8$.

Misalkan nilai matematika siswa pertama x_1, siswa kedua x_2, siswa ketiga x_3, ... dan siswa ke-n x_n. Dapatkah kalian menentukan nilai rata-rata mereka? Tentu, nilai rata-rata mereka adalah $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$.

Dengan demikian, dapat dikatakan sebagai berikut.

Misalkan suatu data terdiri atas n datum, yaitu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Jika $\overline{x}$ menyatakan rataan hitung (mean) data tersebut maka rumusan untuk $\overline{x}$ adalah

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$

Simbol $\overline{x}$ dibaca "*x* bar."

Jika $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$ dinyatakan dalam notasi sigma, dapat ditulis $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Dengan demikian, $\overline{x}$ dapat ditulis dengan

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ atau } \overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ dibaca "sigma x_i, untuk $i = 1$ sampai n."

b. Nilai Tengah (Median)

Perhatikan data berikut.

4, 3, 5, 5, 6, 7, 8, 7, 9

Data tersebut jika diurutkan dari terkecil hingga terbesar, tampak sebagai berikut.

3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 9

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Nilai rata-rata ulangan kelas A adalah $\overline{x}_A$ dan kelas B adalah $\overline{x}_B$. Setelah kedua kelas itu digabung, nilai rata-ratanya adalah $\overline{x}$. Jika $\overline{x}_A : \overline{x}_B = 10 : 9$ dan $\overline{x} : \overline{x}_B = 85 : 81$, perbandingan banyaknya siswa di kelas A dan B adalah ....

a. 8 : 9
b. 4 : 5
c. 3 : 4
d. 3 : 5
e. 9 : 10

Setelah data terurut, kita dapat menyatakan korespondensi berikut.

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & 7 & 7 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array}$$

Dari data terurut di atas, datum yang terletak di tengah-tengah data adalah datum ke-5 atau $x_5 = 6$. Nilai inilah yang disebut median atau nilai tengah. Secara umum, misalkan diberikan suatu data terdiri atas n datum, yaitu $x_1, x_2, x_3, ...\ x_n$, dengan $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$. Nilai tengah (median) data tersebut dapat ditentukan dengan cara berikut.

1) Jika n ganjil, median data itu adalah datum ke-$\frac{n+1}{2}$, yaitu

$$\text{median} = x_{\frac{n+1}{2}}$$

2) Jika n genap, median data itu adalah nilai tengah antara datum ke-$\frac{n}{2}$ dan datum ke-$\left(\frac{n}{2}+1\right)$, yaitu

$$\text{median} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$$

c. Nilai yang Sering Muncul (Modus)

Kalian tentu masih ingat dengan modus. Di SMP kalian sudah mempelajarinya. Sekarang kalian hanya memperdalam. Sebelum mempelajarinya lebih lanjut, coba kerjakan tugas berikut.

Mari Berdiskusi

Investigasi

Carilah data tinggi badan teman-teman sekelasmu (dalam cm). Kemudian, buatlah tabel seperti di bawah ini. Selanjutnya, masukkan data yang kamu peroleh ke dalam tabel tersebut.

Tinggi Badan	Jumlah Siswa
150	...
...	...
...	...
...	...
...	...

Dari data di atas, tentukan tinggi badan siswa yang mempunyai jumlah paling banyak?

Setelah berdiskusi dengan teman-temanmu, tentu kalian dapat menentukan data manakah yang sering muncul. Agar lebih jelas lagi, coba pahami contoh kasus nilai ulangan Nina berikut.

Dalam suatu semester, nilai ulangan harian Matematika yang diperoleh Nina adalah 6, 8, 8, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 8, 10, dan 10. Dari nilai ulangan harian Matematika itu, ternyata Nina mendapat

nilai 6 sebanyak 3 kali;
nilai 7 sebanyak 1 kali;
nilai 8 sebanyak 5 kali;
nilai 9 sebanyak 1 kali;
nilai 10 sebanyak 2 kali.

Dari nilai ulangan itu, tingkat kekerapan muncul (frekuensi) tertingginya adalah nilai 8, yaitu sebanyak 5 kali. Jadi, nilai modus data di atas adalah 8. Jadi, modus dapat diartikan sebagai nilai datum yang memiliki frekuensi tertinggi dari suatu data. Data yang memiliki dua modus disebut *bimodal* dan data yang memiliki lebih dari dua modus disebut *multimodal*.

Contoh:

Diketahui data pengukuran berat badan 10 siswa kelas XI IPS adalah sebagai berikut (dalam kg).

45, 50, 50, 51, 55, 48, 50, 49, 44, 55

Tentukan mean, median, dan modus dari data pengukuran berat badan tersebut.

Jawab:

Untuk mempermudah mencari nilai median, terlebih dahulu data tersebut diurutkan dari yang mempunyai nilai terkecil ke terbesar seperti berikut.

$$\begin{array}{cccccccccc} 44, & 45, & 48, & 49, & 50, & 50, & 50, & 51, & 55, & 55 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array}$$

Setelah data terurut, kita dapat menentukan mean, median, dan modus data itu dengan mudah.

1) mean

$$\bar{x} = \frac{44 + 45 + 48 + 49 + 50 + 50 + 50 + 51 + 55 + 55}{10}$$

$$= 49{,}7 \text{ kg}$$

2) Karena n = 10 (genap), berarti mediannya merupakan rataan hitung dari datum ke-5 dan ke-6 dari data terurut, yaitu $x_5 = 50$ dan $x_6 = 50$.

Jadi, median = $\frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{50 + 50}{2}$ = 50 kg.

3) Karena datum yang memiliki frekuensi tertinggi adalah 50 kg (muncul 3 kali) maka modus data itu adalah 50 kg.

Tantangan

Penalaran

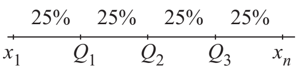
• Kerjakan di buku tugas

Agus telah berulangkali mengikuti ulangan. Jika Agus mendapat nilai 71 pada ulangan yang akan datang, rata-rata ulangannya adalah 83, sedangkan jika mendapat 96, rata-ratanya adalah 88. Berapa kali ulangan yang telah ditempuh oleh Agus?

Lomba Matematika
Nasional UGM 2006

d. Kuartil

Misalkan terdapat data $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, dengan $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$. Jika kuartil pertama (kuartil bawah) Q_1, kuartil kedua (kuartil tengah) Q_2, dan kuartil ketiga (kuartil atas) Q_3 maka letak dari Q_1, Q_2, dan Q_3 dapat diilustrasikan pada gambar di samping. Kuartil membagi data menjadi 4 bagian sama banyak.



Gambar 1.1

Banyak datum dari suatu data adalah 100%. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa
1) banyak datum yang kurang dari atau sama dengan Q_1 adalah 25%;
2) banyak datum yang kurang dari atau sama dengan Q_2 adalah 50%;
3) banyak datum yang kurang dari atau sama dengan Q_3 adalah 75%.

Tugas: Berpikir Kritis

• Kerjakan di buku tugas

Bagaimana menentukan kuartil bawah, tengah, dan atas jika suatu data terdiri atas tiga datum atau dua datum? Dapatkah ditentukan? Berikan alasanmu.

Meskipun demikian, nilai-nilai Q_1, Q_2, maupun Q_3 tidak harus tepat berada pada suatu datum tertentu, tetapi boleh berada di antara 2 datum.

Letak kuartil ke-i, Q_i, untuk $i = 1, 2, 3$, dari suatu data yang jumlahnya n datum secara umum dituliskan

$$\text{letak } Q_i = \text{datum ke-}\frac{i(n+1)}{4}$$

Dengan memedulikan letak Q_i pada rumus di atas, letak Q_i tidak selalu pada posisi datum ke-i. Artinya, Q_i boleh terletak pada suatu datum atau terletak di antara dua datum. Untuk itu digunakan pola pendekatan atau interpolasi. Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data berikut.
a. 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 9, 10 ($n = 11$)
b. 4, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 9 ($n = 10$)
c. 3, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9 ($n = 9$)

Jawab:

a.

4	5	5	6	7	7	7	7	8	9	10
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
		↓			↓			↓		
		Q_1			Q_2			Q_3		

Perhatikan Q_2 membagi data menjadi 2 bagian, sebelah kiri Q_2, yaitu 4, 5, 5, 6, 7 dan sebelah kanan Q_2, yaitu 7, 7, 8, 9, 10. Q_1 membagi data dari sebelah kiri Q_2 menjadi 2 bagian, sebelah kiri Q_1, yaitu 4, 5 dan sebelah kanan Q_1, yaitu 6, 7. Q_3 membagi data di sebelah kanan Q_2 menjadi 2 bagian yang sama frekuensinya, sebelah kiri Q_3, yaitu 7, 7 dan sebelah kanan Q_3, yaitu 9, 10.

b. Data sudah terurut naik (n = 10).

$$\begin{array}{cccccccccc} 4 & 4 & 5 & 5 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} \end{array}$$

$$\text{Letak } Q_1 = \text{datum ke-}\frac{1(10+1)}{4}$$
$$= \text{datum ke-}2\tfrac{3}{4}$$

Artinya, Q_1 terletak di antara datum ke-2 (x_2) dan ke-3 (x_3). Oleh karena itu, kita gunakan pendekatan datum interpolasi berikut.

$$Q_1 = x_2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_2)$$
$$= 4 + \frac{3}{4}(5 - 4)$$
$$= 4{,}75$$

$$\text{Letak } Q_2 = \text{datum ke-}\frac{2(10+1)}{4}$$
$$= \text{datum ke-}5\tfrac{1}{2}$$

Artinya, Q_2 terletak di antara datum ke-5 dan ke-6. Jadi,

$$Q_2 = x_5 + \frac{1}{2}(x_6 - x_5)$$
$$= 5 + \frac{1}{2}(6 - 5)$$
$$= 5{,}5$$

$$\text{Letak } Q_3 = \text{datum ke-}\frac{3(10+1)}{4}$$
$$= \text{datum ke-}8\tfrac{1}{4}$$

Artinya, Q_3 terletak di antara datum ke-8 dan ke-9. Jadi,

$$Q_3 = x_8 + \frac{1}{4}(x_9 - x_8)$$
$$= 8 + \frac{1}{4}(8 - 8) = 8$$

c. Data sudah terurut naik (n = 9). Dengan cara serupa, diperoleh

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 7 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{array}$$

$$\text{Letak } Q_1 = \text{datum ke-}\frac{1(9+1)}{4}$$

$$= \text{datum ke-}2\frac{1}{2}$$

Dengan demikian, Q_1 terletak di antara datum kedua dan ketiga, yaitu

$$Q_1 = x_2 + \frac{1}{2}(x_3 - x_2)$$

$$= 7 + \frac{1}{2}(7 - 7)$$

$$= 7$$

$$\text{Letak } Q_2 = \text{datum ke-}\frac{2(9+1)}{4} = \text{datum ke-}5$$

Jadi, $Q_2 = x_5 = 8$.

$$\text{Letak } Q_3 = \text{datum ke-}\frac{3(9+1)}{4} = \text{datum ke-}7\frac{1}{2}$$

Jadi, Q_3 terletak antara datum ketujuh dan datum kedelapan, yaitu

$$Q_3 = x_7 + \frac{1}{2}(x_8 - x_7)$$

$$= 8 + \frac{1}{2}(9 - 8)$$

$$= 8\frac{1}{2}$$

e. Statistik Lima Serangkai

Misalkan terdapat data $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, dengan $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$. Nilai maksimum data tersebut adalah x_n dan nilai minimumnya x_1. Jika nilai maksimum dinyatakan dengan x_{maks} dan nilai minimum dinyatakan dengan x_{min} maka $x_n = x_{maks}$ dan $x_1 = x_{min}$.

Kalian juga telah mempelajari kuartil, yaitu Q_1, Q_2, dan Q_3. Rangkaian statistik (ukuran) yang terdiri atas x_{min}, Q_1, Q_2, Q_3,

Perhatian

Untuk menentukan nilai-nilai statistik lima serangkai, data harus terurut (boleh terurut naik boleh juga terurut menurun).

dan x_{maks} dinamakan *statistik lima serangkai*. Kelima ukuran ini dapat digunakan untuk mengetahui kecenderungan pemusatan data. Statistik lima serangkai biasanya dinyatakan dalam bagan berikut.

Q_2	
Q_1 x_{min}	Q_3 x_{maks}

Contoh:

Tentukan statistik lima serangkai dari data: 1, 3, 2, 4, 2, 5, 7, 9, 8, 7, 3.

Jawab:

Nilai-nilai datum belum terurut naik. Oleh karena itu, kita urutkan dari terkecil terlebih dahulu, seperti berikut:

1	2	2	3	3	4	5	7	7	8	9
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
↓		↓			↓			↓		↓
x_{min}		Q_1			Q_2			Q_3		x_{maks}

Pada korespondensi di atas, diperoleh statistik berikut.

1) $x_{min} = 1$

2) $Q_1 = \text{datum ke-}\dfrac{1(11+1)}{4} = \text{datum ke-}3 = x_3 = 2$

3) $Q_2 = \text{datum ke-}\dfrac{2(11+1)}{4} = \text{datum ke-}6 = x_6 = 4$

4) $Q_3 = \text{datum ke-}\dfrac{3(11+1)}{4} = \text{datum ke-}9 = x_9 = 7$

5) $x_{maks} = 9$

Dengan demikian, bagan statistik lima serangkai dapat dinyatakan dalam bagan berikut.

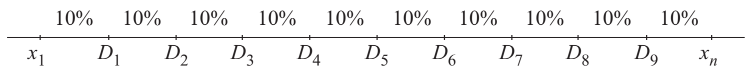
$Q_2 = 4$	
$Q_1 = 2$ $x_{min} = 1$	$Q_3 = 7$ $x_{maks} = 9$

Mari Berdiskusi
Berpikir kritis

Misalkan terdapat data x_1, x_2, ... x_n. Mungkinkah data itu memiliki x_{min}, Q_1, Q_2, Q_3, dan x_{maks} yang sama? Jika mungkin, data seperti apakah itu? Berikan contohnya. Jika tidak mungkin, mengapa demikian? Berikan alasannya.

f. Desil

Kalian telah mempelajari bagaimana cara menentukan kuartil dari suatu data. Sekarang, kalian diperkenalkan dengan ukuran lain, yaitu desil. Sesuai dengan namanya, *desil* membagi suatu data menjadi sepuluh bagian yang sama. Karena desil membagi 10 bagian, maka terdapat 9 desil. Desil pertama D_1, desil kedua D_2, …, desil ke-9 D_9. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.2

Statistik minimum dari data di atas adalah x_1, dan statistik maksimumnya x_n. Seperti halnya dengan kuartil, untuk menentukan desil, data harus sudah terurut naik terlebih dahulu. Letak desil ke-i dari suatu data yang terdiri atas n datum dengan i = 1, 2, 3, …., 9 dapat ditentukan dengan rumus

$$\text{letak } D_i = \text{datum ke-}\frac{i(n+1)}{10}$$

Letak desil tidak harus tepat berada pada suatu datum, tetapi boleh berada di antara dua datum berurutan.

Adapun cara menentukan nilai desil yang berada di antara dua datum dapat digunakan pendekatan atau interpolasi, seperti pada saat kalian menentukan nilai kuartil yang letaknya berada di antara dua datum.

Contoh:

Diketahui data : 4, 3, 7, 6, 6, 5, 4, 7, 9, 8, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 9, 7, 9, 8.

Tentukan D_1, D_5, dan D_9.

Jawab:

Data di atas belum terurut. Oleh karena itu, kita urutkan terlebih dahulu seperti berikut.

3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9

Setelah data terurut naik, kita dapat dengan mudah mengetahui urutan $x_1, x_2, x_3, ..., x_{20}$.

1) letak D_1 = datum ke-$\frac{1(20+1)}{10}$

$= \text{datum ke-}2\frac{1}{10}$

Jadi, D_1 terletak di antara datum ke-2 dan ke-3. Karena $x_2 = 4$, dan $x_3 = 4$, dengan interpolasi, dapat kita tentukan

$$D_1 = x_2 + \frac{1}{10}(x_3 - x_2)$$

$$= 4 + \frac{1}{10}(4 - 4) = 4$$

2) letak D_5 = datum ke-$\frac{5(20+1)}{10}$

$= \text{datum ke-}10\frac{1}{2}$

Jadi, D_5 terletak di antara datum ke-10 dan ke-11. Karena $x_{10} = 7$ dan
$x_{11} = 7$ dapat kita tentukan

$$D_5 = x_{10} + \frac{1}{2}(x_{11} - x_{10})$$

$$= 7 + \frac{1}{2}(7 - 7)$$

$$= 7$$

3) letak D_9 = datum ke-$\frac{9(20+1)}{10}$

$= \text{datum ke-}18\frac{9}{10}$

Jadi, D_9 terletak di antara datum ke-18 dan ke-19. Karena $x_{18} = 9$ dan $x_{19} = 9$, dengan interpolasi, dapat kita tentukan

$$D_9 = x_{18} + \frac{9}{10}(x_{19} - x_{18})$$

$$= 9 + \frac{9}{10}(9 - 9) = 9$$

Tugas: Observasi

• Kerjakan di buku tugas

Lakukan secara berkelompok. Carilah data dengan salah satu cara berikut:

a. wawancara;
b. kuesioner;
c. observasi.

Pilihlah data yang menurut kalian menarik, misalnya hasil pertanian pada periode tertentu. Dari data yang kalian peroleh, tentukan mean, median, modus, kuartil-kuartil, dan desil-desilnya. Khusus untuk median, kuartil ke-2, dan desil ke-5, apakah nilainya sama?

g. Jangkauan Data, Jangkauan Antarkuartil, Langkah, dan Pagar

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah mempelajari mean, median, modus, kuartil, dan desil. Ukuran-ukuran itu dinamakan ukuran pemusatan data. Di samping *ukuran pemusatan data*, juga ada ukuran penyebaran data atau ukuran dispersi, di antaranya jangkauan data dan jangkauan antarkuartil.

1) Jangkauan Data
   Jangkauan data atau *range data* merupakan selisih antara statistik maksimum dan statistik minimum. Jika jangkauan data dinyatakan dengan J_D, nilainya dapat ditentukan dengan rumus

$$J_D = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}}$$

2) Jangkauan Antarkuartil
   Seperti halnya jangkauan data, *jangkauan antarkuartil* merupakan selisih antara kuartil atas dan kuartil bawah. Jika jangkauan antarkuartil dinotasikan dengan J_K, nilainya dapat ditentukan dengan

$$J_K = Q_3 - Q_1$$

   Jangkauan antarkuartil biasanya disebut juga hamparan. Di samping jangkauan antarkuartil, di dalam ukuran penyebaran data juga dikenal jangkauan semiinterkuartil atau *simpangan kuartil*. Simpangan ini nilainya setengah dari jangkauan antarkuartil. Jika simpangan kuartil dinotasikan dengan Q_d, nilainya dapat ditentukan dengan rumus

$$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

3) Langkah
   Kalian telah mengenal jangkauan antarkuartil. Panjang satu langkah adalah $\frac{3}{2}$ kali panjang jangkauan antarkuartil. Misalkan langkah dinotasikan dengan L maka dalam matematika dapat dirumuskan

$$L = \frac{3}{2}J_K \text{ atau } L = \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1)$$

4) Pagar
   Menurut letaknya, pagar dibedakan menjadi pagar dalam dan pagar luar.
   a) *Pagar dalam*, yaitu suatu nilai yang letaknya satu langkah di bawah kuartil pertama.
   b) *Pagar luar*, yaitu suatu nilai yang letaknya satu langkah di atas kuartil ketiga.

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Simpangan kuartil dari data 5, 6, a, 3, 7, 8 adalah $1\frac{1}{2}$. Jika median datanya $5\frac{1}{2}$ maka rata-rata data tersebut adalah ....

a. 4
b. $4\frac{1}{2}$
c. 5
d. $5\frac{1}{2}$
e. 6

SPMB 2005

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Dalam suatu kelas terdapat 22 siswa. Nilai rata-rata Matematika mereka 5 dan jangkauan 4. Jika seorang siswa yang paling rendah nilainya dan seorang siswa yang paling tinggi nilainya tidak diikutkan maka nilai rata-ratanya berubah menjadi 4,9. Nilai siswa yang paling rendah adalah ....

a. 5
b. 4
c. 3
d. 2
e. 1

UM-UGM 2004

Tugas: Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Coba kalian tentukan jangkauan data, jangkauan antarkuartil, dan jangkauan semiinterkuartil (simpangan kuartil) dari contoh ketika kalian menentukan desil di atas (halaman 12).

Misalkan pagar dalam dinotasikan dengan P_D dan pagar luar P_L. Kedua pagar itu dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$P_D = Q_1 - L$$
$$P_L = Q_3 + L$$

Soal Kompetensi 1

• Kerjakan di buku tugas

1. Jelaskan definisi dari istilah-istilah berikut.
   a. statistik
   b. statistika
   c. datum
   d. data
   e. data kuartil
   f. data kuantitatif dan data kualitatif
   g. mean, median, modus, desil
   h. kuartil, kuartil atas, kuartil bawah, kuartil tengah
   i. jangkauan data
   j. simpangan kuartil
2. Tentukan mean, median, modus, kuartil bawah, kuartil tengah, dan kuartil atas dari data-data berikut.
   a. 36, 28, 37, 35, 35, 34, 31, 39, 35, 33, 32
   b. 8, 10, 4, 6, 9, 8, 9, 10, 12, 12
   c. 2, 5, 7, 3, 4, 9, 12, 10, 11
   d. 2,3; 4,3; 4,3; 2,8; 1,7; 5,1; 2,6; 3,6; 4,7
3. Suatu data terdiri atas 20 datum mempunyai mean 6,5. Jika sebuah datum diikutkan data itu, mean data menjadi 6,8. Tentukan nilai datum yang ditambahkan itu.
4. Suatu data terdiri atas 10 datum, yaitu x_1, x_2, x_3, ..., x_{10} mempunyai mean $\bar{x}$. Jika setiap datum ditambah 5, data menjadi
   $x_1 + 5, x_2 + 5, x_3 + 5, ..., x_{10} + 5$. Tentukan mean data yang baru.
5. Terdapat 3 kelompok data dengan keterangan sebagai berikut.
   Data pertama mempunyai mean m_1 dan jumlah datum n_1.
   Data kedua mempunyai mean m_2 dan jumlah datum n_2.
   Data ketiga mempunyai mean m_3 dan jumlah datum n_3.
   Tentukan nilai mean dari ketiga kelompok data tersebut jika digabungkan menjadi sebuah data.
6. Suatu perusahaan menerapkan sistem penggajian kepada karyawannya setiap 2 minggu sekali. Gaji karyawan perusahaan itu mempunyai mean (rataan hitung) Rp250.000,00. Gaji karyawan laki-laki mempunyai mean

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Dari 64 orang siswa yang terdiri atas 40 orang siswa kelas K dan 24 orang siswa kelas L diketahui nilai rata-rata Matematika siswa kelas K adalah 7,2 dan nilai rata-rata kelas L adalah 1,5 lebih tinggi dari nilai rata-rata seluruh siswa kedua kelas tersebut. Nilai rata-rata matematika kelas L adalah ....

a. 8,8
b. 9,0
c. 9,2
d. 9,4
e. 9,6

UMPTN 2001

Rp260.000,00, sedangkan mean gaji perempuan Rp210.000,00. Tentukan perbandingan jumlah karyawan pria dan wanita perusahaan itu.

7. Diketahui data 4, 4, 4, 5, 6, 8, 9, 7, 8, 5, 6, 3, 4, 8, 9. Tentukan
   a. statistik lima serangkai;
   b. desil ke-2, desil ke-6, dan desil ke-8;
   c. jangkauan data, jangkauan semiinterkuartil, langkah, pagar luar, dan pagar dalam.
8. Dari hasil nilai ulangan harian Akuntansi dan Bahasa Inggris, nilai seorang siswa selama satu semester tercatat dalam tabel berikut.

Akuntansi	75	86	86	92	91	89	79	79	77
Bhs. Inggris	69	70	75	72	79	83	85	85	81

   a. Tentukan statistik lima serangkai dari nilai ulangan kedua mata pelajaran siswa itu.
   b. Tentukan jangkauan data, simpangan kuartil, simpangan semiinterkuartil, pagar dalam, pagar luar, dan langkah.
   c. Dapatkah kalian menentukan desil-desilnya? Mengapa demikian?
9. Keluarga Pak Andi mempunyai lima anak. Anak termuda berumur x tahun dan tertua $2x$ tahun. Tiga anak yang lain berturut-turut berumur $(x + 2)$ tahun, $(x + 4)$ tahun, dan $(2x – 3)$ tahun. Jika rata-rata hitung umur mereka adalah 16 tahun, tentukan umur anak termuda.
10. Nilai rata-rata ulangan Matematika dari 39 siswa adalah 45. Jika nilai 5 siswa lainnya digabungkan dengan kelompok tersebut, nilai rata-ratanya menjadi 40. Tentukan nilai rata-rata ulangan kelima siswa itu.

2. Membaca dan Menyajikan Data dalam Bentuk Diagram

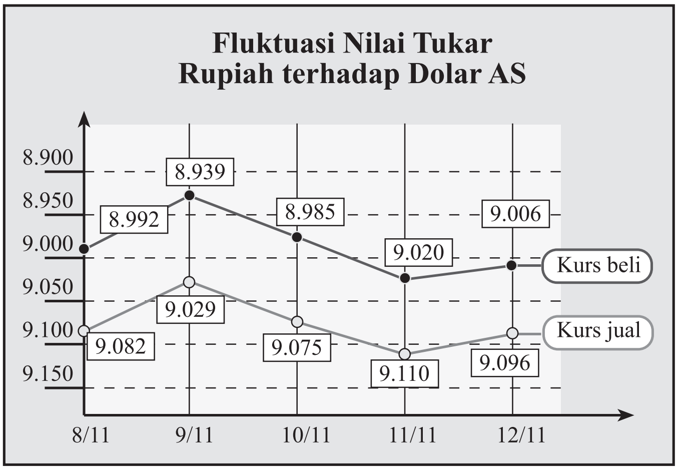
Setelah kalian mempelajari penyajian data dalam bentuk statistik deskriptif, akan kita pelajari cara penyajian data dengan diagram atau grafik, di antaranya adalah diagram garis, diagram lingkaran, diagram batang, diagram batang daun, dan diagram kotak garis.

a. Diagram Garis

Suatu ketika Nia mengamati perkembangan nilai tukar mata uang rupiah terhadap dolar Amerika. Perkembangan itu diamati setiap hari selama satu minggu. Perhatikan fluktuasi nilai mata uang rupiah terhadap dolar Amerika dari tanggal 8–12 November. (Nilai rupiah dihitung per dolar Amerika Serikat)

Tanggal	8 Nov.	9 Nov.	10 Nov.	11 Nov.	12 Nov.
Kurs Jual	9.082	9.029	9.075	9.110	9.096
Kurs Beli	8.992	8.939	8.985	9.020	9.006

Dari pengamatan di atas, data tersebut dapat ditampilkan dalam diagram garis berikut.



Gambar 1.3

Penyajian data dalam bentuk demikian dinamakan penyajian dengan diagram garis. Jadi, *diagram garis* adalah cara penyajian data statistik dengan menggunakan garis-garis lurus yang menghubungkan komponen-komponen pengamatan (waktu dan hasil pengamatan). Diagram ini biasanya digunakan untuk menggambarkan suatu kondisi yang berlangsung secara kontinu, misalnya perkembangan nilai tukar mata uang suatu negara terhadap nilai tukar negara lain, jumlah penjualan setiap waktu tertentu, dan jumlah penduduk suatu daerah setiap periode tertentu.

b. Diagram Lingkaran

Penyajian data dengan menggunakan diagram lingkaran membantu kita untuk mengetahui persentase kelompok atau bagian tertentu dari suatu keseluruhan secara mudah. Hal utama yang harus diketahui dalam membuat diagram lingkaran adalah menentukan besar sudut juring yang mewakili suatu bagian atau kelompok itu. Setelah mengetahui besar sudut tiap-tiap juring, kalian akan mudah untuk menentukan besar persentase bagian yang dimaksud. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Berikut ini adalah data penjualan 6 jenis mobil dari suatu perusahaan pada kurun waktu 2002–2007.

Jenis Mobil	I	II	III	IV	V	VI
Penjualan	18	26	15	36	50	8

Buatlah diagram lingkaran dari data di atas.

Jawab:

Untuk dapat menggambarkan diagram lingkaran, terlebih dahulu tentukan besar sudut masing-masing juring yang mewakili masing-masing jenis mobil. (Jumlah penjualan 18 + 26 + 15 + 36 + 50 + 8 = 153 buah).

Mobil jenis I : $\frac{18}{153} \times 360^\circ = 42{,}35^\circ$

Mobil jenis II : $\frac{26}{153} \times 360^\circ = 61{,}18^\circ$

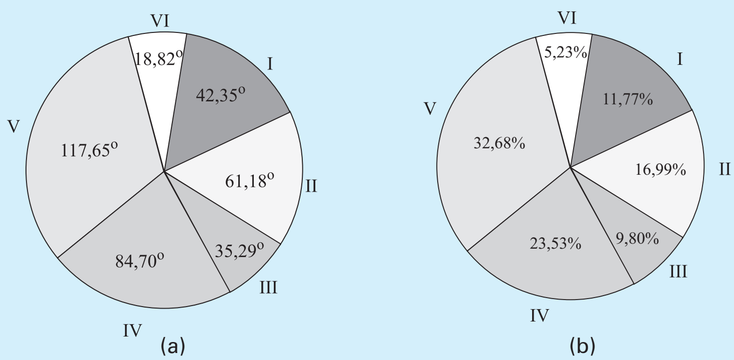
Mobil jenis III : $\frac{15}{153} \times 360^\circ = 35{,}29^\circ$

Mobil jenis IV : $\frac{36}{153} \times 360^\circ = 84{,}70^\circ$

Mobil jenis V : $\frac{50}{153} \times 360^\circ = 117{,}65^\circ$

Mobil jenis VI : $\frac{8}{153} \times 360^\circ = 18{,}82^\circ$

Setelah kalian menentukan besar sudut dari masing-masing jenis mobil yang terjual, kalian dapat menggambarkannya dalam diagram lingkaran **Gambar 1.4** (a).



Gambar 1.4

Kalian juga dapat menyatakan diagram lingkaran tersebut dalam bentuk persentase. Untuk menentukan persentase mobil jenis I, caranya adalah

$$\frac{\text{Jumlah penjualan mobil jenis I}}{\text{Jumlah penjualan seluruh mobil}} \times 100\%.$$

Jadi, persentase mobil jenis I adalah $\frac{18}{153} \times 100\% = 11{,}77\%$.

Coba kalian tunjukkan bahwa persentase penjualan masing-masing jenis mobil lainnya adalah sebagai berikut.

Mobil jenis II : 16,99%

Mobil jenis III : 9,80%

Mobil jenis IV : 23,53%

Mobil jenis V : 32,68%

Mobil jenis VI : 5,23%

Diagram lingkarannya seperti terlihat pada **Gambar 1.4** (b).

c. Diagram Batang

Penyajian data juga dapat dilakukan dengan membuat *diagram batang*. Diagram ini disusun dalam bentuk persegi panjang yang lebarnya sama dan tingginya (panjangnya) sebanding dengan frekuensi datanya pada sumbu horizontal dan vertikal. Diagram batang dapat disajikan secara mendatar maupun tegak. Penyajian data ini memudahkan kita untuk mengetahui data yang mempunyai nilai tertinggi atau terendah. Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

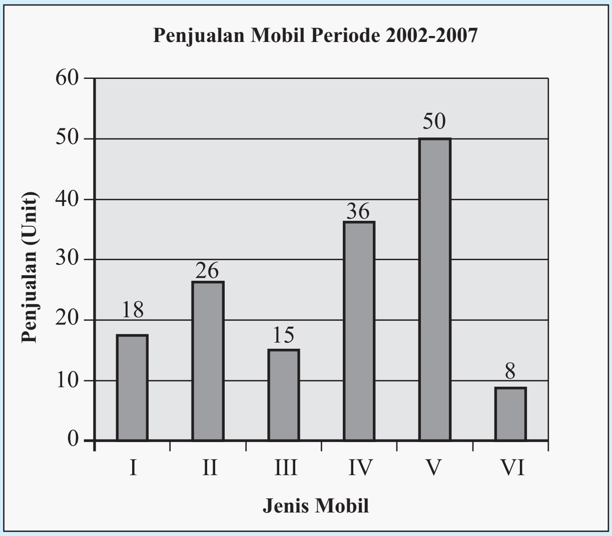
Contoh 1:

Buatlah diagram batang dari contoh penjualan 6 jenis mobil pada contoh di depan.

Jawab:

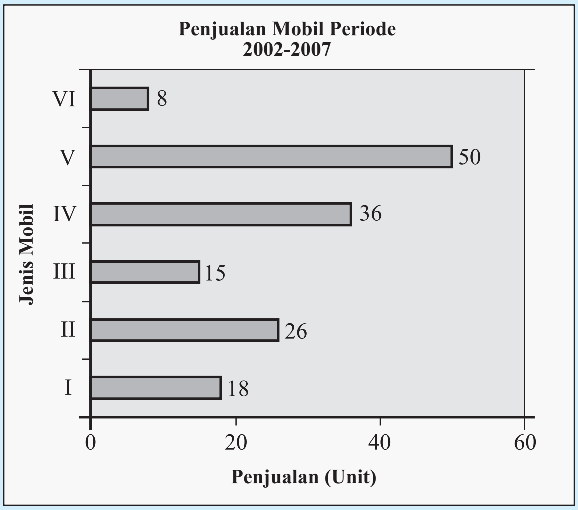
Jenis Mobil	I	II	III	IV	V	VI
Penjualan	18	26	15	36	50	8

Data penjualan jenis mobil di atas dapat disajikan kembali pada tabel berikut.



Gambar 1.5

Dari data ini, diagram batangnya dapat ditampilkan sebagai berikut.
Diagram batang di atas dinamakan diagram batang tegak atau vertikal. Jika digambarkan dengan diagram batang mendatar atau horizontal, gambarnya adalah sebagai berikut.



Gambar 1.6

Dua buah data atau lebih juga dapat ditampilkan dalam satu diagram batang. Perhatikan contoh berikut.

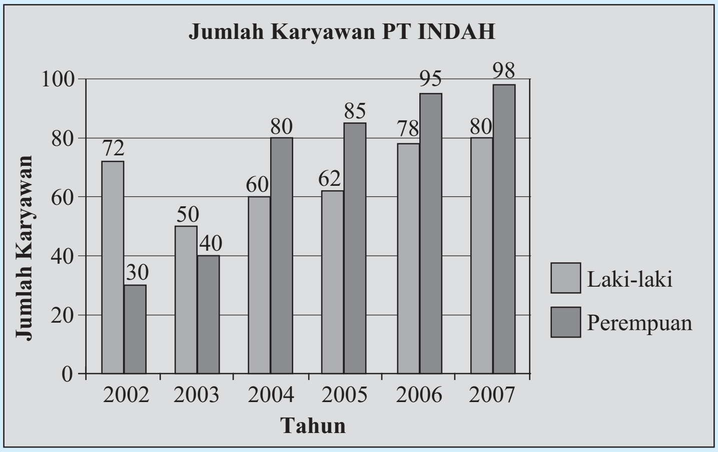
Contoh 2:

Buatlah suatu diagram batang yang mewakili data tentang jumlah karyawan PT Lestari dalam tahun-tahun berikut.

Jenis Kelamin	Tahun					
	2002	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**
Laki-laki	72	50	60	62	78	80
Perempuan	30	40	80	85	95	98

Jawab:

Jumlah karyawan laki-laki dan perempuan pada tahun yang sama digambarkan sebagai dua batang yang didekatkan. Hasilnya tampak seperti pada gambar berikut.



Gambar 1.7

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Coba kalian cari data tinggi dan berat badan siswa sekolahmu. Dari data yang kalian peroleh, buatlah
a. diagram batang untuk tinggi badan;
b. diagram batang untuk berat badan;
c. diagram batang tinggi badan berdasarkan jenis kelamin;
d. diagram batang berat badan berdasarkan jenis kelamin.

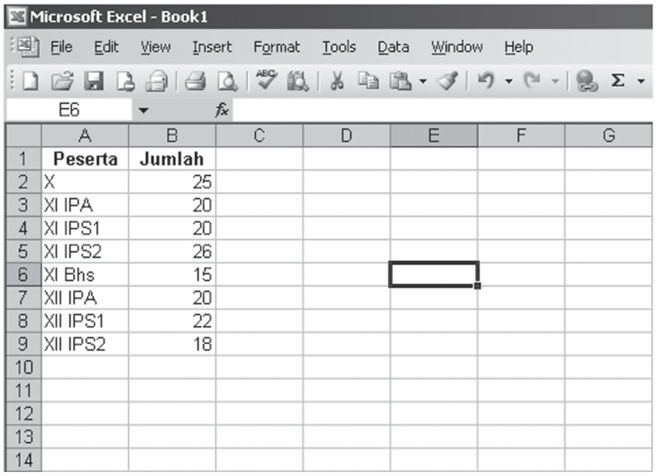
Dari berbagai diagram batang yang kamu buat, coba jelaskan makna diagram itu.

Aktivitas

Tujuan : Membuat diagram batang dengan *software* komputer, misalnya Microsoft Excel.

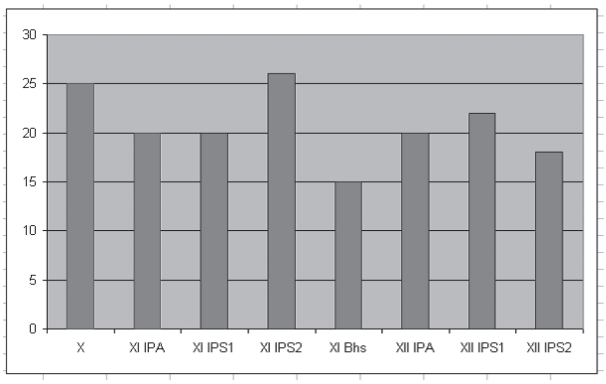
Permasalahan : Bagaimana menyajikan data dalam diagram batang yang lebih akurat dengan menggunakan komputer?

Kegiatan : 1. Persiapkan data yang akan disajikan dalam diagram batang.
Misalnya data peserta lomba lari tiap kelas dari suatu sekolah berikut.



	A	B
1	Peserta	Jumlah
2	X	25
3	XI IPA	20
4	XI IPS1	20
5	XI IPS2	26
6	XI Bhs	15
7	XII IPA	20
8	XII IPS1	22
9	XII IPS2	18

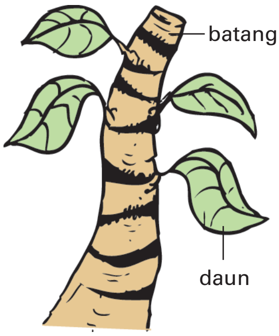
2. Blok range data dari A2 sampai B9
3. Klik **Insert** → **Chart**, pilih **Column**, kemudian pilih bentuk Column yang sesuai pada **Chart-type**, misalnya **Clustered Column**. Klik **Next**, ikuti perintah selanjutnya atau klik **Finish**. Akan kalian peroleh diagram batang berikut.



Kesimpulan : Suatu data dapat disajikan dalam diagram batang secara akurat dengan bantuan *software* komputer.

d. Diagram Batang Daun

Sebuah data dapat disajikan memakai analogi bagian-bagian tumbuhan. Pada tumbuhan, terdapat batang, ruas-ruas pada batangnya, dan daun. Pada ruas-ruas itu kadang-kadang terdapat daun, tetapi juga ada yang tidak mempunyai daun. Penyajian data seperti itu dinamakan diagram batang daun.



Gambar 1.8

Sekarang, perhatikan data berikut.

10	15	16	20	39	42	51	51	36	16	21	26
16	21	21	38	42	61	58	51	32	27	31	47

Jika data itu diurutkan dari terkecil ke terbesar, diperoleh susunan sebagai berikut.

10	15	16	16	16	20	21	21	21	26	27	31
32	36	38	39	42	42	47	51	51	51	58	61

Dari data yang sudah terurut, tampak bahwa datum terkecil 10 dan terbesarnya 61. Kita dapat membuat interval data itu dengan panjang kelas interval 10, sebagai berikut.
10–19, dengan angka puluhan 1;
20–29, dengan angka puluhan 2;
30–39, dengan angka puluhan 3;
40–49, dengan angka puluhan 4;
50–59, dengan angka puluhan 5;
60–69, dengan angka puluhan 6.

Angka-angka puluhan 2, 3, 4, 5, dan 6 ditulis pada kolom batang dan satuan yang meliputi 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9 ditulis pada kolom daun.

Di samping batang dan daun, bagian lain dari diagram batang daun adalah frekuensi dan frekuensi kumulatif (jumlah frekuensi sebelum atau sesudahnya). Jika data yang diberikan di atas disajikan dalam diagram batang daun, hasilnya tampak sebagai berikut.

Batang	Daun	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif
1	0 5 6 6 6	5	5
2	0 1 1 1 6 7	6	11
3	1 2 6 8 9	5	16
4	2 2 7	3	19
5	1 1 1 8	4	23
6	1	1	24

Namun, untuk tujuan-tujuan tertentu, misalnya untuk menentukan median atau kuartil, kolom frekuensi dan frekuensi kumulatif dihilangkan, kemudian diganti dengan kolom kedalaman. Kolom ini ditentukan oleh letak nilai data itu dari statistik ekstrimnya, yaitu statistik minimum dan statistik maksimum. Untuk memahami *kolom kedalaman*, perhatikan ilustrasi berikut.

•	•	•	•	•	•	•	•	•
x_{min}	x_2	x_3	....	median	....	x_{n-2}	x_{n-1}	x_n

x_{min} adalah statistik minimumnya, dengan kedalaman 1.
x_2 letaknya setelah statistik minimum. Jadi, x_2 kedalamannya 2.

Demikian seterusnya, sampai pada datum median.
x_n adalah statistik maksimumnya, dengan kedalaman 1.
x_{n-1} letaknya setelah statistik maksimum. Jadi, kedalamannya 2.

Batang	Daun	Kedalaman
1	0 5 6 6 6	5
2	0 1 1 1 6 7	11
3	1 2 6 8 9	[5]
4	2 2 7	8
5	1 1 1 8	5
6	1	1

Batang : puluhan
Daun : satuan

Demikian seterusnya sampai pada datum median.
Khusus untuk kedalaman yang memuat median, diberi tanda [ ].
Dengan demikian, diagram batang daun dari data di samping adalah sebagai berikut.
Perhatikan baris ketiga. Kolom kedalaman ditulis [5]. Artinya, median dari data terletak pada baris ini. Karena jumlah datum dari data itu 24, mediannya adalah rata-rata dari datum ke-12 dan ke-13.

Jadi, median = $\frac{31+32}{2}$ = 31,5.

Dengan menggunakan kedalaman, baik dari arah statistik minimum maupun dari arah statistik maksimum, kita dapat menentukan median data tersebut.

Jika kalian mempunyai dua data dengan batang yang sama, cukup disajikan menggunakan satu kolom batang saja. Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Nilai ulangan Matematika dan Ekonomi dari 10 siswa SMA disajikan dalam tabel berikut.

Matematika	Ekonomi
50	55
45	50
57	55
47	48
67	70
83	75
57	47
58	49
72	70
78	60

Buatlah diagram batang daun dari data di atas.

Jawab:

Matematika	Ekonomi
45	47
47	48
50	49
57	50
57	55
58	55
67	60
72	70
78	70
83	75

Data tabel di atas belum terurut. Oleh karena itu, kita urutkan terlebih dahulu. Hasilnya tampak seperti tabel di atas.

Diagram batang daun data di atas adalah sebagai berikut.

Matematika **Ekonomi**

Kedalaman	Daun	Batang	Daun	Kedalaman
2	7 5	4	7 8 9	3
[4]	8 7 7 0	5	0 5 5	[3]
4	7	6	0	4
3	8 2	7	0 0 5	3
1	3	8	–	–

Batang : puluhan
Daun : satuan

Tugas: Inkuiri

• Kerjakan di buku tugas

Median kedua data di samping adalah rata-rata datum ke-5 dan ke-6. Coba kalian tentukan median kedua data itu.

Mari Berdiskusi
Inovasi

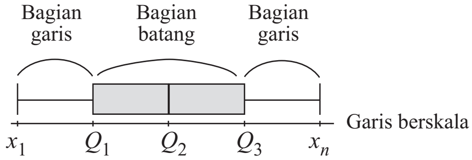
Bagaimana cara membuat diagram batang daun jika
a. data terdiri atas angka-angka ratusan;
b. data terdiri atas angka-angka yang bernilai antara 0 dan 1?

Perhatian

Pada garis berskala, penulisan nilai-nilai statistik lima serangkai harus sesuai. Hal ini dimaksudkan untuk mengetahui bentuk penyebaran data.

e. Diagram Kotak Garis

Pada subbab sebelumnya, kalian telah mempelajari statistik lima serangkai yang terdiri atas statistik minimum (x_{min}), kuartil bawah (Q_1), median atau kuartil tengah (Q_2), kuartil atas (Q_3), dan statistik maksimum (x_{maks}). Nilai-nilai ini merupakan nilai-nilai yang terdapat pada diagram kotak garis, yaitu diagram yang terdiri atas kotak dan garis. Bagian kotak adalah nilai-nilai antara Q_1 dan Q_2, sedangkan bagian ekornya yang berbentuk garis adalah nilai-nilai yang berada di antara x_{min} dan Q_1 atau Q_3 dan x_{maks}. Perhatikan gambar berikut.



Gambar 1.9

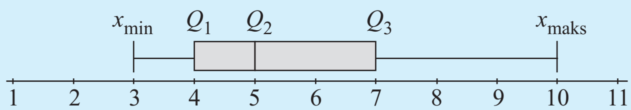
Dengan memahami bentuk diagram kotak garis ini, tentunya kalian dapat membuat diagramnya jika diketahui datanya.

Contoh:

Gambarkan diagram kotak garis dari suatu data yang diketahui $x_{min} = 3$, $x_{maks} = 10$, $Q_1 = 4$, $Q_2 = 5$, dan $Q_3 = 7$.

Jawab:

Dengan memerhatikan nilai-nilai statistik lima serangkai yang diketahui dan meletakkannya pada garis berskala, diperoleh diagram kotak garis sebagai berikut.



Gambar 1.10

Diagram kotak garis dapat digunakan untuk menentukan apakah suatu data mempunyai distribusi yang seimbang atau tidak. Jika jarak antara Q_1 dan Q_2 sama dengan jarak antara Q_2 dan Q_3, serta jarak antara x_{min} dan Q_1 sama dengan jarak antara Q_3 dan x_{maks} maka data dikatakan mempunyai *distribusi seimbang* atau *simetris*. Selain itu, penyajian data dalam diagram kotak garis dapat memudahkan kita untuk mengetahui *datum pencilan*, yaitu datum yang berbeda dengan kelompoknya. Bagaimana cara menentukan ada tidaknya datum pencilan dari suatu data? Kita akan mempelajarinya dalam pembahasan tersendiri pada bagian akhir bab ini.

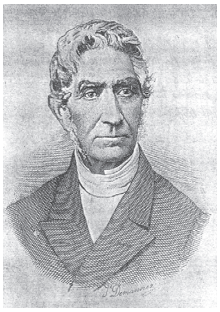
Mari Berdiskusi

Observasi

Carilah data tentang usia teman-teman sekelasmu. Dari data itu, tentukan statistik lima serangkainya, kemudian buatlah diagram kotak garisnya. Dari diagram kotak garis yang diperoleh, jelaskan apakah data itu mempunyai distribusi seimbang? Berikan alasan kalian. Diskusikan dengan teman-teman kalian.

Jendela Informasi

Informasi lebih lanjut



Sumber: *www.mate-mati-kaku.com*

Quetelet (1776–1874)

Lambert Adolphe Jacques Quetelet

Tahukah kamu siapakah Quetelet itu? Tokoh Statistika ini memiliki nama lengkap **Lambert Adolphe Jacques Quetelet** (1776-1874). Dia lahir di Belgia. Pada usia 23 tahun, ia menjadi profesor Matematika di Brussel, Althemeum. Dia menjadi direktur observatorium Kerajaan Brussel. Untuk menambah pengetahuan tentang observatorium, dia belajar ke Paris dan mendalami ilmu peluang serta aplikasinya. Dia meneliti data tentang sensus penduduk, kemudian mencatat data tersebut dan menyajikannya dalam bentuk tabel serta diagram. Dengan penyajian ini, data dapat divisualkan dan mudah dipahami. Carilah informasi lebih lengkap tentang tokoh ini dan sumbangsihnya di dunia matematika. Kalian dapat memanfaatkan perpustakaan atau internet.

Sumber: *Ensiklopedi Pengetahuan*, 2007

C. Tabel Distribusi Frekuensi

Daftar atau tabel distribusi frekuensi berupa sebuah tabel yang mencakup suatu nilai atau interval yang dilengkapi dengan frekuensinya. Daftar ini dapat disajikan sebagai distribusi frekuensi tunggal maupun distribusi frekuensi berkelompok. Penyajian dengan cara ini memudahkan kita membaca data terutama untuk data dengan jumlah frekuensi besar.

1. Tabel Distribusi Frekuensi Tunggal

Tabel distribusi dapat memudahkan kita untuk mengetahui jumlah frekuensi dari nilai data. Berikut adalah data nilai ulangan 18 siswa.

30	30	50	40	70	80	80	80	60
45	60	60	80	40	50	50	50	80

Dari kumpulan nilai di atas, dapat diperoleh sebagai berikut.

Nilai 30 muncul 2 kali.
Nilai 40 muncul 2 kali.
Nilai 45 muncul 1 kali.
Nilai 50 muncul 4 kali.
Nilai 60 muncul 3 kali.
Nilai 70 muncul 1 kali.
Nilai 80 muncul 5 kali.

Dengan demikian, informasi di atas dapat disajikan dalam tabel berikut.

Nilai (x_i)	Turus	Frekuensi
30	II	2
40	II	2
45	I	1
50	IIII	4
60	III	3
70	I	1
80	𝍸	5
Jumlah		18

Tabel seperti ini dinamakan *daftar/tabel distribusi frekuensi tunggal*.

2. Tabel Distribusi Frekuensi Berkelompok

Kalian telah mempelajari cara membuat tabel distribusi tunggal. Bagaimana jika data yang diberikan mempunyai jumlah yang sangat banyak, misalnya 100, 200, atau 250? Tentu kalian akan kesulitan karena tabel yang harus dibuat sangat panjang. Untuk mengatasinya, kalian dapat menyajikannya dalam tabel distribusi frekuensi berkelompok. Tabel ini dibuat dalam interval-interval tertentu. Adapun istilah-istilah yang harus kalian pahami yang berkaitan dengan penyusunan tabel distribusi berkelompok adalah kelas, batas kelas, tepi kelas, panjang kelas, dan titik tengah (nilai tengah) kelas. Agar kalian memahami istilah-istilah tersebut, perhatikan tabel distribusi berkelompok berikut. Data tentang nilai ulangan dari 18 siswa di atas jika dikelompokkan adalah sebagai berikut.

Interval Nilai	Titik Tengah	Frekuensi
30–38	34	2
49–47	43	3
48–56	52	4
57–65	61	3
66–74	70	1
75–83	79	5
Jumlah		18

Berdasarkan tabel di atas, ada beberapa pengertian yang perlu dipahami sebagai berikut.

a. Kelas

Interval nilai 30–38, 39–47, 48–56, dan seterusnya dinamakan kelas.

b. Batas Kelas

Pada tabel di atas (halaman 28) terdapat dua macam batas kelas, yaitu batas kelas bawah dan batas kelas atas. Untuk kelas 30–38, batas kelas bawah adalah 30 dan batas kelas atasnya 38.

c. Tepi Kelas

Tepi kelas juga terdapat dua macam, yaitu tepi kelas bawah dan tepi kelas atas. Adapun untuk memperolehnya digunakan aturan sebagai berikut.

Tepi kelas bawah = batas kelas bawah – 0,5
Tepi kelas atas = batas kelas atas + 0,5

d. Panjang Kelas

Panjang kelas masing-masing kelas pada suatu tabel distribusi frekuensi selalu sama.

Panjang kelas dapat diperoleh dengan cara berikut.

Panjang kelas = tepi kelas atas – tepi kelas bawah

e. Titik Tengah (Nilai Tengah) Kelas

Nilai ini diasumsikan sebagai nilai yang mewakili kelas yang bersangkutan. Nilainya ditentukan dengan cara berikut.

$$\text{Titik tengah} = \frac{1}{2}(\text{batas kelas bawah} + \text{batas kelas atas})$$

Pada tabel di atas (halaman 28) nilai tengah untuk kelas 30–38 adalah $\frac{1}{2}(30 + 38) = 34$.

Di samping istilah-istilah di atas, untuk menyusun tabel distribusi frekuensi berkelompok, kalian perlu memahami rentang (jangkauan), *aturan Sturgess*, dan penentuan panjang kelas menurut *Otman Sturgess*.

Rentang atau jangkauan dirumuskan dengan $J_D = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}}$. Hal ini telah kita pelajari sebelumnya. Adapun aturan Sturgess berkaitan dengan penentuan banyak kelas, yaitu sebagai berikut. Jika banyak kelas k dan ukuran data n, menurut aturan Sturgess

$$k = 1 + 3{,}3 \log n$$

Setelah nilai k diperoleh, panjang kelas dapat ditentukan dengan

$$\text{panjang kelas} = \frac{J_D}{k}$$

Seluruh data harus tercakup dalam tabel distribusi berkelompok yang akan dibuat. Agar lebih jelas, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Perhatikan kembali data nilai 18 siswa di atas. Dengan menggunakan aturan Sturgess, buatlah tabel distribusi berkelompoknya.

Jawab:

Dari data yang diberikan, diketahui $n = 20$, $x_{\text{min}} = 30$, dan $x_{\text{maks}} = 80$. Dengan demikian, diperoleh sebagai berikut.

Jangkauan $J_D = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}} = 80 - 30 = 50$

$k = 1 + 3{,}3 \log 18 = 1 + 3{,}3 \times 1{,}255 = 5{,}14 \approx 6$

(Mengapa 5,14 tidak diarahkan ke nilai 5?)

Kemudian, tentukan panjang kelasnya.

$$\text{Panjang kelas} = \frac{J_D}{k} = \frac{50}{6} = 8{,}33 \approx 9.$$

Kelas	Frekuensi
30–38	2
39–47	3
48–56	4
57–65	3
66–74	1
75–83	5
Jumlah	18

Dengan demikian, kita dapat membuat kelas pertama 30–38, kelas kedua 39–47, dan seterusnya.

Oleh karena itu, tabel distribusi frekuensi berkelompok yang dapat dibuat menurut aturan Sturgess adalah sebagai berikut.

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Carilah data berat badan teman-temanmu kelas XI IPS. Kemudian, buatlah tabel distribusi frekuensinya dengan langkah-langkah tersebut.

Mari Berdiskusi

Inkuiri

Menurut kalian, apakah aturan Sturgess selalu dapat digunakan? Jika ya, berikan alasanmu. Namun, jika tidak selalu dapat digunakan, coba kalian tunjukkan satu kasus saja yang menunjukkan tidak berlakunya aturan Sturgess.

3. Tabel Distribusi Frekuensi Kumulatif

Setelah mempelajari tabel distribusi frekuensi berkelompok, kalian diajak untuk memahami distribusi frekuensi kumulatif. Tabel ini ada dua macam, yaitu

a. tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari;
b. tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.

Tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari merupakan tabel yang mencakup daftar jumlah frekuensi semua nilai yang kurang dari atau sama dengan nilai tepi atas pada setiap kelas.

Tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari merupakan tabel yang mencakup jumlah frekuensi semua nilai yang lebih dari atau sama dengan nilai tepi bawah pada setiap kelas. Perhatikan kembali tabel distribusi frekuensi berkelompok yang telah diuraikan di depan yang ditampilkan kembali dengan penambahan beberapa kolom seperti berikut.

Kelas	Frekuensi	Fekuensi Kumulatif Kurang dari	Frekuensi Kumulatif Lebih dari
30–38	2	2	18
39–47	3	2 + 3 = 5	18 – 3 = 15
48–56	4	5 + 4 = 9	15 – 4 = 11
57–65	3	9 + 3 =12	11 – 3 = 8
66–74	1	12 + 1 = 13	8 – 1 = 7
75–83	5	13 + 5 = 18	7 – 5 = 2

Perhatikan kembali tabel di atas. Pada tabel di atas dapat diterangkan sebagai berikut.

Untuk kelas 30–38, frekuensi kumulatif kurang darinya adalah 2. Artinya, terdapat 2 nilai data yang bernilai kurang dari atau sama dengan tepi atas kelas ini, yaitu 38,5. Untuk kelas 39–47, frekuensi kumulatif kurang darinya adalah 5. Artinya, terdapat 5 nilai data yang bernilai kurang dari atau sama dengan tepi atas kelas ini, yaitu 47,5. Demikian seterusnya, sedangkan frekuensi kumulatif lebih dari untuk kelas 30–38 adalah 18. Artinya, terdapat 18 nilai data yang lebih dari atau sama dengan tepi bawah kelas ini, yaitu 29,5. Untuk kelas 39–47, frekuensi kumulatif lebih darinya adalah 15. Artinya, terdapat 15 nilai data yang bernilai lebih dari atau sama dengan tepi bawah kelas ini, yaitu 38,5. Demikian seterusnya.

Di samping frekuensi kumulatif seperti di atas, kadang-kadang kita perlu mendapatkan nilai frekuensi kumulatif relatif. Nilai ini dapat ditentukan sebagai berikut.

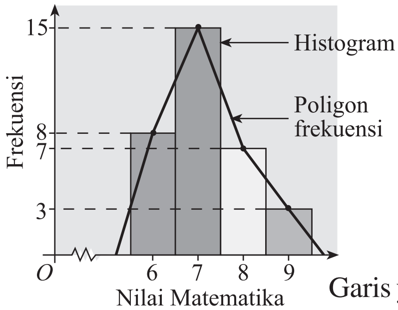
$$\text{Frekuensi kumulatif relatif} = \frac{\text{frekuensi kumulatif}}{\text{jumlah data}} \times 100\%$$

Mari Berdiskusi
Inovasi

Bagaimanakah caranya menentukan nilai kuartil bawah, tengah, dan atas melalui frekuensi kumulatif relatif? Jelaskan.

D. Menggambar Histogram, Poligon Frekuensi, dan Ogif

Penyajian data dengan menggunakan histogram memudahkan kita untuk mengetahui distribusi frekuensi, pemusatan, dan penyebaran data itu. Histogram berupa susunan persegi panjang yang saling berimpit pada salah satu sisinya. Untuk data berkelompok, lebar persegi panjang merupakan panjang kelas dan tingginya adalah frekuensinya. Pada histogram, jika titik-titik tengah dari bagian sisi atas persegi panjang dihubungkan, diperoleh suatu garis (kurva) tertentu. Kurva ini dinamakan *poligon frekuensi*. Perhatikan gambar histogram dan poligon frekuensinya berikut.



Gambar 1.11

Gambar di samping menyajikan histogram data nilai Matematika dari 33 siswa dengan rincian sebagai berikut:
8 siswa mendapat nilai 6;
15 siswa mendapat nilai 7;
7 siswa mendapat nilai 8;
3 siswa mendapat nilai 9.

Garis yang menghubungkan frekuensi dari nilai-nilai Matematika itu dinamakan *poligon frekuensi*.

Setelah kalian memahami poligon frekuensi, kalian akan diajak untuk mengenali *ogif* (*ogive*). Jika poligon frekuensi merupakan garis atau kurva, yang menghubungkan frekuensi dari setiap titik atau kelompok titik (kelas), ogif menghubungkan titik-titik dari frekuensi kumulatifnya. Jadi, *ogif* disebut juga poligon frekuensi kumulatif. Ogif yang mempunyai kecenderungan gradien (kemiringan) garis singgung positif disebut *ogif positif*, sedangkan yang mempunyai gradien garis singgung negatif disebut *ogif negatif*. Untuk jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Nilai Ulangan	Frekuensi
30–40	3
41–51	6
52–62	8
63–73	12
74–84	10
85–95	6

Gambarlah ogif positif dan ogif negatif dari data yang tersaji pada tabel di samping.

Jawab:

Untuk data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi berkelompok, terlebih dahulu tentukan tepi bawah (untuk membuat ogif negatif) dan tepi atas (untuk menentukan ogif positif). Dari data di atas, jika dijelaskan dengan tepi kelas (tepi kelas atas atau bawah) adalah sebagai berikut.

Ada 3 siswa yang nilainya kurang dari 40,5.
Ada 9 siswa yang nilainya kurang dari 51,5.
Ada 17 siswa yang nilainya kurang dari 62,5.
Ada 29 siswa yang nilainya kurang dari 73,5.
Ada 39 siswa yang nilainya kurang dari 84,5.
Ada 45 siswa yang nilainya kurang dari 95,5.

Jika dinyatakan dengan tabel, hasilnya adalah sebagai berikut.

Nilai Ulangan	Frekuensi Kumulatif Kurang dari
≤ 40,5	3
≤ 51,5	9
≤ 62,5	17
≤ 73,5	29
≤ 84,5	39
≤ 95,5	45

Dengan cara yang sama, diperoleh sebagai berikut.
Ada 45 siswa yang nilainya lebih dari 29,5.
Ada 42 siswa yang nilainya lebih dari 40,5.
Ada 36 siswa yang nilainya lebih dari 51,5.
Ada 28 siswa yang nilainya lebih dari 62,5.
Ada 16 siswa yang nilainya lebih dari 73,5.
Ada 6 siswa yang nilainya lebih dari 84,5.

Jika dinyatakan dalam tabel, hasilnya adalah sebagai berikut.

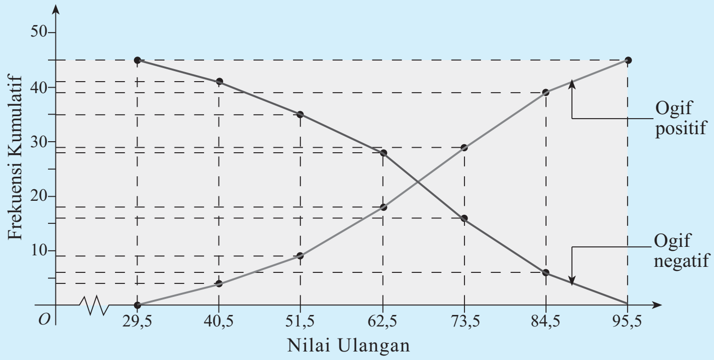
Nilai Ulangan	Frekuensi Kumulatif Lebih dari
≥ 29,5	45
≥ 40,5	42
≥ 51,5	36
≥ 62,5	28
≥ 73,5	16
≥ 84,5	6

Tugas: Kreativitas

• Kerjakan di buku tugas

Dari tugas yang telah kalian lakukan (pada halaman 24), buatlah tabel distribusi frekuensi kumulatif, frekuensi kumulatif relatif, histogram, poligon, dan ogifnya.

Tabel yang berkaitan dengan frekuensi kumulatif kurang dari jika digambarkan dengan diagram garis, diperoleh ogif positif dan tabel yang berkaitan dengan frekuensi kumulatif lebih dari akan diperoleh ogif negatif. Gambar kedua ogif tersebut adalah sebagai berikut.



Gambar 1.12

Jendela Informasi

Informasi lebih lanjut

Sumber: *www.mate-mati-kaku.com*

Florence Nightingale (1820–1910)

Florence Nightingale

Salah satu tokoh statistika dunia adalah **Florence Nightingale** (1820–1910) yang lahir di Italia. Dia adalah seorang perawat yang bekerja di rumah sakit militer di Turki. Dia berusaha memperbaiki administrasi rumah sakit tersebut dengan menggunakan statistika. Dia percaya pada keunggulan statistika dan menggunakannya secara intensif untuk memecahkan masalah sosial dan kesehatan. Dia juga berusaha untuk memasukkan statistika ke dalam kurikulum di Oxford. Dia menciptakan *boxcomb chart*, suatu model penyajian data secara visual. Tulisannya dibahas pada Kongres Statistika Internasional di London pada tahun 1860. Enam tahun kemudian, ia terpilih sebagai anggota kehormatan asosiasi statistika Amerika. Karya Nighti-ngale, yaitu penyajian data dalam suatu *chart*, masih dioptimalkan. Carilah informasi lebih lengkap tentang tokoh ini dan sumbangannya bagi dunia matematika. Kalian dapat memanfaatkan perpustakaan atau internet.

Sumber: *Ensiklopedi Pengetahuan*, 2007

E. Menentukan Nilai Statistik Data Berkelompok

Di depan, kalian telah belajar menentukan nilai statistik data tunggal, seperti mean, median, modus, kuartil, dan desil. Kalian juga telah mempelajari ukuran penyebaran data, di samping ukuran pemusatannya. Sekarang kalian diajak untuk belajar memahami ukuran mean, median, dan modus suatu data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi (data berkelompok).

1. Menentukan Nilai Mean

Perhatian

Perhitungan statistik dengan menganggap nilai tengah x_i mewakili kelas interval ini mengasumsikan bahwa data terdistribusi merata dalam interval itu.

Untuk menentukan nilai mean suatu data yang disajikan dalam tabel distribusi (berkelompok) dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan menentukan rata-rata data yang diwakili titik tengah kelas interval dan dengan rata-rata sementara.

a. Menentukan Nilai Mean dengan Menganggap Interval Kelas Diwakili Titik Tengahnya

Kalian telah mempelajari nilai mean data tunggal. Jika data x_i mempunyai frekuensi f_i, nilai meannya dapat ditentukan dengan

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ dibaca ”sigma x_i dikalikan f_i dari $i = 1$ sampai n”.

Serupa dengan data tunggal, jika kelas interval ke-i diwakili oleh nilai tengah x_i dengan frekuensinya f_i, dan jumlah kelas r, nilai meannya dapat ditentukan dengan rumus

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

Contoh:

Tentukan nilai mean dari data nilai ulangan dari 45 siswa berikut.

Nilai Ulangan	Frekuensi
30–40	3
41–51	6
52–62	8
63–73	12
74–84	10
85–95	6
Jumlah	45

Jawab:

Untuk dapat menentukan nilai meannya, terlebih dahulu tentukan nilai tengah masing-masing kelasnya.

Nilai Ulangan	Nilai Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$x_i f_i$
30–40	35	3	105
41–51	46	6	276
52–62	57	8	456
63–73	68	12	816
74–84	79	10	790
85–95	80	6	480
Jumlah		45	2.923

Dengan demikian, diperoleh $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \dfrac{2.923}{45} = 64{,}96.$

b. Menentukan Nilai Mean dengan Rata-Rata Sementara

Nilai mean dari suatu data dapat ditentukan melalui penjumlahan rata-rata sementara dengan rata-rata simpangan suatu data (titik tengah). Misalkan rata-rata sementara $\overline{x}_s$, rata-rata data sesungguhnya $\overline{x}$, dan simpangannya adalah $d_i = x_i - \overline{x}_s$. Rata-rata sesungguhnya dapat ditentukan dengan

$\overline{x} = \overline{x}_s$ + rata-rata simpangan

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

Perhatikan kembali contoh di atas. Misalkan kita akan menentukan nilai rata-ratanya melalui rata-rata sementara $\overline{x}_s = 68$.

Data di atas dapat ditampilkan dengan tabel berikut.

Nilai Ulangan	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	Simpangan (d_i)	$f_i d_i$
30–40	35	3	–33	–99
41–51	46	6	–22	–132
52–62	57	8	–11	–88
63–73	$68 = \overline{x}_s$	12	0	0
74–84	79	10	11	110
85–95	80	6	12	72
Jumlah		45		–137

Dengan demikian, diperoleh rata-rata $\overline{x}$ sebagai berikut.

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i}$$

$$= 68 + \frac{(-137)}{45}$$

$$= 68 - 3{,}04 = 64{,}96$$

c. Menentukan Nilai Mean dengan *Coding*

Kata *coding* diartikan sebagai kode atau sandi. Cara menentukan mean dengan *coding* tidak jauh berbeda dengan cara menentukan mean melalui rata-rata sementara. Jika kalian menentukan mean melalui rata-rata sementara dengan menggunakan rumus

$$\overline{x} = \overline{x}_s + k\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

Cara menghitung mean dengan *coding* digunakan rumus

$$\overline{x} = \overline{x}_s + k\frac{\sum_{i=1}^{r} f_i c_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

dengan

$\overline{x}_s$ = rataan sementara

k = panjang kelas

$d_i = x_i - \overline{x}_s$ simpangan dari rataan sementara

c_i = *coding*

Pada cara *coding*, pada tanda kelas $\overline{x}_s$ diberi nilai $c_0 = 0$. Selanjutnya, tanda kelas yang kurang dari $\overline{x}_s$ berturut-turut diberi nilai $c_1 = -1$, $c_2 = -2$, $c_3 = -3$, dan seterusnya, sedangkan tanda kelas yang lebih dari $\overline{x}_s$ berturut-turut diberi nilai $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$, dan seterusnya. Nilai-nilai c_i ditentukan dengan rumus

$$c_i = \frac{x_i - \overline{x}_s}{i}$$

Contoh:

Perhatikan tabel di bawah yang memperlihatkan daftar distribusi frekuensi nilai Matematika 100 siswa. Tentukan rataan hitungnya dengan menggunakan cara *coding*.

Nilai	f
50–52	10
53–55	34
56–58	28
59–61	20
62–64	8

Jawab:

Perhitungan dengan menggunakan cara *coding*.

Misal kita menggunakan rata-rata sementara $\bar{x}_s = 60$.

Nilai Ulangan	Frekuensi (f_i)	Nilai Tengah (x_i)	$c_i = \dfrac{x_i - \bar{x}_s}{i}$	$f_i c_i$
50–52	6	51	–3	–18
55–55	38	54	–2	–76
56–58	28	57	–1	–28
59–61	16	60	0	0
62–64	12	63	1	12
Jumlah	100			–110

$\bar{x}_s = 60$

$$\bar{x} = 60 + 3\left(\frac{-110}{100}\right) = 56{,}7$$

Jadi, rataan hitungnya adalah 56,7.

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Dengan menggunakan data pada contoh halaman 35, tunjukkan dengan cara *coding* bahwa rata-ratanya 64,96. Uji dengan berbagai pengambilan rata-rata sementara.

2. Menentukan Median dan Kuartil Data Berkelompok

Letak dan nilai-nilai kuartil data tunggal telah dipelajari pada subbab sebelumnya. Untuk data berkelompok yang disusun dalam tabel distribusi frekuensi, kuartil dapat ditentukan dengan cara berikut.

Perhatikan **Gambar 1.13** (a). Gambar tersebut menunjukkan histogram dari sebuah data berkelompok dengan kelas interval k dan frekuensi masing-masing f_1, f_2, f_3, f_4, dan f_5. Berdasarkan **Gambar 1.13** (a), kita dapat membuat histogram frekuensi kumulatif relatif seperti tampak pada **Gambar 1.13** (b).

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

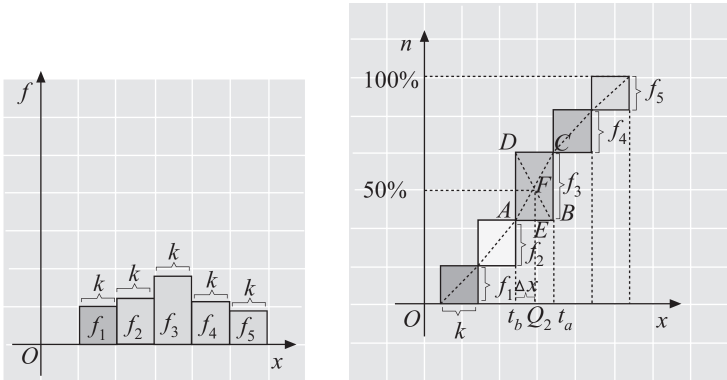
Data berikut adalah tinggi badan sekelompok siswa.

Tinggi (cm)	Frekuensi
151 – 155	5
156 – 160	20
161 – 165	k
166 – 170	26
171 – 175	7

Jika median data di atas 163,5 cm maka nilai k = ...

a. 40
b. 42
c. 44
d. 46
e. 48

SPMB 2004



(a) (b)

Gambar 1.13

Median memiliki frekuensi kumulatif relatif 50% sehingga letak median dapat ditentukan pada grafik di atas, yaitu pada kelas ketiga. Pandanglah persegi panjang *ABCD* pada kelas ketiga **Gambar 1.13** (b). Pada gambar tersebut tampak bahwa segitiga *AEF* sebangun dengan segitiga *ABC*. Oleh karena itu, berlaku perbandingan sebagai berikut.

$$\frac{\text{panjang } AE}{\text{panjang } AB} = \frac{\text{panjang } EF}{\text{panjang } BC}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\Delta x}{k} = \frac{50\% n - (f_1 + f_2)}{f_3} \quad \text{.............. (Ingat: } f_3 = f_{Q_2}\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta x = k\left[\frac{50\% n - (f_1 + f_2)}{f_{Q_2}}\right]$$

Karena $Q_2 = t_b + \Delta x$ maka diperoleh

$$Q_2 = t_b + k\left[\frac{50\% n - (f_1 + f_2)}{f_{Q_2}}\right]$$

Jika F_2 menyatakan frekuensi kumulatif sebelum kelas Q_2 maka rumus di atas dapat ditulis dengan

$$Q_2 = t_b + k\left[\frac{\frac{2n}{4} - F_2}{f_{Q_2}}\right]$$

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Dengan cara seperti kalian menentukan rumus Q_2, coba tentukan rumus untuk menentukan Q_1 dan Q_3.

Jika kalian mengerjakan tugas di atas dengan benar, tentu akan memperoleh rumus berikut.

$$Q_1 = t_b + k\left[\frac{\frac{n}{4} - F_1}{f_{Q_1}}\right] \text{ dan } Q_3 = t_b + k\left[\frac{\frac{3n}{4} - F_3}{f_{Q_3}}\right]$$

Secara umum, rumus untuk menentukan kuartil pertama, kedua, dan ketiga dapat kita tuliskan sebagai berikut.

$$Q_i = t_b + k\left[\frac{\frac{in}{4} - F_i}{f_{Q_i}}\right]$$

Keterangan:
Q_i = kuartil ke-i
i = 1, 2, 3
t_b = tepi bawah kelas kuartil ke-i
k = panjang kelas
n = ukuran data
F_i = frekuensi kumulatif sebelum kelas kuartil ke-i
f_{Q_i} = frekuensi kelas kuartil ke-i

Posisi Q_1 terletak pada datum ke-$\left(\frac{in}{4}\right)$; $i = 1, 2, 3$.

Contoh:

Tentukan median, kuartil bawah, dan kuartil atas dari data yang tersaji pada tabel berikut.

Nilai	Frekuensi (f)	$F_{\text{kumulatif}}$
30–39	3	3
40–49	5	8
50–59	2	10
60–69	13	23
70–79	25	48
80–89	12	60
90–99	20	80

Jawab:
Dari data di atas, dapat ditentukan sebagai berikut.
Median senilai dengan kuartil tengah (Q_2) yang terletak pada kelas interval dengan frekuensi kumulatif mencapai $\frac{2}{4}$ dari 80, yaitu kelas 70–79.
Oleh karena itu, dapat ditentukan bahwa
tepi bawah $t_b = 70 - 0,5 = 69,5$,
tepi atas = $t_a = 79 + 0,5 = 79,5$,
panjang kelas $k = 79,5 - 69,5 = 10$,
frekuensi kumulatif sebelum kelas median $F_2 = 23$, dan
frekuensi kelas median $f = 25$.
Jadi, diperoleh nilai median sebagai berikut.

$$\text{Median} = Q_2 = 69{,}5 + 10\left[\frac{\frac{2(80)}{4} - 23}{25}\right]$$

$$= 69{,}5 + 6{,}8$$

$$= 76{,}3$$

Dengan cara yang sama, kalian akan dapat dengan mudah menentukan Q_1 dan Q_3 sebagai berikut.

Letak Q_1 pada datum ke-$\frac{1}{4} \times 80$ = datum ke-20, yaitu kelas ke-4 (kelas 60–69).

$t_b = 59{,}5$; $k = 10$; $F_1 = 10$; $f_{Q_1} = 13$.

$$Q_1 = 59{,}5 + 10\left[\frac{\frac{1(80)}{4} - 10}{13}\right]$$

$$= 59{,}5 + 7{,}69$$

$$= 67{,}19$$

Untuk Q_3 letaknya di datum ke-$\frac{3}{4} \times 80$ = datum ke- 60, yaitu kelas keenam (kelas 80–89).

$t_b = 79{,}5$; $k = 10$; $F_3 = 48$; $f_{Q_3} = 12$.

$$Q_3 = 79{,}5 + 10\left[\frac{\frac{3(80)}{4} - 48}{12}\right]$$

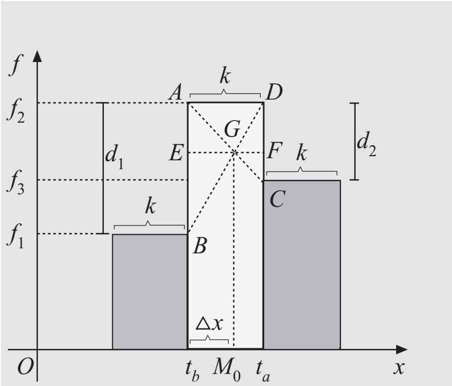
$$= 79{,}5 + 10$$

$$= 89{,}5$$

3. Menentukan Modus Data Berkelompok

Misalkan suatu sekolah memiliki siswa yang rata-rata pandai. Dalam hal ini, modus dari siswa tersebut adalah pandai, meskipun ada juga yang kurang pandai. Hal ini menunjukkan bahwa pada data kualitatif, modus sering diartikan sebagai rata-rata. Pada data kuantitatif modus diartikan sebagai nilai yang sering muncul dari data itu atau nilai yang memiliki frekuensi tertinggi. Kalian telah mempelajari modus dari data tunggal. Sekarang mari kita mempelajari modus data berkelompok.

Misalkan suatu data yang terdiri atas 3 kelas disajikan dalam histogram berikut.



Gambar 1.14

Pada gambar di samping tampak bahwa $\Delta\, ABG$ sebangun dengan $\Delta\, CDG$. Dalam hal ini, panjang $AB = d_1$, $CD = d_2$, $EG = \Delta\, x$, dan $GF = k - \Delta x$.

Dari kesebangunan itu, berlaku perbandingan berikut.

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EG}{GF} \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{\Delta x}{k - \Delta x}$$

$$\Leftrightarrow d_2 \Delta x = d_1(k - \Delta x)$$

$$\Leftrightarrow d_2 \Delta x = d_1 k - d_1 \Delta x$$

$$\Leftrightarrow d_1 \Delta x + d_2 \Delta x = d_1 k$$

$$\Leftrightarrow (d_1 + d_2) \Delta x = d_1 k$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

Dari **Gambar 1.14** tampak bahwa modus adalah $M_0 = t_b + \Delta x$ sehingga

$$M_0 = t_b + \Delta x \Leftrightarrow M_0 = t_b + k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right).$$

Jadi, modus data berkelompok dapat ditentukan dengan rumus

$$M_0 = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

Keterangan:

M_0 = modus
t_b = tepi bawah kelas modus
k = panjang kelas
d_1 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sebelumnya
d_2 = selisih frekuensi kelas modus dengan kelas sesudahnya

Contoh:

Tentukan modus data berikut.

Berat Badan (kg)	Frekuensi (*f*)
35–40	3
41–46	5
47–52	8
53–58	2

Jawab:

Dari data di atas, tampak bahwa modus terletak pada kelas 47–52 dengan frekuensi $f = 8$ dan panjang kelas $k = 6$. Oleh karena itu, $t_b = 46{,}5$, $d_1 = 8 - 5 = 3$, dan $d_2 = 8 - 2 = 6$. Perhatikan tabel di bawah.

Berat Badan (kg)	Frekuensi (f)
35–40	3
41–46	5
47–52	8
53–58	2

$\left.\begin{matrix}5\\8\end{matrix}\right\}\ d_1 = 3$ $\qquad d_2 = 6\ \left\{\begin{matrix}8\\2\end{matrix}\right.$

kelas modus: 47–52

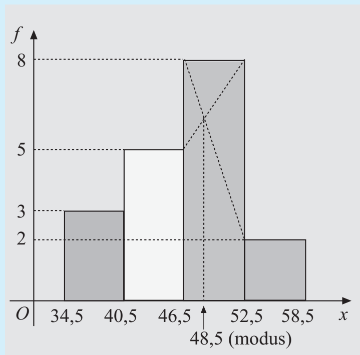
Jadi, modus data itu adalah

$$M_0 = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

$$= 46{,}5 + 6\left[\frac{3}{3+6}\right]$$

$$= 46{,}5 + 2$$

$$= 48{,}5$$



Gambar 1.15

Secara visual, modusnya dapat dilihat pada **Gambar 1.15**.

4. Menentukan Desil Data Berkelompok

Seperti yang telah kalian ketahui, desil merupakan nilai-nilai yang membagi data yang sudah diurutkan menjadi sepuluh bagian yang sama banyak. Karena desil mambagi data menjadi sepuluh bagian yang sama banyak, ada sembilan nilai desil, yaitu desil pertama (D_1), desil kedua (D_2), desil ketiga (D_3), desil keempat (D_4), desil kelima (D_5), desil keenam (D_6), desil ketujuh (D_7), desil kedelapan (D_8), dan desil kesembilan (D_9). Cara menentukan desil data tunggal telah kalian pelajari sebelumnya. Sekarang kita akan membahas cara menentukan desil data berkelompok.

Cara menentukan desil pada data berkelompok sama (analog) seperti kalian menentukan kuartil data berkelompok. Dengan asumsi data terdistribusi merata dalam kelas-kelasnya, desil data berkelompok ditentukan dengan rumus berikut.

$$D_i = t_b + \left(\frac{\frac{i}{10}n - F}{F_{D_i}} \right) k$$

Keterangan:

i = 1, 2, 3, ..., 9.

n = $\sum f$

t_p = tepi kelas D_i

k = panjang kelas

f_{D_i} = frekuensi kelas D_i

F = frekuensi kumulatif sebelum kelas D_i

Untuk menentukan posisi desil ke-i, cari posisi datum dalam kelasnya. Caranya

$$D_i = \text{datum ke-}\left(\frac{in}{10}\right);\ i = 1, 2, ..., 9.$$

Contoh:

Tentukan desil ke-1, ke-5, dan ke-9 dari data berikut.

Nilai	Frekuensi
40–44	9
45–49	9
50–54	22
55–59	30
60–64	15
65–69	8
70–74	7

Jawab:

Nilai	Tepi Kelas	Frekuensi	*f* Kumulatif
40–44	39,5–44,5	9	9
45–49	44,5–49,5	9	18 $\leftarrow x_{10} = D_1$
50–54	49,5–54,5	22	40
55–59	54,5–59,5	30	70 $\leftarrow x_{50} = D_5$
60–64	59,5–64,5	15	85
65–69	64,5–69,5	8	93 $\leftarrow x_{90} = D_9$
70–74	69,5–74,5	7	100

a. Desil ke-1

$n \;=\; \sum f \;= 100;\; i = 1$

$D_1 = \text{datum ke-}\left(\frac{in}{10}\right)$

$= \text{datum ke-}\left(\frac{1 \times 100}{10}\right)$

$= \text{datum ke-}10.$

Pada tabel di atas, tampak bahwa x_{10} terletak dalam kelas kedua, dengan interval 44,5–49,5.
Selanjutnya, $t_b = 44{,}5;\; f_{D_1} = 9;\; F = 9;\; k = 5.$

Jadi, $D_i = t_b + \left(\dfrac{\frac{i}{10}n - F}{F_{D_i}}\right)k$

$$= 44{,}5 + \left(\frac{\frac{1}{10}\times 100 - 9}{9}\right)\times 5$$

$= 44{,}5 + 0{,}555$
$= 45{,}05$

b. Desil ke-5

$n \;=\; \sum f \;= 100;\; i = 5$

$D_5 = \text{datum ke-}\left(\frac{in}{10}\right)$

$= \text{dalam ke-}\left(\frac{5 \times 100}{10}\right)$

$= \text{datum ke-}50.$

Pada tabel di atas, tampak bahwa x_{50} terletak dalam kelas keempat, dengan interval 55–59.
Selanjutnya, $t_b = 54{,}5;\; f_{D_5} = 30;\; F = 40;\; k = 5.$

Jadi, $D_5 = t_b + \left(\dfrac{\frac{5}{10}n - F}{f_{D_5}}\right)k$

$$= 54{,}5 + \left(\frac{\frac{5 \times 100}{10} - 40}{30} \right) 5$$

$$= 45{,}5 + 1{,}667$$
$$= 56{,}167$$

c. Desil ke-9

$n = \sum f = 100; i = 9$

D_9 = datum ke-$\left(\frac{in}{10}\right)$ = dalam ke-$\left(\frac{9 \times 100}{10}\right)$ = datum ke-90.

Pada tabel, tampak bahwa x_{90} terletak dalam kelas keenam dengan interval 65–69.
Selanjutnya, $t_b = 64{,}5; f_{D_9} = 8; F = 85; k = 5$.

Jadi, $D_9 = t_b + \left(\frac{\frac{9}{10} n - F}{F_{D_9}} \right) k$

$$= 64{,}5 + \left(\frac{\frac{9 \times 100}{10} - 85}{8} \right) \times 5$$

$$= 64{,}5 + 3{,}125$$
$$= 67{,}625$$

5. Menentukan Ukuran Penyebaran Data

Pada pembahasan kali ini, kita hanya akan membahas ukuran penyebaran simpangan rata-rata dan varians suatu data berkelompok. Selain kedua ukuran itu, seperti yang telah kalian ketahui, ada ukuran penyebaran yang lain seperti jangkauan data, jangkauan antarkuartil, simpangan kuartil, dan ragam. Kesemuanya ini telah kalian pelajari di depan.

a. Simpangan Rata-Rata

Suatu ukuran yang mencerminkan penyebaran setiap nilai data terhadap nilai rata-ratanya dinamakan *simpangan rata-rata*. Simpangan rata-rata (S_R) dapat dirumuskan dengan

$$S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right|$$

$|x_i - \overline{x}|$ dibaca: "harga mutlak dari x_i dikurangi x bar."

Keterangan: $\overline{x}$ = rata-rata
x_i = datum ke-i
n = ukuran data

Jika data tersusun dalam distribusi frekuensi, simpangan rata-rata dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.

Misalkan terdapat data dengan
x_1 adalah nilai tengah kelas; ke-1 frekuensinya f_1;
x_2 adalah nilai tengah kelas; ke-2 frekuensinya f_2;
⋮ ⋮ ⋮
x_r adalah nilai tengah kelas; ke-r frekuensinya f_r;
dan rata-rata data adalah $\overline{x}$.

Dengan demikian, simpangan rata-ratanya adalah

$$S_R = \frac{|x_1 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + ... + |x_r - \overline{x}|}{f_1 + f_2 + ... + f_r}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i\left|x_i - \overline{x}\right|}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

Jadi, simpangan rata-rata data yang tersusun dalam distribusi frekuensi yang terdiri atas r kelas, dengan x_i nilai tengah kelas ke-i adalah

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i\left|x_i - \overline{x}\right|}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

Keterangan:
f_i = frekuensi kelas ke-i
$\overline{x}$ = rata-rata
r = banyak kelas
x_i = nilai tengah kelas ke-i

Contoh:

Tentukan simpangan rata-rata data berikut.

a. 3, 2, 5, 4, 3, 2, 4

b.

Nilai	Frekuensi
30–39	3
40–49	7
50–59	6
60–69	4

Jawab:

a. Diketahui data: 3, 2, 5, 4, 3, 2, 4. Data ini jika diurutkan dari terkecil ke terbesar, diperoleh susunan 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5.

Rata-rata $\bar{x} = \dfrac{2+2+3+3+4+4+5}{7} = 3{,}29.$

$$\sum_{i=1}^{7} |x_i - \bar{x}| = |2-3{,}29| + |2-3{,}29| + |3-3{,}29| + |3-3{,}29| + |4-3{,}29| + |4-3{,}29| + |5-3{,}29|$$
$$= 1{,}29 + 1{,}29 + 0{,}29 + 0{,}29 + 0{,}71 + 0{,}71 + 1{,}71$$
$$= 6{,}29$$

Simpangan rata-rata

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{7} |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{6{,}29}{7} = 0{,}90$$

b. Data di atas dapat ditampilkan lebih lengkap dalam tabel berikut.

Nilai	f_i	x_i	$f_i\,x_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\,\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
30–39	3	34,5	103,5	15,5	46,5
40–49	7	44,5	311,5	5,5	38,5
50–59	6	54,5	327,0	4,5	27,0
60–69	4	64,5	258,0	14,5	58
Jumlah	20		1.000	40	170

Dari tabel di atas, diperoleh

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i} = 50.$$

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{r} |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{r} f_i} = \frac{170}{20} = 8{,}5$$

Jadi, simpangan rata-rata data ini adalah 8,5.

b. Varians

Selain simpangan rata-rata, ukuran penyebaran yang lain adalah *varians* atau *ragam* (S^2). Jika kita menjumlahkan selisih data dengan rata-ratanya, diperoleh $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$. Varians didefinisikan sebagai nilai dari $\frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x})^2$. Nilai ini tidak akan sama dengan nol. Karl Pearson menentukan varians data tunggal dengan rumus

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Rumus ini juga dapat dinyatakan dalam bentuk lain. Namun sebelumnya, yang perlu kalian ketahui dalam operasi sigma berlaku

1. $\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$
3. $\sum_{i=1}^{n} k = kn$

(Materi notasi sigma dan operasinya lebih lanjut akan kalian pelajari di kelas XII)

Sekarang perhatikan rumus varians data tunggal di atas.

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2\bar{x}x_i + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^2\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - 2\overline{x}\sum_{i=1}^{n} x_i + n\overline{x}^2\} \text{ .... } (2\overline{x} \text{ dan } \overline{x}^2 \text{ konstanta})$$

$$= \frac{1}{n}\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - 2.\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i + n(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)^2\}$$

$$\text{.......... (karena } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{)}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - 2.\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right\}$$

Jadi, varians data tunggal juga dapat ditentukan dengan rumus

$$S^2 = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\ 2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right\}$$

Bentuk di atas dapat dimodifikasi menjadi sebagai berikut.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2$$

Kalian tahu bahwa $\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \overline{x^2}$ dan $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)^2 = (\overline{x})^2$.

Perhatian

Para pakar statistik, seperti Wilks dan Fisher Irwin, menentukan varians menggunakan pembagi $(n - 1)$ jika $n < 100$.
Jadi, variansnya dihitung dengan rumus

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Sumber: *Theory and Problem of Statistics*, 1972

Jadi, rumus varians di atas dapat dituliskan dalam bentuk berikut.

$$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$$

Jika data dinyatakan dalam data berkelompok yang terdiri atas r kelas, variansnya dapat ditentukan dengan

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i\,(x_i - \bar{x})^2$$

dengan x_i = nilai tengah kelas dan $n = \sum_{i=1}^{r} f_i$.

Mari Berdiskusi

Menumbuhkan kreativitas

Kalian tahu bahwa mean (rata-rata) dari data yang tersaji dalam distribusi frekuensi berkelompok adalah

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

Dengan menggunakan cara-cara yang sama dengan penguraian rumus varians data tunggal, buktikan bahwa bentuk lain dari rumus varians data berkelompok adalah

$$S^2 = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{r} x_i^{\,2} f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i f_i\right)^2}{n}\right\}$$

Ingat, x_i adalah nilai tengah kelas interval.

Kalian telah mengetahui bagaimana cara menentukan varians dari suatu data, baik data tunggal maupun data berkelompok. Akar dari varians disebut *standar deviasi*. Dengan demikian, standar deviasi dirumuskan dengan $S = \sqrt{S^2}$.

1) Untuk data tunggal, standar deviasinya adalah

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n}\right\}}$$

2) Untuk data dalam distribusi frekuensi, standar deviasinya adalah

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{r} x_i^2 f - \frac{(\sum_{i=1}^{r} x_i f_i)^2}{n}\right\}}$$

Contoh:

Tentukan varians dan standar deviasi dari data berikut.

a. 4, 5, 6, 7, 8

b.

Nilai	Frekuensi
30–39	3
40–49	7
50–59	6
60–69	4

(Gunakan bantuan *scientifics calculator* untuk perhitungan-perhitungan statistik)

Jawab:

a. Diketahui data: 4, 5, 6, 7, 8.

Cara 1:

Dari soal diketahui $n = 5$ dan $\bar{x} = \frac{4+5+6+7+8}{5} = 6$.

$\sum(x_i - \bar{x})^2 = (4 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2 = 10$

Jadi, $S^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{5}(10) = 2$.

Standar deviasinya adalah $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$.

Cara 2:

Perhatikan tabel di samping. Dari data di samping, diperoleh

$\sum_{i=1}^{5} x_i = 30$ dan $\sum x_i^2 = 190$.

(Gunakan kalkulator untuk menghitungnya)

x	x^2
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
30	190

Dengan demikian, diperoleh

$$S^2 = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{5} x_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{5} x_i\right)^2}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{5}\left\{190 - \frac{30^2}{5}\right\} = 2$$

Jadi, standar deviasinya adalah $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{2} = 1{,}414$.

b. *Cara 1:*

Kalian telah dapat menentukan rata-rata data ini adalah $\bar{x}$ = 50 (lihat pembahasan simpangan rata-rata contoh b hal 48).

Dengan demikian, dapat kita tampilkan tabel berikut.

Dengan demikian, diperoleh

Nilai	f_i	x_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
30–39	3	34,5	240,25	720,75
40–49	7	44,5	30,25	211,75
50–59	6	54,5	20,25	121,50
60–69	4	64,5	210,25	841,00
Jumlah	20			1.895

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{4} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{20}(1.895) = 94{,}75$$

Standar deviasinya adalah $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{94,75} = 9{,}73$.

Cara 2:

Kita juga dapat menentukan varians data ini dengan menggunakan rumus

$$S^2 = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{r} x_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{r} x_i f_i\right)^2}{n}\right\}.$$

Sebelumnya, untuk mempermudah perhitungan, kita gunakan tabel perhitungan berikut.

Nilai	f_i	x_i	x_i^2	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
30–39	3	34,5	1.190,25	103,5	3.570,75
40–49	7	44,5	1.980,25	311,5	13.861,75
50–59	6	54,5	2.970,25	327,0	17.821,5
60–69	4	64,5	4.160,25	258,0	16.641
Jumlah	20		10.301	1.000	51.895

Dari nilai-nilai pada tabel di atas, kita dapat menentukan varians yang dimaksud, yaitu

$$S^2 = \frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{4} x_i^2 f_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{4} x_i f_i\right)^2}{n}\right\}$$

$$= \frac{1}{20}\left\{51.895 - \frac{(1.000)^2}{20}\right\} \text{ .... (Ingat: } \sum_{i=1}^{r} f_i \ = n)$$

$$= 94{,}75$$

Jadi, standar deviasinya adalah $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{94,75}$ = 9,73.

Tampak bahwa perhitungan standar deviasi dengan kedua rumus di atas memberikan hasil yang sama.

Soal Kompetensi 2

• Kerjakan di buku tugas

1. Perhatikan tabel berikut. Tabel berikut menunjukkan jumlah penjualan 4 jenis roti pada suatu toko pada periode tertentu.

Periode	Roti *A*	Roti *B*	Roti *C*	Roti *D*	Jumlah
I	120	122	150	100	492
II	200	110	95	120	525
III	58	100	100	150	408
IV	200	120	305	195	820
V	190	195	200	210	795
Jumlah	768	647	850	775	3.040

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Tinggi badan 20 siswa diukur sebagai berikut (dalam cm).

156	158	160	169	160
156	160	162	164	160
156	160	160	166	170
157	156	178	155	155

Buatlah tabel distribusi frekuensi tunggal data di atas, kemudian tentukan mean, median, dan modusnya. Kemudian, tentukan simpangan rata-rata dan variansnya.

Berdasarkan tabel di atas, buatlah

a. diagram garis penjualan roti *A* dalam 5 periode;
b. diagram garis penjualan setiap roti pada periode I;
c. diagram lingkaran penjualan roti *C* dalam 5 periode;
d. diagram batang pada penjualan setiap roti untuk periode II;
e. diagram batang daun pada penjualan roti *D* dalam setiap periode;
f. diagram kotak penjualan roti *D* dalam setiap periode;
g. diagram kotak garis penjualan setiap roti pada periode V.

2. Perhatikan data berat badan siswa berikut.

68	58	58	61	54	49	56	64	79
58	56	60	56	56	60	59	61	58
57	60	62	60	49	52	54	60	56
60	58	55	48	50	51	61	48	56
68	60	49	56	48	70	63	68	62
79	58	56	56	62	62	72	71	71
81	81	86	76	72	72	72	73	71
72	76	70	70	69	68	62	72	71

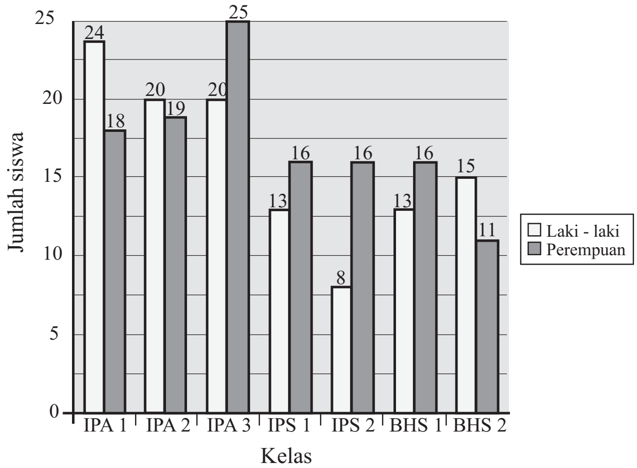
Dengan aturan Sturgess, buatlah tabel distribusi frekuensi berkelompok data di atas. Kemudian, buatlah tabel frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari.

3. Perhatikan data berikut.

Tahun	Banyak Siswa
1999	95
2000	100
2001	112
2002	193
2003	117
2004	126
2005	180
2006	100
2007	130
2008	160

Data di samping adalah data banyak siswa dari suatu SMA yang meneruskan ke perguruan tinggi pada suatu tahun. Buatlah frekuensi kumulatif kurang dari, frekuensi kumualtif lebih dari, ogif positif, ogif negatif, dan histogramnya. Kemudian, tentukan simpangan rata-rata dan standar deviasinya. Tentukan ketiga kuartil, desil ke-1 dan desil ke-7.

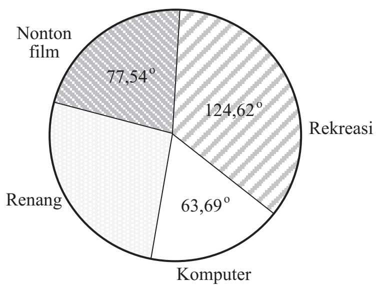
4. Berikut ini adalah data siswa kelas XI SMA Pangkalan Balai pada tahun pelajaran 2006/2007 yang ditampilkan dalam diagram batang.



Gambar 1.16

a. Berapa jumlah siswa kelas XI secara keseluruhan?
b. Berapa jumlah siswa laki-laki kelas XI?
c. Berapa persen siswa perempuan yang masuk program Bahasa dari keseluruhan siswa perempuan yang ada?
d. Kelas manakah yang mempunyai jumlah siswa terbanyak?

5. Diagram lingkaran berikut menunjukkan 126 siswa yang memiliki hobi tertentu.



Gambar 1.17

a. Tentukan jumlah siswa yang menyukai masing-masing hobi.
b. Tentukan persentase siswa yang menyukai masing-masing hobi.

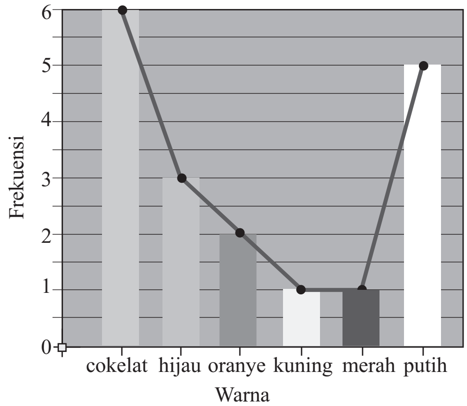
6. Gambar berikut menyajikan poligon frekuensi jumlah permen dengan warna tertentu yang ada dalam sekaleng permen.

Tantangan

Kreativitas

• Kerjakan di buku tugas

Dalam suatu perusahaan, rataan tinggi pegawai laki-laki adalah 165 cm, rataan tinggi pegawai wanita 160 cm, dan rataan tinggi pegawai keseluruhan 162 cm. Tentukan perbandingan banyak pegawai laki-laki dan pegawai wanita dalam perusahaan tersebut.



Gambar 1.18

Berdasarkan gambar di atas, tentukan

a. banyaknya semua permen dalam kaleng;

b. persentase jumlah permen untuk setiap warna;

c. perbandingan banyaknya permen warna orange dan warna cokelat.

7. Dalam suatu kelas terdapat 21 siswa. Nilai rata-rata ujian Matematikanya adalah 6. Jika seorang siswa yang paling rendah nilainya tidak diikutsertakan maka nilai rata-ratanya menjadi 6,2. Berapakah nilai ujian Matematika terendah tersebut?

8. Diketahui x_0 adalah nilai rata-rata dari $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$. Tentukan nilai rata-rata dari

$$\frac{x_1+1}{2}, \frac{x_2+2}{2}, \frac{x_3+3}{2}, ..., \frac{x_{10}+10}{2}.$$

9. Pada ujian Matematika yang diikuti 40 siswa, rata-rata nilainya 32. Karena nilai rata-ratanya terlalu rendah maka Sang guru mengambil kebijakan, yaitu mengalikan nilai setiap siswa dengan 2, kemudian dikurangi 10. Berapa nilai rata-rata sekarang?

10. Data penghasilan karyawan di sebuah perusahaan swasta adalah sebagai berikut.

Penghasilan Per Bulan (Rp)	Banyak Karyawan
400.000 – 449.000	225
450.000 – 499.000	100
500.000 – 549.000	75
550.000 – 599.000	75
600.000 – 649.000	50
650.000 – 699.000	50
> 700.000	25

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Perhatikan tabel berikut.

Data	Frekuensi
11–15	4
16–20	15
21–25	7
26–30	3
31–35	1

a. Manakah pernyataan berikut yang benar?
   1) Median terletak pada kelas ke-3.
   2) Banyaknya data seluruhnya adalah 25.
   3) Jangkauannya 34.
   4) Modus terletak pada kelas ke-2.
   5) Meannya 20.

b. Tentukan median, kuartil ke-2, desil ke-1, desil ke-5

a. Buatlah histogram data di atas. Kemudian, buatlah ogif positif dan negatifnya.
b. Tentukan nilai mean (dengan 3 cara), median, dan modusnya.
c. Tentukan simpangan rata-rata, varians, dan standar deviasinya.
d. Tentukan kuartil ke-3, desil ke-5, dan desil ke-8.

F. Pemeriksaan Data yang Tidak Konsisten

Tentu kalian masih ingat dengan pengertian kuartil (Q_1, Q_2, Q_3), jangkauan antarkuartil (J_K), dan langkah (L). Di samping itu, kita juga telah belajar pagar dalam (P_D) dan pagar luas (P_L) yang nilainya

$$P_D = Q_1 - L$$
$$P_L = Q_3 + L$$

Ingat, besarnya satu langkah ditentukan dengan $L = \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1)$.

Ukuran-ukuran statistik ini akan kita gunakan dalam memeriksa data yang berbeda dari kelompoknya. Data yang berbeda dari kelompoknya disebut sebagai *data pencilan* (*outlier*), sedangkan data yang tidak berbeda dari kelompoknya disebut *data normal*. Pada pembahasan kali ini, kita hanya memfokuskan pada data pencilan atau data yang tidak konsisten dalam kelompoknya.

Data pencilan berada kurang dari *1 langkah* di bawah Q_1 atau lebih dari *1 langkah* di atas Q_3. Lebih jauh lagi, jika suatu data terletak *2 langkah* di bawah Q_1 atau *2 langkah* di atas Q_3 maka data itu dinamakan *data ekstrem*. Jadi, data ekstrem pasti merupakan pencilan.

Misalkan diberikan suatu data $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Berdasarkan keterangan di atas, untuk memeriksa apakah x_i (untuk $i = 1, 2, 3, ..., n$) merupakan data normal atau data pencilan, dapat digunakan ketentuan berikut.

Jika $P_D \leq x_i \leq P_L$ maka x_i merupakan data normal.
Jika $x_i < P_D$ atau $x_i > P_L$ maka x_i merupakan data pencilan.

Permasalahannya sekarang adalah apa yang menyebabkan suatu data merupakan data pencilan? Kemungkinan-kemungkinan yang dapat mengakibatkan munculnya data pencilan adalah sebagai berikut.

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Misalkan dalam perkampungan yang beternak ayam petelur, didata jumlah telur yang dihasilkan per hari. Dalam data tersebut, tercatat sebagai berikut.
Data banyak telur yang dihasilkan per hari dalam sebuah peternakan ayam petelur

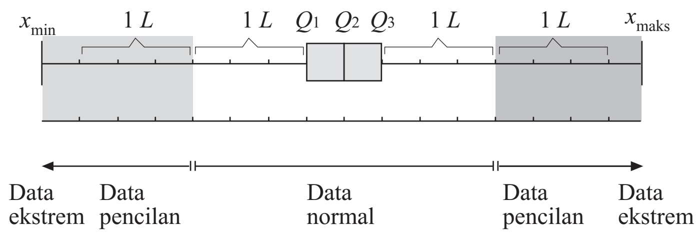
250	350	205	310	450	425
400	400	350	375	300	350
325	305	310	250	110	255
90	305	305	310	350	360

Coba kamu selidiki, adakah data pencilannya? Jika ada, kira-kira (menurutmu) apa penyebabnya?

1. Kesalahan pencatatan data.
2. Kesalahan teknis pengukuran.
3. Data tersebut merupakan data yang menyimpang, seperti data diperoleh dari bibit unggul di antara bibit yang tidak unggul atau terjadinya sifat anomali pada air.

Dengan menggunakan diagram kotak garis, kalian akan dapat dengan mudah menentukan apakah suatu data berbeda dari kelompoknya atau tidak.

Perhatikan diagram kotak garis berikut.



Gambar 1.19

Dari gambar di atas, terlihat bahwa data pencilan memiliki jarak lebih dari 1,5 langkah dari Q_1 maupun Q_3.

Contoh:

Misalkan diberikan data: 1, 2, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10, 10, 12, 24.

Dari data di atas, apakah ada pencilannya? Selidiki pula adakah data ekstrem?

Jawab:

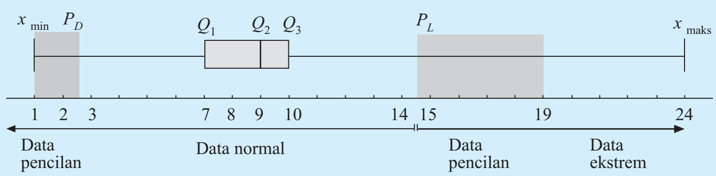
Dari data di atas, diperoleh $Q_1 = 7$, $Q_2 = 9$ dan $Q_3 = 10$.

Dengan demikian, diperoleh

$$L = \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{3}{2}(10 - 7) = 4{,}5$$

$$P_D = Q_1 - L = 7 - 4{,}5 = 2{,}5$$

$$P_L = Q_3 + L = 10 + 4{,}5 = 14{,}5$$



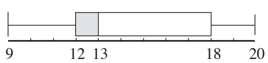
Gambar 1.20

Tantangan

Eksplorasi

• Kerjakan di buku tugas

Sebanyak 20 pohon dicatat tahan hidupnya dan disajikan dalam diagram kotak garis berikut (dalam tahun).



a. Tentukan ketiga kuartilnya.
b. Berapa persen pohon yang tahan hidup antara 12–18 tahun?
c. Berapa persen pohon yang tahan hidup 9–12 tahun?

Data x_i merupakan pencilan jika $x_i < P_D$ atau $x_i > P_L$.
Karena P_D = 2,5 dan P_L = 14,5 maka data yang memenuhi x_i < 2,5 atau x_i > 14,5 adalah 1, 2, dan 24.
Sekarang akan kita selidiki adakah data ekstremnya.
Karena 1 langkah = 4,5 maka $2L = 9$. Jadi, misal x_i data ekstrem maka $x_i < Q_1 - 2L$ atau $x_i > Q_3 + 2L$.
Dengan demikian, data ekstrem berada pada $x_i < 7 - 9 = -2$ atau $x_i > 10 + 9 = 19$. Oleh karena itu, yang merupakan data ekstrem adalah 24

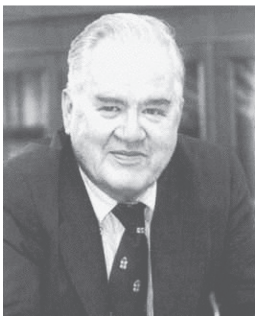
Mari Berdiskusi

Mengomunikasikan gagasan

Apakah pencilan suatu data harus dibuang agar memperoleh data normal? Berikan alasanmu. Apa akibatnya jika data pencilan dihilangkan?

Jendela Informasi

Informasi lebih lanjut


Tukey (1915–2000)
Sumber: *www.cygo.com*

John Wilder Tukey

Salah satu tokoh statistika yang cukup terkenal adalah Tukey. Jika kamu belajar tentang Metode Statistik, kamu tentu akan sangat dekat dengan aturan-aturan (teori) Tukey. Statistika ini lebih dekat ke statistika inferensi. Nama lengkapnya adalah **John Wilder Tukey** (1915-2000). Dia lahir di New Bedford, Massachusetts, Amerika Serikat pada tanggal 16 Juni 1915. setelah menyelesaikan sekolah Pre-College-nya di rumah, ia mengambil S1 dan S2 dalam bidang Kimia. Setelah itu, ia mengambil program S3 dalam bidang Matematika. Sepanjang hidupnya, ia memberi kontribusi yang sangat besar untuk kepentingan umum. Ia juga seorang penasihat Presiden Amerika Serikat Eissenhower, Kennedy, dan Johnson. Carilah informasi tentang Tukey dan karyanya dalam bidang statistika di perpustakaan atau internet.

Sumber: *www.myscienceblog.com*

Soal Kompetensi 3

• Kerjakan di buku tugas

1. Manakah di antara data berikut yang merupakan data normal?
   a. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
   b. 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3
   c. 2, 6, 8, 10, 12, 16, 20, 22, 24
   d. 3, 2, 8, 8, 7, 6, 5, 3, 4, 15, 25
   e. 3, 7, 9, 12, 20, 15, 17, 8, 6

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Diberikan suatu data tentang jumlah sodium yang terkandung dalam setiap potong keju (dalam miligram) pada 8 merek keju.

340	300	520	340
320	290	260	330

a. Buatlah diagram kotak garisnya.
b. Adakah data pencilan dan data ekstremnya?

2. Misalkan diberikan data: 5, 5, 3, 2, 1, 7, 9, 12, 15, 21, 7, 6, 8, 4.
   a. Adakah data pencilannya?
   b. Jika ada, sebutkan data pencilan itu.
3. Di suatu daerah pertanian jagung yang terdiri atas 10 kelompok area pertanian, pada suatu musim panen, hasilnya tercatat sebagai berikut (dalam kwintal).

1.100	1.200	1.210	1.100	2.110
3.500	2.100	1.210	2.200	1.010

   a. Tentukan statistik lima serangkai, kemudian gambarlah diagram kotak garisnya.
   b. Apakah data hasil pertanian di atas merupakan data normal?
   c. Jika ada pencilannya, coba kalian tentukan.
4. Seorang peternak ayam petelur, dari sejumlah ayam yang dimilikinya, dalam 16 hari menghasilkan telur sebagai berikut.

300	350	354	200	360	400	170	300
250	240	450	420	380	390	110	380

   Dari data telur yang dihasilkan ternak di atas, adalah data telur yang aneh? Jika ada data manakah itu? Kemungkinan apakah yang menyebabkannya sehingga data tersebut aneh?
5. Para ilmuwan lingkungan sedang meneliti kandungan racun (merkuri) salah satu spesies lumba-lumba. Berikut ini adalah data kandungan merkuri (dengan satuan mikrogram/gram) yang terkandung dalam hati 28 lumba-lumba.

1,70	183,00	221,00	286,00
1,72	168,00	406,00	315,00
8,80	218,00	252,00	241,00
5,90	180,00	329,00	397,00
101,00	264,00	316,00	209,00
85,40	481,00	445,00	314,00
118,00	485,00	278,00	318,00

   a. Buatlah diagram kotak garisnya.
   b. Adakah data pencilan dan data ekstremnya?
6. Diberikan data berat (dalam pon) dari 27 kemasan daging sapi.

0,75	0,83	0,87	0,89	0,89
0,93	0,96	0,96	0,97	0,98
1,08	1,08	1,12	1,12	1,14
1,18	1,18	1,24	1,28	1,38
0,89	0,99	1,14	1,41	0,92
1,06	1,17			

a. Tentukan statistik lima serangkai.
b. Buatlah diagram kotak garis.
c. Ada berapa jumlah data normal?
d. Adakah data pencilan dan data ekstremnya?

Rangkuman

1. Suatu data dapat disajikan dengan garis, lingkaran, batang, batang daun, dan sebagainya.
2. Ukuran pemusatan terdiri atas mean (nilai rata-rata), median, modus, kuartil, dan desil.
3. Ukuran penyebaran terdiri atas jangkauan, simpangan kuartil, varians, dan standar deviasi.
4. Frekuensi kumulatif merupakan frekuensi akumulasi dengan frekuensi lainnya yang berurutan, sedangkan kurvanya dinamakan kurva ogif.
5. Nilai-nilai statistik
   a. Mean
      1) mean data tunggal

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

      2) mean data berkelompok

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

      Jika rata-rata hitung ditentukan dengan menggunakan rata-rata sementara $\bar{x}_s$ maka rata-rata data berkelompok dapat ditentukan dengan rumus

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

   b. Kuartil-kuartil data berkelompok

$$Q_i = t_b + k\left[\frac{\frac{in}{4} - F_k}{f_{Q_i}}\right], \text{dengan } i = 1, 2, 3$$

   Khusus untuk kuartil tengah atau kuartil ke-2 disebut median.

   c. Modus data berkelompok

$$M_0 = t_b + k\left[\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right]$$

   d. Simpangan rata-rata data berkelompok

$$S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i \,|\, x_i - \bar{x} \,|$$

   e. Varians
      1) Varians data tunggal

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

      2) Varians data berkelompok

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i (x_i - \bar{x})^2$$

      Jika varians diakarkan, hasilnya disebut deviasi standar.
6. Data yang berbeda dari kelompoknya (tidak konsisten) dinamakan pencilan, sedangkan data yang tidak berbeda dari kelompoknya (konsisten) dinamakan data normal.

Refleksi

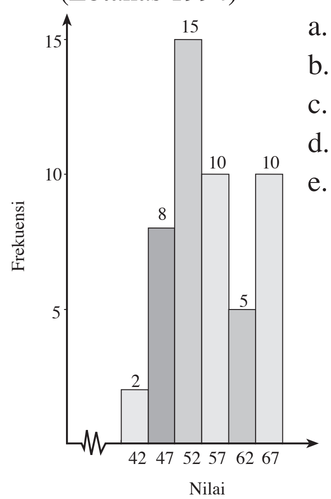
Setelah mempelajari statistika, tentu kalian sudah mengetahui bagaimana cara membaca data dan menyajikan data baik dalam bentuk diagram maupun tabel. Menurutmu, apakah materi ini membantu kalian dalam melakukan kegiatan statistika? Setujukah kalian dengan pernyataan bahwa dalam statistika, segala sesuatu yang berkaitan dengan data dapat diramalkan karakteristik data ke depannya? Berikan penjelasan.

Tes Kemampuan Bab I

• Kerjakan di buku tugas

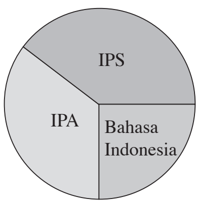
A. Pilihlah jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e.

1. Diketahui sebuah data: 8, 7, 7, 3, 4, 4, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 6, 6
   Median data tersebut adalah ....
   a. 4,5
   b. 5,0
   c. 5,5
   d. 6,0
   e. 6,5
2. Mean ulangan Matematika dari 34 siswa adalah 49. Jika nilai ulangan Matematika salah satu siswa digabungkan, mean ulangan Matematika menjadi 50. Nilai ulangan Matematika siswa itu adalah ....
   a. 50
   b. 55
   c. 60
   d. 80
   e. 84
3. Dari 4 bilangan diketahui bilangan yang terkecil adalah 20 dan yang terbesar 48. Rata-rata hitung keempat bilangan tersebut tidak mungkin
   (1) < 26
   (2) < 25
   (3) > 42
   (4) > 43
   Jawaban yang benar adalah .... (UMPTN 1989)
   a. (1), (2), dan (3)
   b. (1) dan (3)
   c. (1) dan (4)
   d. (4)
   e. semuanya benar
4. Modus dari data: 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4 adalah ....
   a. 4
   b. 4,5
   c. 8
   d. 10
   e. tidak ada
5. Dari: 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6 dapat ditentukan median, rata-rata, jangkauan, dan modusnya berturut-turut adalah ....
   a. 5, 5, 3, 6
   b. 5, 3, 5, 6
   c. 6, 6, 3, 5
   d. 5, 5, 6, 3
   e. 5, 5, 5, 6
6. Rata-rata dari data yang disajikan dengan histogram di bawah ini adalah .... (Ebtanas 1994)



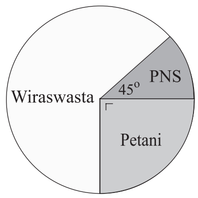
   a. 52,5
   b. 55,5
   c. 55,8
   d. 60,3
   e. 60,5

7. Suatu keluarga mempunyai 8 orang anak. Anak A berumur $x + 1$ tahun dan anak B berumur $2x + 1$ tahun. Enam anak yang lain berturut-turut berumur $x + 2$, $x + 3$, $x + 4$, ..., $x + 7$. Apabila rata-rata umur kedelapan anak tersebut adalah 7 tahun maka umur anak A adalah ....
   a. 8 tahun
   b. 6 tahun
   c. 5 tahun
   d. 4 tahun
   e. 3 tahun
8. Jika 30 siswa kelas XI IPS-1 mempunyai nilai rata-rata ujian Matematika 6,5; 25 siswa kelas XI IPS-2 mempunyai rata-rata 7; dan 20 siswa kelas XI IPS-3 mempunyai rata-rata 8 maka rata-rata nilai Matematika seluruh siswa kelas XI IPS adalah ....
   a. 7,16
   b. 7,10
   c. 7,07
   d. 7,04
   e. 7,01
9. Desil ke-6 dari: 2,4; 2,7; 5,3; 4,8; 4,3; 3,4; 3,7; 2,5; 4,7; 4,0; 2,9; 3,5; 5,1; 5,7; 2,1 adalah ....
   a. 3,44
   b. 3,70
   c. 4,18
   d. 5,04
   e. 5,46
10. Sebuah data yang terdiri atas n datum, mempunyai nilai mean $\bar{x}$. Jika setiap datum dari data itu ditambah dengan 5, nilai mean data baru adalah ....
   a. $\bar{x}$
   b. $\bar{x} + 5$
   c. $\bar{x} + 5n$
   d. $n\bar{x}$
   e. $n\bar{x} + 5$
11. Diagram lingkaran di samping menyatakan perbandingan banyaknya pelajar yang memilih jurusan-jurusan IPA, IPS, dan Bahasa. Banyaknya pelajar yang memilih jurusan IPA adalah



   (1) lebih besar dari jurusan bahasa
   (2) tepat 25%
   (3) lebih dari 25% tetapi kurang dari 50%
   (4) lebih dari 50% tetapi kurang dari 70%

   Jawaban yang tepat adalah .... (PPI 1980)
   a. (1), (2), dan (3)
   b. (1) dan (3)
   c. (2) dan (4)
   d. (4)
   e. semuanya benar
12. Gambar berikut menggambarkan pekerjaan orang tua dari 36 siswa. Banyak orang tua siswa yang pekerjaannya sebagai wiraswasta lebih kurang ... orang.



   a. 15
   b. 18
   c. 20
   d. 23
   e. 30
13. Diketahui data sebagai berikut: 2,0; 3,5; 5,0; 7,0; dan 7,5. Jika deviasi (simpangan) rata-rata nilai tersebut yang dinyatakan dengan rumus $\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i - \bar{x}|}{n}$, dengan $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ maka deviasi rata-rata data di atas adalah ....
   a. 0
   b. 1,0
   c. 1,8
   d. 2,6
   e. 5,0

14. Suatu data mempunyai rata-rata 16 dan jangkauan 6. Jika setiap data dikalikan p, kemudian dikurangi dengan q, diperoleh data baru dengan rata-rata 20 dan jangkauan 9. Nilai $2p + q = ...$
    a. 3
    b. 4
    c. 7
    d. 8
    e. 9
15. Tahun yang lalu, gaji per bulan dari 5 orang karyawan (dalam ribuan rupiah) adalah sebagai berikut: 480, 360, 650, 700, 260. Tahun ini, gaji mereka naik 15% bagi yang sebelumnya bergaji kurang dari Rp500.000,00 dan 10% bagi yang sebelumnya bergaji lebih dari Rp500.000,00. Rata-rata besarnya kenaikan gaji semua karyawan per bulan adalah ....
    a. Rp60.000,00
    b. Rp62.000,00
    c. Rp63.000,00
    d. Rp64.000,00
    e. Rp65.000,00
16. Diketahui suatu data: x, 2, 4, 3, 2, 5, 9, 7, 6. Apabila jangkauan dari data tersebut 8, nilai x adalah ....
    a. 1 saja
    b. 2 saja
    c. 10 saja
    d. 1 atau 10
    e. semua salah
17. Jika jumlah enam buah bilangan adalah 5 lebih besar dari rata-rata keenam bilangan tersebut maka jumlah keenam bilangan tersebut adalah ....
    a. 6
    b. 8
    c. 10
    d. $6\frac{1}{4}$
    e. $7\frac{2}{5}$
18. Pada suatu ujian yang diikuti 50 siswa diperoleh rata-rata ujian 35, dengan median 40, dan simpangan kuartil 40. Karena rata-rata terlalu rendah maka semua nilai dikalikan 2, kemudian dikurangi 15. Akibatnya, ... (Sipenmaru 1988)
    a. rata-rata nilai menjadi 65
    b. rata-rata nilai menjadi 55
    c. simpangan kuartil menjadi 20
    d. simpangan kuartil menjadi 5
    e. median menjadi 80
19. Umur rata-rata (rata-rata hitung) dari suatu kelompok yang terdiri atas dokter dan jaksa adalah 40 tahun. Jika umur rata-rata dokter adalah 35 tahun dan umur rata-rata para jaksa adalah 50 tahun maka perbandingan banyaknya dokter dan banyaknya jaksa adalah .... (UMPTN 1989)
    a. 3 : 2
    b. 3 : 1
    c. 2 : 3
    d. 2 : 1
    e. 1 : 2
20. Perhatikan tabel distribusi berikut ini.

Berat Badan	f
47–49	3
50–52	6
53–55	8
56–58	7
59–61	6
Jumlah	30

    Pernyataan yang benar berdasarkan tabel di atas adalah ....
    a. median = 50,75
    b. modus = 55,5
    c. median = 55,75
    d. modus = 45,5
    e. median = 54,75

21. Perhatikan tabel berikut ini.

Nilai Ujian	Frekuensi
3	3
4	5
5	12
6	17
7	14
8	6
9	3

Seorang siswa dinyatakan lulus ujian jika nilai ujiannya lebih tinggi dari nilai rata-rata dikurangi 1. Dari data di atas, jumlah siswa yang lulus adalah .... (Sipenmaru 1985)

a. 52
b. 40
c. 38
d. 23
e. 20

22. Perhatikan tabel berikut. Nilai meannya adalah ....

Nilai	Frekuensi
6	6
7	6
8	8
9	10
10	11

a. 6,00
b. 7,50
c. 7,75
d. 8,00
e. 8,55

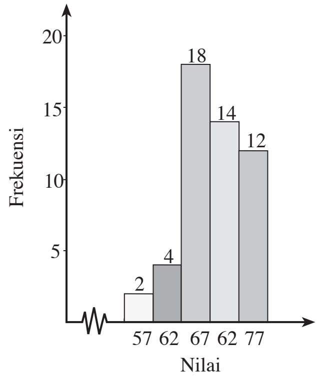
23. Tinggi badan dari sekelompok siswa disajikan dalam tabel berikut.

Tinggi (cm)	Frekuensi
140 – 144	6
145 – 149	6
150 – 154	10
155 – 159	6
160 – 164	5

Nilai mean dari data di atas adalah ....

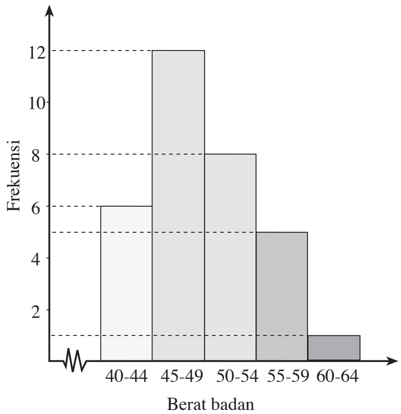
a. 141,5
b. 151,6
c. 154
d. 155,2
e. 160,2

24. Histogram pada gambar berikut menunjukkan nilai tes Matematika di suatu kelas. Nilai rata-ratanya adalah ....



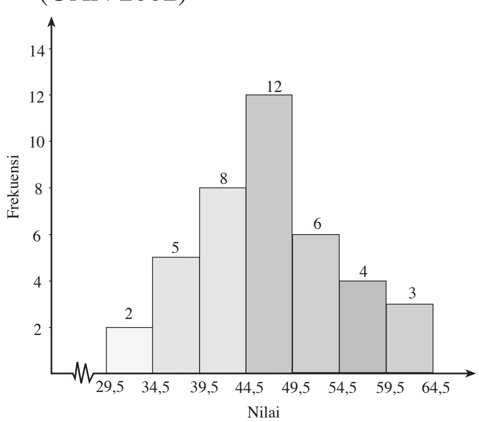
a. 69
b. 69,5
c. 70
d. 70,5
e. 71

25. Diagram di bawah ini menyajikan data berat badan (dalam kg) dari 40 siswa. Modusnya adalah .... (UAN 2003)



a. 46,1
b. 46,5
c. 46,9
d. 47,5
e. 48,0

26. Modus dari histogram berikut adalah .... (UAN 2002)



a. 47,5
b. 46,5
c. 46,4
d. 45,2
e. 44,7

27. Tabel di bawah ini adalah hasil ulangan Matematika suatu kelas. Modusnya adalah .... (UN 2007)

Nilai	f
31–36	4
37–42	6
43–48	9
49–54	14
55–60	10
61–66	5
67–72	2

a. 49,06
b. 50,20
c. 50,70
d. 51,33
e. 51,83

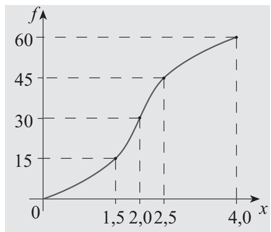
28. Standar deviasi dari suatu data adalah nol. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa ....
a. mean < median
b. mean < modus
c. mean = jangkauan data
d. mean = median
e. median < modus

29. Misalkan mean dari data $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ adalah $\overline{x}$. Jika data diatur dengan pola

$$\frac{1}{2}x_1 + 2, \frac{1}{2}x_2 + 4, \frac{1}{2}x_3 + 6, ..., \frac{1}{2}x_{10} + 20,$$

mean data baru adalah ....
a. $\overline{x} + 11$
b. $\overline{x} + 12$
c. $\frac{1}{2}\overline{x} + 11$
d. $\frac{1}{2}\overline{x} + 12$
e. $\frac{1}{2}\overline{x} + 20$

30. Perhatikan kurva frekuensi kumulatif dari suatu data berikut.



Dari kurva di atas pernyataan-pernyataan berikut yang benar adalah ....
a. median 2,0, simpangan kuartil 2, dan kuartil ketiga 2,5.
b. median 2,0 dan kuartil ketiga 2,5.
c. simpangan kuartil 2 dan mean 30
d. mean 30
e. pernyataan a sampai d benar

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Diberikan suatu data sebagai berikut.

x	4	5	6	7	8	9
f	2	3	2	5	2	3

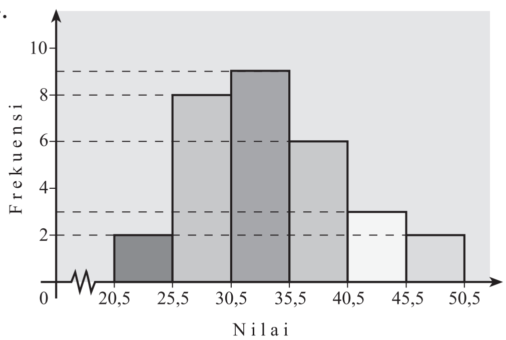
Dari data tersebut, tentukan
a. mean, median, modus;
b. statistik lima serangkai.

2. Pada suatu ujian mata pelajaran Ekonomi, diketahui bahwa nilai rata-rata kelas adalah 58. Apabila nilai rata-rata mata pelajaran Ekonomi untuk siswa pria adalah 65, dan untuk siswa wanita adalah 54, tentukan perbandingan jumlah siswa pria dan wanitanya.

3. Berat badan dari sejumlah siswa ditampilkan dalam tabel berikut.

Berat Badan (kg)	Frekuensi
44 – 46	5
47 – 49	3
50 – 52	6
53 – 55	8
56 – 58	7
59 – 61	3

Tentukan
a. mean, median, dan modus;
b. Q_1, Q_2, dan Q_3.

4. 

Tentukan mean, median, dan modus data yang tersaji dalam histogram di atas.

5. Seorang siswa telah mengikuti tes sebanyak 8 kali dan memperoleh rata-rata 80. Berapakah nilai yang harus diperoleh pada tes selanjutnya supaya rata-ratanya menjadi 82?

6. Kelas *A* terdiri atas 45 siswa dan kelas *B* terdiri atas 40 siswa. Nilai rata-rata kelas *A* adalah 5 lebih tinggi dari rata-rata kelas *B*. Apabila semua nilai kedua kelas digabung maka rata-ratanya menjadi 58. Berapakah nilai rata-rata kelas *A*?

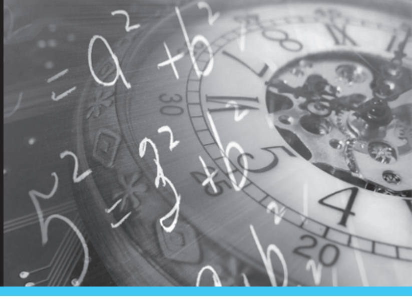
7. Diagram di bawah ini menunjukkan nilai tes matematika sekelompok mahasiswa.
Tentukan nilai median + modus – rata-rata.

8. Dua jenis teh, yaitu teh Sukabumi dan teh Slawi dicampur. Teh Sukabumi harganya Rp960,00/kg dan teh Slawi harganya Rp1.200,00/kg. Tentukan perbandingan banyaknya masing-masing teh untuk mendapatkan teh campuran berharga Rp1.000,00/kg.

Kata Bijak

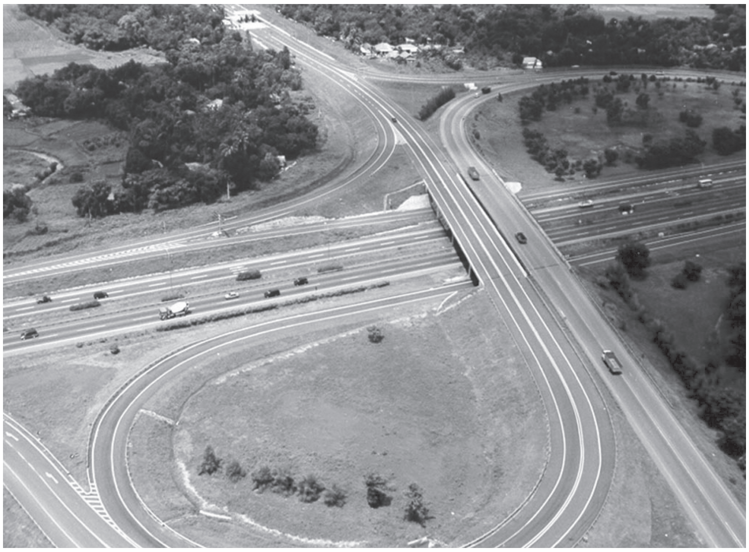
Jangan menganggap remeh diri sendiri karena setiap orang memiliki potensi yang tak terhingga.

Bab II



Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat
1. menggunakan aturan perkalian;
2. menggunakan aturan permutasi;
3. menggunakan aturan kombinasi;
4. menentukan banyak kemungkinan kejadian dari berbagai situasi;
5. menentukan ruang sampel suatu percobaan acak;
6. menentukan peluang kejadian dari berbagai situasi;
7. memberikan tafsiran peluang kejadian dari berbagai situasi;
8. menentukan peluang komplemen suatu kejadian;
9. menggunakan aturan penjumlahan dalam peluang kejadian majemuk;
10. menggunakan aturan perkalian dalam peluang kejadian majemuk.



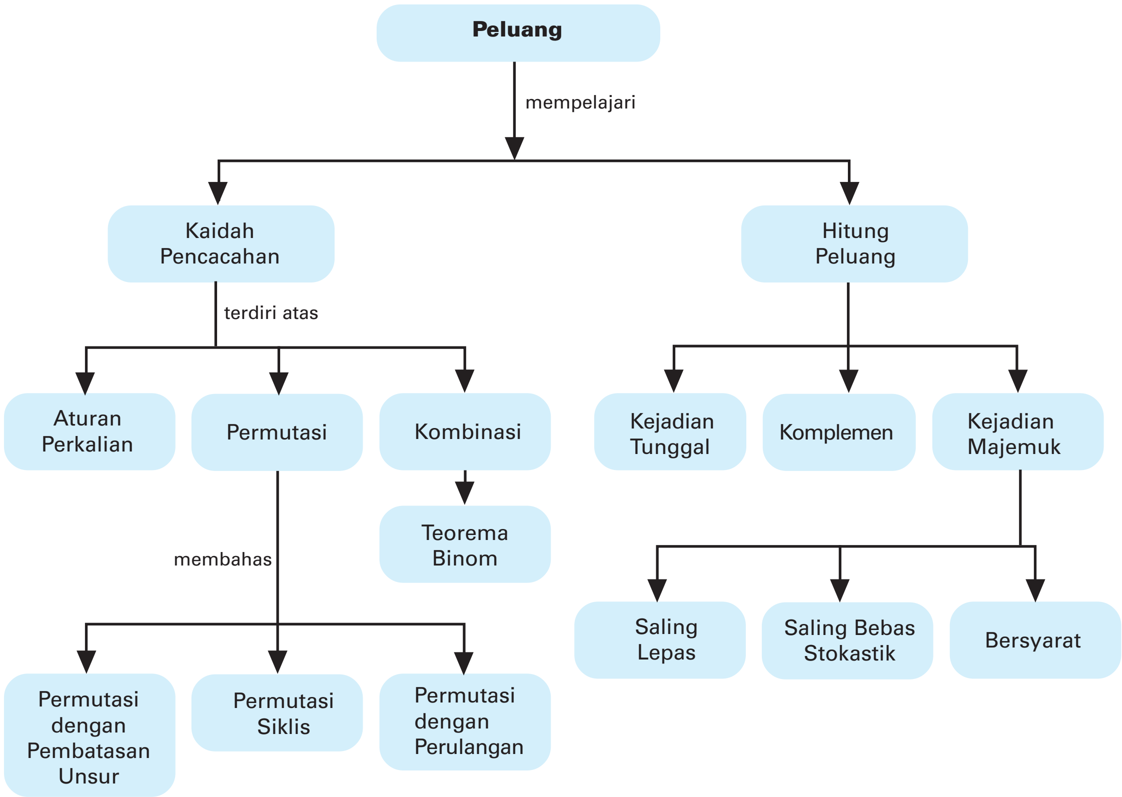
Sumber: *Dokumen Penerbit*

Peluang

Motivasi

Misalnya kalian pergi ke suatu tempat dan melalui jalan raya yang bercabang. Untuk mencapai tujuan, tentu kalian memilih salah satu percabangan jalan itu. Setelah berjalan beberapa kilometer, mungkin kalian akan menemukan percabangan lagi. Kalian harus memilih salah satu cabang lagi. Banyak pilihan jalan bercabang seperti ini. Untuk setiap percabangan tertentu menuju ke salah satu titik (lokasi) merupakan bagian penting dalam ilmu peluang.

Peta Konsep



Kata Kunci

- aturan perkalian
- binom
- faktorial
- frekuensi harapan
- kejadian
- kejadian majemuk
- kejadian saling bebas stokastik
- kejadian saling lepas
- kemustahilan
- kepastian
- kombinasi
- komplemen
- peluang
- peluang kejadian bersyarat
- percobaan
- permutasi
- permutasi siklis
- populasi
- sampel

Di SMP kalian telah diperkenalkan dengan ruang sampel, titik sampel, populasi, peluang suatu kejadian, dan frekuensi harapan. Materi-materi ini akan kita bahas dan perluas lagi pada bab ini, dengan penambahan beberapa materi.

Sebelum kalian mempelajari materi ini lebih jauh, ada baiknya kalian kerjakan soal-soal berikut.

Prasyarat

Kerjakan di buku tugas

1. Apakah yang kamu ketahui tentang
   a. ruang sampel dan titik sampel;
   b. peluang suatu kejadian;
   c. frekuensi harapan?
2. Misalnya dalam sebuah kantong plastik terdapat 4 kelereng merah, 5 kelereng putih, dan sebuah kelereng biru. Dari soal tersebut, tentukan
   a. ruang sampelnya;
   b. peluang terambil kelereng merah jika dari kantong plastik itu akan diambil sebuah kelereng saja.

Jika kalian telah menjawab pertanyaan-pertanyaan di atas, mari kita lanjutkan mempelajari materi ini.

A. Aturan Perkalian, Permutasi, dan Kombinasi

Tentu kalian pernah dihadapkan pada permasalahan yang berkaitan dengan penentuan suatu keputusan. Misalnya, bagaimana cara menentukan berapa banyak pilihan yang dapat diambil jika pilihan pertama ada 2 cara dilanjutkan dengan pilihan kedua ada 3 cara? Bagaimana pula jika pilihan pertama ada m cara dan pilihan kedua ada n cara?

Untuk menentukan permasalahan-permasalahan demikian, kita dapat menggunakan
1. aturan perkalian;
2. permutasi;
3. kombinasi.

Agar kalian dapat memahami ketiga cara tersebut, pelajari uraian berikut.

1. Aturan Perkalian

Misalnya, kalian akan membeli bolpoin atau pensil pada sebuah toko. Di toko itu, tersedia tiga warna bolpoin, yaitu merah, biru, dan hitam. Di toko itu juga tersedia tiga warna pensil, yaitu merah, biru, dan hitam.

Untuk menentukan pilihan, dapat digunakan diagram pohon, tabel persilangan, dan pasangan berurutan. Bagaimana cara kalian menentukan pilihan untuk membeli barang itu? Sebelum mempelajari aturan perkalian lebih lanjut, lakukan Aktivitas berikut.

Aktivitas

Tujuan : Menentukan banyaknya cara yang berbeda dalam pemilihan.

Permasalahan : Bagaimana menentukan banyaknya cara yang berbeda dalam memilih pasangan buku dan bolpoin?

Kegiatan :

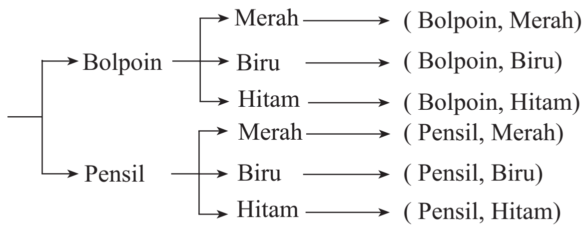
1. Sediakan 3 buah buku tulis yang berbeda (bisa dipinjam dari temanmu) dan 2 buah bolpoin yang berbeda pula.
2. Berilah label ketiga buku itu dengan nama yang berbeda, misalnya B1, B2, B3.
3. Beri label juga kedua bolpoin tersebut dengan nama yang berbeda pula, misalnya P1 dan P2.
4. Selanjutnya pilihlah salah satu dari 3 buah buku tersebut dan salah satu dari 2 bolpoin. Catatlah nama label dari pasangan buku dan bolpoin yang terpilih tersebut. Misalkan buku yang terpilih adalah B1 dan bolpoin yang terambil adalah P2 maka tulislah B1–P2.
5. Ulangi kegiatan 4 sampai tidak ada lagi cara yang berbeda untuk memilih pasangan buku dan bolpoin.
6. Hitunglah banyaknya cara yang berbeda dalam memilih pasangan buku dan bolpoin dari hasil kegiatan 4 dan 5.

Kesimpulan : Dari hasil yang diperoleh, apa kesimpulanmu? Coba kaitkan hasil yang diperoleh dengan banyaknya buku dan bolpoin yang tersedia. Apa hubungannya antara hasil yang diperoleh dengan banyaknya buku dan bolpoin? Coba simpulkan.

Setelah kalian malakukan Aktivitas di atas, kalian akan mudah memahami aturan perkalian.

a. Diagram Pohon

Misalnya kalian akan membali salah satu dari bolpoin atau pensil. Masing-masing bolpoin dan pensil memiliki 3 warna, merah, biru, dan hitam. Dari contoh kasus yang kalian hadapi ini, dapat dinyatakan dalam diagram berikut.



Gambar 2.1

Dari diagram pohon di atas, diperoleh 6 pasangan pilihan yang dapat kalian ambil, yaitu:

(Bolpoin, Merah) (Pensil, Merah)
(Bolpoin, Biru) (Pensil, Biru)
(Bolpoin, Hitan) (Pensil, Hitam)

Pilihan (Bolpoin, Merah) artinya kalian memilih membeli bolpoin berwarna merah. Pilihan (Bolpoin, Biru) artinya kalian memilih membeli bolpoin berwarna biru. Demikian seterusnya.

b. Tabel Persilangan

Dengan cara membuat daftar (tabel) persilangan, contoh kasus yang kalian hadapi di atas dapat ditampilkan sebagai berikut.

Barang	Warna		
	Merah	Biru	Hitam
Bolpoin Pensil	(Bolpoin, Merah) (Pensil, Merah)	(Bolpoin, Biru) (Pensil, Biru)	(Bolpoin, Hitam) (Pensil, Hitam)

Dari tabel di atas, diperoleh 6 pilihan yang dapat kalian ambil.

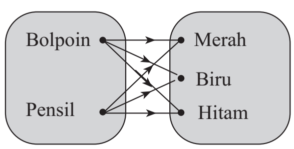
c. Pasangan Berurutan

Misalkan A himpunan pilihan barang dan B himpunan pilihan warna. Pasangan berurutan A dan B dapat dinyatakan sebagai diagram panah seperti pada **Gambar 2.2**.

Pada diagram panah di samping dapat disusun pasangan berurutan antara pilihan barang dan pilihan warna sebagai berikut.

(Bolpoin, Merah) (Pensil, Merah)
(Bolpoin, Biru) (Pensil, Biru)
(Bolpoin, Hitam) (Pensil, Hitam)

Jadi, diperoleh 6 pasang pilihan yang dapat kalian lakukan.



Gambar 2.2

Ketiga aturan di atas pada dasarnya adalah sebagai berikut.
Jika terdapat 2 pilihan, dengan pilihan pertama ada 2 cara dan pilihan kedua ada 3 cara maka banyak cara pemilihan yang mungkin adalah 2×3 cara.
Jika aturan demikian diperluas, diperoleh sebagai berikut.
Anggap pilihan pertama yang ada dianggap sebagai suatu tempat.
Misalkan terdapat n tempat dengan ketentuan:
1) banyak cara untuk mengisi tempat pertama c_1;
2) banyak cara untuk mengisi tempat kedua setelah tempat pertama dipenuhi c_2;
3) banyak cara untuk mengisi tempat ketiga setelah tempat pertama dan kedua dipenuhi c_3;

dan seterusnya hingga banyak cara untuk mengisi tempat ke-n setelah tempat pertama, kedua, ketiga, ..., ke-(n –1) dipenuhi adalah c_n.

Banyak cara untuk mengisi n buah tempat secara keseluruhan dapat dirumuskan dengan:

$$c_1 \times c_2 \times c_3 \times \ldots \times c_n$$

Aturan seperti inilah yang biasa disebut sebagai *aturan perkalian*. Aturan ini juga disebut sebagai *aturan pengisian tempat yang tersedia* (*filling slot*).

Agar kalian mahir dalam menggunakan aturan ini, perhatikan contoh-contoh berikut.

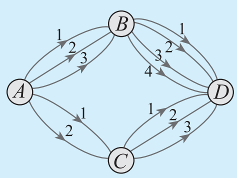
Contoh 1:

Misalkan seseorang hendak bepergian dari Kota Jambi ke Kota Bandar Lampung melalui Kota Palembang. Banyak jalur yang dapat dilalui dari Kota Jambi ke Kota Palembang 3 cara dan banyak jalur yang dapat dilalui dari Kota Palembang ke Kota Bandar Lampung 4 cara, tentukan banyak pilihan jalur yang dapat dilalui orang itu.

Jawab:

Banyak jalur dari Kota Jambi ke Kota Palembang 3 cara.
Banyak jalur dari Kota Palembang ke Kota Bandar Lampung 4 cara.
Jadi, banyak pilihan orang itu adalah 3×4 cara.

Contoh 2:



Gambar 2.3

Perhatikan jalur yang menghubungkan kota satu dengan kota lainnya pada jaringan jalan di samping.

Tentukan banyak cara seseorang yang hendak bepergian dari Kota A ke Kota D.

Jawab:

a. Perhatikan jalur $A – B – D$.
   Jalur A ke B ada 3 cara dan jalur B ke D ada 4 cara.
   Jadi, banyak cara menurut jalur $A – B – D$ adalah $3 \times 4 =$ 12 cara.

b. Perhatikan jalur $A – C – D$.
   Jalur A ke C ada 2 cara dan jalur C ke D ada 3 cara.
   Jadi, banyak cara menurut jalur $A – C – D$ adalah $2 \times 3 =$ 6 cara. Jadi, banyak cara seseorang yang hendak bepergian dari kota A ke kota D adalah $(12 + 6)$ cara = 18 cara.

Problem Solving

Disediakan angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Tentukan

a. banyak angka ratusan yang dapat dibentuk;
b. banyak angka ratusan ganjil yang dapat dibentuk;
c. banyak angka ratusan yang lebih besar dari 300 yang dapat dibentuk.

Jawab:

a. Angka ratusan terdiri dari 3 angka

Ratusan	Puluhan	Satuan
↑	↑	↑
6 cara	6 cara	6 cara

Jadi, banyak ratusan yang dapat dibentuk adalah $6 \times 6 \times 6 = 216$ angka.

b. Angka ratusan ganjil yang mungkin terbentuk dari angka-angka itu satuannya adalah 1, 3, dan 5.

Ratusan	Puluhan	Satuan
↑	↑	↑
6 cara	6 cara	3 cara

Jadi, banyak angka ratusan ganjil yang mungkin terbentuk adalah $6 \times 6 \times 3 = 108$ cara (macam).

c. Angka yang lebih besar dari 300 mempunyai angka ratusan 3, 4, 5, dan 6.

Ratusan	Puluhan	Satuan
↑	↑	↑
4 cara	6 cara	6 cara

Jadi, banyak angka ratusan yang lebih besar dari 300 yang mungkin adalah $4 \times 6 \times 6 = 144$ cara (macam).

Tantangan

Inovatif

• Kerjakan di buku tugas

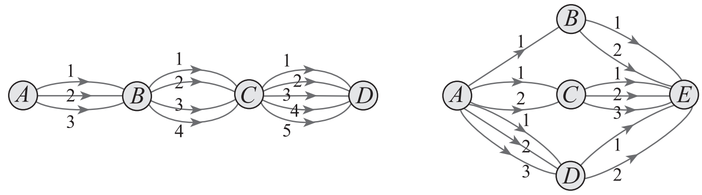
Misalnya disediakan 10 bilangan cacah pertama. Dari bilangan-bilangan itu, akan disusun bilangan baru yang terdiri atas bilangan ratusan. Berapa banyak bilangan baru yang mungkin disusun jika

a. bilangan tiga angka itu tidak terjadi pengulangan angka yang sama (misalnya: 123, 456, 379, dan seterusnya);
b. bilangan tiga angka itu boleh terjadi pengulangan angka yang sama (misalnya: 355, 355, 411, dan seterusnya).

Soal Kompetensi 1

• Kerjakan di buku tugas

1. Perhatikan gambar berikut.



(a) (b)

Gambar 2.4

   a. Banyak jalur yang dapat ditempuh dari Kota *A* ke Kota *D* melalui Kota *B* dan *C* digambarkan pada **Gambar 2.4** (a). Tentukan banyak jalur yang dapat ditempuh dari Kota *A* ke *D*?
   b. Dengan cara yang sama, berapa jalur yang dapat dtempuh pada **Gambar 2.4** (b) untuk menuju kota *E* dari Kota *A* melalui Kota *B*, *C*, atau *D*.
2. Diberikan angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Tentukan banyak cara menyusun bilangan puluhan jika
   a. bilangan tidak boleh terdiri atas angka yang sama;
   b. bilangan boleh terdiri atas angka yang sama;
   c. bilangan puluhan tidak boleh terdiri atas angka yang sama dan harus bilangan ganjil.
3. Tentukan banyak bilangan ribuan yang dapat dibuat dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 7 jika bilangan-bilangan itu harus genap, nilainya lebih besar dari 3.100 dan tidak ada angka yang diulang.
4. Suatu keluarga terdiri atas suami-istri, 2 anak laki-laki, dan 3 anak perempuan. Tentukan banyak cara mereka duduk dalam satu baris, tetapi suami-istri harus selalu berdekatan dan anak-anak yang berjenis kelamin sama harus berdekatan.
5. Tentukan banyak cara menyusun 4 huruf abjad (*A, B, C, ..., Z*) dan diikuti 3 buah angka (0, 1, 2, ..., 9) yang berbeda.
6. Berapa banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf *J*, *E*, *N*, *D*, *E*, *L*, *A* jika
   a. huruf pertama susunan adalah huruf vokal;
   b. huruf pertama susunan adalah huruf konsonan?
7. Sebuah restoran cepat saji menyajikan menu makanan yang berbeda sebanyak 5 macam, menu minuman sebanyak 10 macam, dan menu lauk pauk sebanyak 15 macam. Tentukan berapa macam hidangan yang berbeda dapat tersaji yang terdiri atas makanan, minuman, dan lauk pauk.

Tantangan

Inovasi

• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan banyak cara untuk menyusun nomor plat kendaraan dengan format *AD* – – – – *D*, dengan ketentuan bahwa 4 digit yang masih kosong tersebut dapat diisi angka 0–9.
2. Suatu tim bola voli terdiri atas 8 orang (termasuk pemain cadangan), akan dipilih seorang kapten, wakil kapten, dan pengumpan. Berapa banyak pilihan dapat dibentuk jika
   a. seseorang boleh merangkap;
   b. seseorang tidak boleh merangkap?

8. Diberikan angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, dan 5 untuk disusun menjadi suatu bilangan ribuan antara 1.000 sampai dengan 5.000 (1.000 dan 5.000 tidak termasuk).
   a. Berapa jumlah bilangan yang dapat dibentuk?
   b. Berapa jumlah bilangan genap yang dapat dibentuk?
   c. Berapa jumlah bilangan ganjil yang dapat dibentuk?
   d. Berapa jumlah bilangan kelipatan 5 yang dapat dibentuk?

2. Permutasi

Sebelum mempelajari permutasi, kita perlu memahami operasi faktorial terlebih dahulu.

a. Faktorial

Perhatikan perkalian bilangan berikut.

$3 \times 2 \times 1 = 3!$

$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$

$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5!$

dan seterusnya.

Tanda ”!” disebut notasi faktorial.

Dengan demikian, faktorial dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika n bilangan asli, maka n faktorial (ditulis $n!$) didefinisikan dengan

$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

Dari definisi di atas, kita juga memperoleh

$$n! = n(n - 1)!$$

Nilai $1! = 1$. Oleh karena itu, untuk $n = 1$, diperoleh

$1! = 1(1 - 1)! \Leftrightarrow 1 = 0!$

Dari kesamaan terakhir, ternyata untuk setiap kejadian, $0! = 1$ selalu benar. Untuk itu, disepakati bahwa

$$0! = 1$$

Tantangan

Kreativitas

• Kerjakan di buku tugas

Misalkan $p = 10(9!)^{\frac{1}{2}}$, $q = 9(10!)^{\frac{1}{2}}$, dan $r = (11!)^{\frac{1}{2}}$ dengan $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n - 1)n$.

Pengurutan yang benar dari ketiga bilangan ini adalah ....

a. $p < q < r$
b. $q < r < p$
c. $r < p < q$
d. $q < p < r$
e. $p < r < q$

Olimpiade Kabupaten, 2002

Contoh 1:

Hitunglah nilai-nilai operasi faktorial berikut.

a. $4! + 3!$ b. $4! \times 3!$ c. $\dfrac{4!}{3!}$

Jawab:

a. $4! + 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) + (3 \times 2 \times 1)$
$= 24 + 6 = 30$

b. $4! \times 3! = (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)$
$= 24 \times 6 = 144$

c. $\frac{4!}{3!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 4$

Contoh 2:

Nyatakan 6×5 dalam bentuk faktorial.

Jawab:

$$6 \times 5 = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{6!}{4!}$$

Jadi, $6 \times 5 = \frac{6!}{4!}$.

Problem Solving

Tentukan nilai n jika diketahui persamaan

$\frac{6(n-1)!(n-3)!}{n!(n-4)!} = \frac{5!}{24}$.

Jawab:

$$\frac{6(n-1)!(n-3)!}{n!(n-4)!} = \frac{5!}{24}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(n-1)!(n-3)(n-4)!}{n(n-1)!(n-4)!} = \frac{5!}{4!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6(n-3)}{n} = \frac{5 \times 4!}{4!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6n-18}{n} = 5$$

$$\Leftrightarrow 6n - 18 = 5n$$

$$\Leftrightarrow n = 18$$

Mari Berdiskusi

Inkuiri

Coba kalian selidiki. Jika m dan n bilangan asli, apakah pernyataan-pernyataan berikut berlaku?

a. $m! + n! = (m + n)!$

b. $m! - n! = (m - n)!$

c. $m! \times n! = (m \times n)!$

d. $\frac{m!}{n!} = \left(\frac{m}{n}\right)!$

b. Permutasi dari Unsur-Unsur yang Berbeda

Tantangan

Kreativitas

• Kerjakan di buku tugas

Nilai dari $\dfrac{80! \times 38!}{77! \times 40!} = ...$

a. 316
b. 391
c. 412
d. 871
e. 2.023

Olimpiade Sains Provinsi, 2006

Perhatikan susunan angka-angka yang terdiri atas angka 4, 5, dan 6 berikut.

456 465 546 564 645 654

Letak angka dalam susunan tersebut memengaruhi nilai bilangan yang terbentuk. Bilangan-bilangan 456 $\neq$ 465. Demikian juga untuk susunan yang lain. Banyak susunan angka ratusan yang dapat dibuat dari 3 buah angka, yaitu 4, 5, dan 6 sebanyak 6 buah. Bagaimana susunannya jika angka-angka yang tersedia 4, 5, 6, dan 7? Susunan angka ratusan yang mungkin dari 4 angka, yaitu 4, 5, 6, dan 7 adalah sebagai berikut:

456	465	546	564	645	654
457	475	547	574	745	754
467	476	647	674	746	764
567	576	657	675	756	765

Ternyata, ada 24 cara.

Susunan objek-objek yang memerhatikan urutan seperti ini dinamakan permutasi.

Dari permasalahan di atas, diperoleh

1) jika angka-angka disusun terdiri atas 3 angka dari 3 angka yang tersedia, banyak susunannya

$$6 = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = \frac{3!}{0!} = \frac{3!}{(3-3)!};$$

2) jika angka-angka disusun terdiri atas 3 angka dari 4 angka yang tersedia, banyak susunannya

$$24 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = \frac{4!}{1!} = \frac{4!}{(4-3)!};$$

3) jika kalian teruskan, angka-angka disusun terdiri atas k angka dari n angka yang tersedia, banyak susunannya adalah $\dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Jadi, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Permutasi k unsur atau objek dari n unsur yang tersedia, dengan memerhatikan urutan susunannya dapat ditentukan dengan rumus

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dalam beberapa buku notasi P_k^n dituliskan sebagai ${}_nP_k$, ${}^nP_k$, atau $P(n, k)$.

Contoh 1:

Tentukan nilai-nilai berikut.

a. P_2^5 c. P_n^{2n}

b. P_8^8

Jawab:

a. $P_2^5 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$

b. $P_8^8 = \dfrac{8!}{(8-8)!} = \dfrac{8!}{0!} = \dfrac{8!}{1} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 40.320$

c. $P_n^{2n} = \dfrac{2n(2n-1)(2n-2)\ \ldots (2n-(n-1))(2n-n)!}{(2n-n)!}$

$= 2n(2n-1)(2n-2) \ldots (n+1)$

Tantangan

Berpikir kritis

• Kerjakan di buku tugas

Empat pasang suami-istri membeli karcis untuk 8 kursi sebaris pada suatu pertunjukan. Dua orang akan duduk bersebelahan hanya kalau keduanya pasangan suami-istri atau berjenis kelamin sama. Berapa banyakkah cara menempatkan keempat pasang suami-istri kedelapan kursi tersebut?

Olimpiade Provinsi, 2002

Contoh 2:

Di dalam sebuah kelas, akan dibentuk kepengurusan yang terdiri atas ketua, sekretaris, dan bendahara kelas. Berapa banyak cara 6 calon yang akan memperebutkan ketiga posisi tersebut?

Jawab:

Karena posisi yang diperebutkan masing-masing berbeda, kasus ini dapat dikerjakan dengan permutasi 3 unsur dari 6 unsur yang tersedia.

Jadi, $P_3^6 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!} = 120$ cara.

Problem Solving

Diketahui persamaan $3P_4^m = P_5^{m-1}$. Tentukan nilai m.

Jawab:

$$3P_4^m = P_5^{m-1}$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{m!}{(m-4)!} = \frac{(m-1)!}{((m-1)-5)!}$$

$$\Leftrightarrow 3\frac{m(m-1)!}{(m-4)(m-5)(m-6)!} = \frac{(m-1)!}{(m-6)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3m}{(m-4)(m-5)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (m-4)(m-5) = 3m$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\ & m^2 - 9m + 20 &&= 3m\\
\Leftrightarrow\ & m^2 - 12m + 20 &&= 0\\
\Leftrightarrow\ & (m - 10)(m - 2) &&= 0\\
\Leftrightarrow\ & m - 10 &&= 0 \text{ atau } m - 2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & m &&= 10 \text{ atau } m = 2
\end{aligned}$$

c. Permutasi Memuat Beberapa Unsur yang Sama

Pada pembahasan sebelumya, permutasi memuat unsur yang sama. Sekarang perhatikan unsur penyusun "*APA*" yaitu *A*, *P*, dan *A*.

Huruf *A* pada urutan pertama dan ketiga meskipun dibalik akan mempunyai makna yang sama. Misalkan A_1 dan A_3 masing-masing adalah huruf *A* yang pertama dan ketiga.

1) Permutasi 3 unsur dari 3 unsur yang tersedia, yaitu A_1, P, A_3 (A_1 dan A_3 diandaikan berbeda) adalah

   $P_3^3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6.$

   Dengan demikian, diperoleh susunan dalam 3 kelompok berikut.

   a) A_1PA_3 b) A_1A_3P c) PA_1A_3
      A_3PA_1 A_3A_1P PA_3A_1

2) Permutasi 3 unsur dari 3 unsur yang tersedia, yaitu A_1PA_3 (A_1 dan A_3 diandaikan sama) susunannya adalah

   APA   *AAP*   *PAA*

Jadi, hanya terdapat 3 cara. Hal ini terjadi karena pada setiap kelompok terdapat 2! = 2 permutasi pada penyusunan 2 huruf *A* yang sama, yaitu A_1 dan A_3.

Dengan demikian, permutasi 3 unsur, dengan 2 unsur yang sama dari 3 unsur adalah $P = \dfrac{3!}{2!} = \dfrac{3 \times 2!}{2!} = 3$

Secara umum, dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Permutasi *n* unsur, dengan *k* unsur sama dari *n* unsur itu ($n \geq k$) adalah $P = \dfrac{n!}{k!}$.

Aturan ini dapat diperluas sebagai berikut.

> Untuk permutasi *n* unsur, dengan k_1 unsur sama, k_2 unsur sama, …., dan k_n unsur sama dari *n* unsur ($k_1 + k_2 + ... + k_n \leq n$), yaitu
>
> $$P = \frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_n!}$$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Bilangan terdiri atas tiga angka disusun dari angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 9. Banyaknya bilangan dengan angka-angka berlainan yang nilainya lebih kecil dari 400 adalah ....

a. 20
b. 35
c. 40
d. 80
e. 120

UMPTN 2000

Contoh:

Tentukan banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari unsur huruf-huruf pembentuk kata
a. *PANDA*;
b. *PENDIDIKAN*.

Jawab:

a. *PANDA*
Unsur yang tersedia, $n = 5$.
Unsur yang sama $k = 2$, yaitu huruf A ada 2.

$$\text{Jadi, } P = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

b. *PENDIDIKAN*
Unsur yang tersedia ada 10.
Unsur yang sama adalah
1) $k_1 = 2$, yaitu huruf N ada 2;
2) $k_2 = 2$, yaitu huruf D ada 2;
3) $k_3 = 2$, yaitu huruf I ada 2.

$$\text{Jadi, } P = \frac{10!}{2!\,2!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$$
$$= 453.600 \text{ susunan.}$$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan. Setiap dua orang saling berjabat tangan paling banyak sekali. Banyaknya orang yang hadir dalam pertemuan tersebut paling sedikit adalah ....

a. 28
b. 27
c. 14
d. 8
e. 7

Olimpiade Nasional, 2006

Problem Solving

Misalnya terdapat 6 bendera dengan rincian 2 bendera berwarna merah, 3 bendera berwarna putih, dan 1 bendera berwarna biru. Berapa banyak susunan yang dapat dibuat untuk menyusun bendera itu secara berjajar?

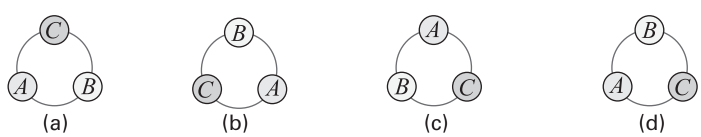
Jawab:

Banyak susunan yang dapat dibuat adalah

$$P = \frac{6!}{2!\,3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2!\,3!} = 60 \text{ susunan.}$$

d. Permutasi Siklis

Perhatikan susunan titik A, B, dan C pada susunan melingkar berikut.



Gambar 2.5

Perhatikan susunan melingkar pada **Gambar 2.5** (a), (b), dan (c). Susunan itu sebenarnya sama (tidak berubah). Sekarang bandingkan dengan susunan pada **Gambar 2.5** (d). Jadi, banyak susunan dari 3 titik, yaitu A, B, dan C pada susunan melingkar sebenarnya hanya ada 2, yaitu susunan **Gambar 2.5** (a) dan (d).

Untuk menentukan bentuk susunan n objek yang disusun melingkar maka tentukan sebuah titik yang dianggap sebagai titik tetap. Kemudian, sisanya dianggap sebagai penyusunan $(n – 1)$ unsur dari $(n – 1)$ unsur yang berbeda.

Dengan demikian, dapat dikatakan sebagai berikut.

Jika terdapat 3 objek (unsur) disusun melingkar, banyak susunan yang mungkin adalah $2! = (3 – 1)!$.

Jika terdapat 4 unsur disusun melingkar, banyak susunan yang mungkin adalah $3! = (4 – 1)!$. Demikian seterusnya.
Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Misalkan terdapat n unsur yang berbeda disusun melingkar. Banyak susunan dapat ditentukan dengan permutasi siklis dengan aturan

$$P_{\text{siklis}} = (n – 1)!$$

Contoh:

Sebanyak 6 orang mengadakan rapat. Mereka duduk menghadap sebuah meja bundar. Berapa banyak cara mereka menempati kursi yang disusun melingkar itu?

Jawab:

Banyak cara mereka menempari kursi adalah
$P_{\text{siklis}} = (6 – 1)! = 5! = 120$ cara.

Soal Kompetensi 2

• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan nilai faktorial berikut.
   a. $5!$
   b. $\frac{6!}{3!}$
   c. $(4!)^{2!}$
   d. $\frac{6!\,3!}{2!\,4!}$
2. Nyatakan bentuk berikut ke dalam bentuk faktorial.
   a. $4 \times 3 \times 2 \times 1$
   b. 4×3
   c. $4^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 1$
   d. $4^2 \times 3^2$
   e. $n(n – 1)$
   f. $\frac{(n+1)n}{(n-1)}$

Tantangan

Berpikir kritis

• Kerjakan di buku tugas

Terdapat 12 lembar karton yang akan diwarnai sehingga 3 lembar di antaranya berwarna hijau, 2 berwarna merah, 2 kuning, dan sisanya hijau. Berapa jumlah cara pengecatan yang mungkin dilakukan?

3. Hitunglah nilainya.
   a. $\dfrac{16!}{14! \times 4!}$
   b. $\dfrac{47!}{3! \times 45!}$
   c. $\dfrac{25! \times 7!}{23!}$
4. Hitunglah
   a. P_3^5 c. P_4^8 e. P_0^{10}
   b. P_5^7 d. P_5^{10} f. P_2^{15}
5. a. Untuk $n \geq 1$, perlihatkan bahwa $n! - (n - 1)! = (n - 1)!\,(n - 1)$.
   b. Untuk $n \geq 3$, perlihatkan bahwa $n! - (n - 3)! = (n - 3)!(n^3 - 3n^2 + 2n - 1)$
6. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan $n! = 380(n–2)!$.
7. Carilah nilai n pada persamaan berikut.
   a. $P_3^{(n-1)} = P_4^n$ c. $2!P_4^{n+4} = 3P_3^{2n+4}$
   b. $P_n^{2n} - 50 = 2P_2^n$ d. $P_4^{n+1} = 10P_2^n$
8. Tunjukkan bahwa $\dfrac{n!(n-2)!}{(n-3)!(n-1)!} = n^2 - 2n$.
9. Berapa banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf berikut.
   a. *M, A, K, A, N*
   b. *K, O, M, P, U, T, E, R*
   c. *M, A, T, E, M, A, T, I, K, A*
   d. *T, O, R, O, N, T, O*
   e. *A, R, I, S, T, O, T, E, L, E, S*
   f. *S, U, R, A, K, A, R, T, A*

Tantangan

Berpikir kritis

• Kerjakan di buku tugas

Berapa banyak cara membagikan 8 buah buku berbeda kepada 3 orang siswa, yaitu Budi, Candra, dan Deni dengan ketentuan Budi mendapat 4 buku, sedangkan Candra dan Deni masing-masing mendapat 2 buku?

10. Dari 7 calon pengurus koperasi, akan dipilih seorang ketua, seorang sekretaris, dan seorang bendahara. Berapa banyak susunan pengurus yang mungkin dibuat?
11. Seorang siswa diwajibkan menjawab 3 soal dari 5 soal yang disediakan. Tentukan banyak cara memilih soal tersebut.
12. Tentukan banyak cara duduk melingkar dari 8 orang.
13. Seorang siswa diminta mengerjakan 5 soal dengan ketentuan soal nomor 1 harus dikerjakan. Jika banyak soal yang diberikan 7 soal, tentukan banyak cara siswa itu mengerjakan.

14. Suatu pertemuan dihadiri 18 orang. Jika setiap peserta saling berjabat tangan, tentukan banyak jabat tangan yang terjadi.
15. Misalkan di luar angkasa terdapat 10 buah satelit buatan yang mengelilingi bumi dalam satu orbit yang sama berbentuk lingkaran. Jarak sebuah satelit dengan satelit lainnya adalah sama. Tentukan berapa cara 10 satelit tersebut menempati posisinya dalam orbit?

3. Kombinasi

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Dari 12 orang yang terdiri atas 8 pria dan 4 wanita akan dibentuk kelompok kerja yang beranggotakan 4 orang. Jika dalam kelompok kerja itu paling sedikit terdapat 2 pria maka banyak cara membentuk kelompok kerja itu ada ....

a. 442
b. 448
c. 456
d. 462
e. 468

UMPTN 2001

Kalian tentu masih ingat dengan pengertian permutasi. Pada permutasi urutan unsur pada suatu susunan diperhatikan. Namun, pada kombinasi urutan tidak diperhatikan. Misalnya,

ABC *BAC* *CBA* *CAB*

adalah susunan (kombinasi) yang sama.

Kalian telah memahami bahwa permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia, yaitu $P_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Karena banyak permutasi k unsur adalah $k!$ dan kombinasi tidak memerhatikan urutan maka setiap $k!$ permutasi merupakan satu kombinasi dari k unsur. Dengan demikian, diperoleh

$$P_k^n = k!\,C_k^n \Leftrightarrow C_k^n = \frac{P_k^n}{k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia dirumuskan dengan

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Notasi kombinasi ada beberapa macam, antara lain ${}_nC_k$, ${}^nC_k$, atau $C(n, k)$. Pada buku ini disepakati notasi yang dipakai adalah C_k^n.

Contoh 1:

Tentukan nilai kombinasi-kombinasi berikut.

a. C_2^6

b. C_5^5

c. C_n^{n+1}

Jawab:

a. $C_2^6 = \dfrac{6!}{(6-2)!\ 2!} = \dfrac{6!}{4!\ 2!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{4!\ 2!} = \dfrac{6 \times 5}{2!} = 15$

b. $C_5^5 = \dfrac{5!}{(5-5)!\ 5!} = \dfrac{5!}{0!\ 5!} = \dfrac{5!}{5!} = 1$

c. $C_n^{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{((n+1)-n)!n!} = \dfrac{(n+1)!}{1!\ n!} = \dfrac{(n+1)n!}{n!} = n+1$

Contoh 2:

Tentukan nilai $n^2 - 1$ jika $4!C_4^n = 5P_3^n$.

Jawab:

$$4!C_4^n = 5P_3^n$$
$$\Leftrightarrow \quad 4!\frac{n!}{(n-4)!4!} = 5\frac{n!}{(n-3)!}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{n!}{(n-4)!} = \frac{5n!}{(n-3)(n-4)!}$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{5}{n-3}$$
$$\Leftrightarrow \quad n - 3 = 5$$
$$\Leftrightarrow \quad n = 8$$

Jadi, $n^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$.

Problem Solving

Dari 10 orang yang mendaftar karyawan di suatu perusahaan, hanya akan diterima 6 orang sebagai karyawan. Tentukan banyak cara untuk memilih keenam orang itu.

Jawab:

Pada kasus ini urutan orang yang diterima sebagai karyawan tidak diperhatikan. Jadi, kasus ini dapat diartikan sebagai kombinasi 6 unsur dari 10 unsur yang tersedia. (Mengapa demikian?)

$$C_6^{10} = \frac{10!}{(10-6)!\ 6!} = \frac{10!}{4!\ 6!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{4!\ 6!}$$
$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

Jadi, terdapat 210 cara.

4. Teorema Binomial Newton

Bentuk $a+b, x+y, x^2-y^2$, dan seterusnya dinamakan bentuk binom. Termasuk bentuk $(a+b)^n$. Bentuk $(a+b)^n$ dapat diuraikan menjadi suku-sukunya. Proses menguraikan ini dinamakan perluasan atau ekspansi binomial atau binomial Newton.

Teorema Binomial Newton (Teorema Binom)

Untuk n bilangan bulat positif, berlaku

$$(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^n b^n$$

Dapat juga ditulis dengan notasi sigma berikut.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^{n-k} b^k$$

Untuk $n=1 \rightarrow (a+b)^1 \rightarrow$ koefisien $C_0^1 \quad C_1^1$

Untuk $n=2 \rightarrow (a+b)^2 \rightarrow$ koefisien $C_0^2 \quad C_1^2 \quad C_2^2$

Untuk $n=3 \rightarrow (a+b)^3 \rightarrow$ koefisien $C_0^3 \quad C_1^3 \quad C_2^3 \quad C_3^3$

Untuk $n=4 \rightarrow (a+b)^4 \rightarrow$ koefisien $C_0^4 \quad C_1^4 \quad C_2^4 \quad C_3^4 \quad C_4^4$

Untuk $n=5 \rightarrow (a+b)^5 \rightarrow$ koefisien $C_0^5 \quad C_1^5 \quad C_2^5 \quad C_3^5 \quad C_4^5 \quad C_5^5$

Jika kalian selesaikan akan diperoleh susunan koefisien berikut.

$(a+b)$ 1 1 $\rightarrow a+b$

$(a+b)^2$ 1 2 1 $\rightarrow a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3$ 1 3 3 1 $\rightarrow a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1 $\rightarrow a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1 $\rightarrow a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Bagaimana penggunaannya? Perhatikan contoh berikut.

Contoh 1:

Uraikan bentuk berikut dalam suku-sukunya.

a. $(x+y)^3$
b. $(x+y)^4$
c. $(2x+y)^5$
d. $(2x-y)^6$

Jawab:

a. $(x+y)^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

b. $(x+y)^4 = \mathbf{1}x^4 + \mathbf{4}x^3y + \mathbf{6}x^3y^2 + \mathbf{4}xy^3 + \mathbf{1}y^4$
$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 = y^4$

Tantangan

Kreativitas

• Kerjakan di buku tugas

Diketahui persamaan

$m^3 = aC_1^m + bC_2^m + cC_3^m$

Untuk sebarang bilangan bulat positif m, nilai $a + b + c$ adalah

a. 5
b. 12
c. 13
d. 36
e. 37

Soal Lomba Matematika Nasional UGM 2006

c. $(2x + y)^5 = \mathbf{1}(2x)^5 + \mathbf{5}(2x)^4(y) + \mathbf{10}(2x)^3(y)^2 + \mathbf{10}(2x)^2(y)^3 + \mathbf{5}(2x)(y)^4 + \mathbf{1}(y)^4$
$= 32x^5 + 80x^4y + 80x^3y^2 + 40x^2y^3 + 10xy^4 + y^4$

d. $(2x - y)^6$

Ditentukan terlebih dahulu koefisien binom.

$$C_0^6 = \frac{6!}{(6-0)!0!} = 1$$

$$C_1^6 = \frac{6!}{(6-1)!1!} = \frac{6!}{5!1!} = 6$$

$$C_2^6 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$C_4^6 = \frac{6!}{(6-4)!4!} = \frac{6!}{2!4!} = 15$$

$$C_5^6 = \frac{6!}{(6-5)!5!} = \frac{6!}{1!5!} = 6$$

$$C_6^6 = \frac{6!}{(6-6)!6!} = \frac{6!}{0!6!} = 1$$

Jadi, $(2x - y)^6 = C_0^6(2x)^6(-y)^0 + C_1^6(2x)^5(-y)^1 + C_2^6(2x)^4(-y)^2 + C_3^6(2x)^3(-y)^3 + C_4^6(2x)^2(-y)^4 + C_5^6(2x)^1(-y)^5 + C_6^6(2x)^0(-y)^6$
$= 1(64x^6) + 6(-32x^5y) + 15(16x^4y^2) + 20(-8x^3y^3) + 15(4x^2y^4) + 6(-2xy^5) + 1(y^6)$
$= 64x^6 - 192x^5y + 240x^4y^2 - 160x^3y^3 + 60x^2y^4 - 12xy^5 + y^6$

Contoh 2:

Tentukan koefisien yang diminta pada ekspansi-ekspansi berikut.

a. $(3x + 2y)^{11}$; x^7y^4
b. $(-2x + 3y)$; x^3y^8

Jawab:

a. Pertanyaan ini dapat dijawab dengan menjabarkan $C_4^{11}(3x)^7(2y)^4$.

- $C_4^{11} = \dfrac{11!}{(11-4)!4!} = \dfrac{11!}{7!4!} = 330$

- $C_4^{11}(3x)^7(2y)^4 = 330(2.187x^7)(16y^4)$
  $= 11.547.360\ x^7y^4$

Jadi, koefisien x^7y^4 pada ekspansi $(3x + 2y)^{11}$ adalah 11.547.360.

b. Terlebih dahulu bentuk $C_8^{11}(-2x)^3(3y)^8$ dijabarkan.

- $C_8^{11} = \dfrac{11!}{(11-8)!8!} = \dfrac{11!}{3!8!} = 165$
- $C_8^{11}(-2x)^3(3y)^8 = 165(-8x^3)(6.561\ y^8)$
  $= -8.660.520x^3y^8$

Soal Kompetensi 3

• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan nilai kombinasi berikut.

   a. C_5^7
   b. C_1^4
   c. C_2^{10}
   d. C_4^4
   e. C_0^6
   f. C_3^{10}
   g. C_{n-1}^n
   h. C_n^{n+2}
   i. C_n^{2n}

2. Tunjukkan bahwa

   a. $C_2^{11} = C_9^{11}$
   b. $C_5^{15} = C_{10}^{15}$
   c. $C_1^{17} = C_{16}^{17}$
   d. $C_0^{10} = C_{10}^{10}$

3. Berapa banyak warna campuran yang terdiri atas 5 warna apabila 5 warna tersebut dipilih dari 8 warna?
4. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $C_2^n = 4n + 5$
   b. $nP_b^a = C_b^a$
   c. $C_n^{2n} = 2C_{n-1}^{2n-1}$
   d. $C_n^{n+2} = 45$
   e. $4C_2^n = C_3^{n+2}$
   f. $C_{13}^n = C_{11}^n$

5. Sebanyak 12 orang yang akan mengikuti pertemuan di sebuah hotel, hanya 8 orang yang diperbolehkan untuk mengikuti pertemuan itu. Berapa banyak cara memilih kedelapan orang tersebut?

Tantangan

Eksplorasi

• Kerjakan di buku tugas

Dari 10 orang akan dibagi menjadi 3 kelompok. Berapa banyak cara untuk mengelompokkan kalau kelompok pertama terdiri atas 4 orang, kelompok kedua terdiri atas 3 orang, dan kelompok ketiga terdiri atas 3 orang?

6. Dalam suatu pelatnas bulu tangkis ada 10 orang pemain putra dan 8 orang pemain putri. Berapa banyak pasangan ganda yang dapat dibentuk untuk
   a. ganda putra;
   b. ganda putri;
   c. ganda campuran?
7. Pada sebuah kotak berisi 10 kelereng putih dan 6 kelereng biru. Dari kotak itu diambil 5 kelereng sekaligus. Berapa banyak pilihan untuk mengambil kelereng itu jika 5 kelereng itu terdiri atas
   a. 3 kelereng putih dan 2 kelereng biru;
   b. 4 kelereng putih dan 1 kelereng biru;
   c. semuanya kelereng putih?
8. Dalam rapat anggota tahunan koperasi Jaya Utama dihadiri oleh 15 peserta. Salah satu agenda dalam rapat tersebut adalah akan dipilih 3 orang dari semua yang hadir untuk mewakili koperasi dalam suatu seminar. Berapa banyak cara pemilihan pengurus tersebut?
9. Dalam sebuah tumpukan kartu *bridge* terdapat 10 kartu berwarna merah dan 15 kartu berwarna hitam. Dari tumpukan tersebut diambil 5 kartu secara acak. Ada berapa cara pengambilan kartu jika maksimal kartu warna hitam yang terambil 4 buah?
10. Dengan menggunakan teorema binom,
    a. ekspansikan bentuk aljabar teorema binom ke dalam suku-sukunya;
       1) $(x + y)^6$
       2) $(x - y)^6$
       3) $(x + 3y)^5$
       4) $(x - 3y)^6$
       5) $(-4x + 2y)^7$
    b. tentukan koefisien-koefisien suku-suku yang diminta dari ekspansi binom berikut.
       1) $(x + y)^9$; x^2y^7
       2) $(x - y)^{12}$; x^3y^9
       3) $(3x + y)^8$; x^4y^4
       4) $(2x - 5y)^7$; x^5y^2
       5) $(x + \frac{1}{2y})^6 ; x^3(\frac{1}{y})^3$
       6) $(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2y})^8 ; \frac{1}{x^3y^5}$

Jendela Informasi

Informasi lebih lanjut

Kolmogorov (1903–1987)

Sumber: *www.cygo.com*

A. N. Kolmogorov

Tokoh matematika yang memperkenalkan pendekatan teori peluang dengan aksioma modern adalah Andrew Nikolavich Kolmogorov (1903–1987). Dia kuliah di Moskow State University pada usia 17 tahun dan lulus pada tahun 1925. Dia adalah orang yang telah membuktikan teorema mendasar yang menjadi konsekuensi dari pendekatan aksioma tentang peluang.

Salah satu pengembangan dari teori peluang yang ia sumbangkan adalah dua buah sistem persamaan diferensial parsial. Akibat dari sumbangan ini, teori peluang dapat diaplikasikan secara luas ke bidang-bidang lain, seperti kimia, fisika, teknik sipil, bahkan biologi. Carilah informasi mengenai tokoh ini dan perannya di dunia matematika.

Sumber: *Ensiklopedi Pengetahuan,* 2007

B. Peluang Suatu Kejadian dan Komplemennya

Pada waktu kalian lulus dari SMP, mungkin kalian ingin melanjutkan ke SMA favorit. Misalkan penerimaan siswa di SMA itu dilakukan secara objektif. Dengan nilai yang kalian miliki, tentu telah terpikirkan olehmu kemungkinan diterima atau tidaknya di SMA itu.

Hal-hal yang menyangkut dengan berbagai kemungkinan dari suatu kejadian akan kalian pelajari di subbab ini. Namun, sebelumnya kalian akan diperkenalkan dengan istilah-istilah yang berkorelasi dengan penentuan nilai kemungkinan suatu kejadian. Nilai kemungkinan seperti ini sering disebut *peluang* atau *probabilitas*. Istilah-istilah yang dimaksud adalah *percobaan*, *ruang sampel*, dan *kejadian*.

1. Percobaan, Ruang Sampel, dan Kejadian

Misalkan kalian melemparkan sebuah dadu yang mempunyai 6 sisi. Setelah dilempar, sisi yang berada di atas tentu hanya satu, misalnya sisi bermata dadu 5. Jika setiap sisi (mata dadu) diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, kemungkinan munculnya setiap mata dadu adalah sama. Hal diasumsikan dadu adalah benda homogen. Dari kegiatan di atas, tindakan (kegiatan) melempar dadu ke atas dinamakan *percobaan*, himpunan sisi-sisi (mata dadu) 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 dinamakan *ruang sampel*, dan kejadian munculnya salah satu mata dadu pada sisi atas dinamakan *kejadian*.

Pada ruang sampel, titik (sisi) yang mungkin muncul di atas adalah 1, 2, 3, 4, 5, atau 6. Anggota ruang sampel dinamakan *titik sampel*. Kejadian yang hanya terdiri atas satu titik sampel dinamakan *kejadian sederhana*, sedangkan kejadian yang terdiri atas beberapa titik sampel dinamakan *kejadian majemuk*.

Mari Berdiskusi
Mengomunikasikan gagasan

Dari penjelasan di atas, dapatkah kalian mendefinisikan percobaan, ruang sampel, dan kejadian? Coba bandingkan hasilnya dengan teman-teman kalian.

Contoh:

Pada pelemparan sebuah koin, dengan sisi-sisinya gambar (G) dan angka (A), tentukan ruang sampelnya. Kemudian, sebutkan pula ruang sampelnya jika koin yang dilemparkan 2 buah. Bagaimana pula jika koin yang dilempar 3 buah?

Jawab:

Untuk sebuah koin, jika ruang sampel S maka $S = \{A, G\}$.
Untuk dua buah koin, ruang sampel dapat ditentukan dengan bantuan tabel berikut.

II / I	**A**	**G**
A G	AA GA	AG GG

Jadi, ruang sampelnya adalah $S = \{AA, AG, GA, GG\}$.

Untuk 3 buah koin, ruang sampelnya dapat ditentukan sebagai berikut.

	AA	***AG***	***GA***	***GG***
A G	AAA GAA	AAG GAG	AGA GGA	AGG GGG

Jadi, ruang sampelnya adalah $S = \{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG\}$.

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Kalian telah mampu bagaimana cara menentukan ruang sampel untuk sebuah koin, dua buah koin, tiga buah koin. Sekarang coba kalian tentukan ruang sampel pada pelemparan:

a. empat buah koin;
b. sebuah koin dan sebuah dadu;
c. dua buah koin dan sebuah dadu.

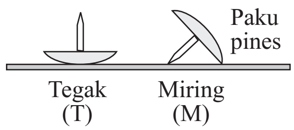
2. Peluang Suatu Kejadian

Untuk memahami definisi peluang, kita akan menggunakan uang logam (koin) yang bersisi angka (A) dan gambar (G). Berikut ini adalah contoh percobaan pelemparan koin dengan banyak percobaan makin besar.

Banyak Percobaan (n)	Frekuensi Muncul Angka (A)(m)	Frekuensi Relatif $F_r(A) = \frac{m}{n}$
10	8	0,8000
100	62	0,6200
1.000	473	0,4730
5.000	2.550	0,5100
10.000	5.098	0,5098
15.000	7.619	0,5079
20.000	10.038	0,5019

Sumber: *Applied Finite Mathematics*, 1982

Pada tabel di atas, tampak bahwa frekuensi relatif menyatakan frekuensi muncul angka (A), yaitu m dibagi dengan banyak percobaan (n). Dari tabel tampak makin banyak percobaan yang dilakukan, frekuensi relatif makin mendekati setengah (0, 5). Peluang munculnya angka adalah limit frekuensi relatif untuk banyak percobaan n mendekati tak berhingga. Jadi, peluang munculnya angka adalah 0,5. Hal ini dapat ditulis dengan $P(A) = 0,5$.



Gambar 2.6

Bagaimana jika permukaannya tidak seimbang, namun juga ada 2 kemungkinan muncul? Apakah peluangnya juga 0,5? Tentu tidak. Hal ini dapat dilihat dari percobaan berikut yang menggunakan objek paku pines. Jika paku ini dilempar ke atas, hanya ada 2 kemungkinan muncul, yaitu miring (M) dan tegak (T).

Perhatikan hasil percobaan itu, seperti disajikan dalam tabel berikut.

Banyak Percobaan (n)	Frekuensi Paku Miring (M) (m)	Frekuensi Relatif Paku Muncul Miring $F_r(M) = \frac{m}{n}$
1.000	314	0,314
5.000	1.577	0,3154
10.000	3.157	0,3157
15.000	4.682	0,3121
20.000	6.214	0,3107

Sumber: *Applied Finite Mathematics*, 1982

Tampak bahwa $\lim\limits_{n \to \infty} F_r(M)$ tidak mendekati 0,5, tetapi mendekati 0,3. Hal ini berarti $P(M) = 0,3$.

Secara umum, peluang dapat didefinisikan sebagai berikut.

Peluang suatu kejadian A dari suatu percobaan adalah nilai limit frekuensi relatif dari peristiwa itu untuk banyak percobaan (n) tak berhingga, ditulis

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} F_r(A)$$

Definisi di atas dinamakan definisi empiris.

Selain definisi empiris, kalian akan lebih mudah memahami peluang dari definisi klasik.

Seperti yang kalian ketahui di depan bahwa peluang adalah suatu kemungkinan munculnya suatu kejadian. Misalkan dalam suatu percobaan mengakibatkan munculnya n hasil yang mungkin, dengan masing-masing hasil mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul. Jika kejadian A dapat muncul sebanyak k kali, peluang kejadiannya dirumuskan dengan

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

Perhatian

Materi tentang limit fungsi baru akan kalian pelajari di bab berikutnya. Oleh karena itu, di sini hanya ditunjukkan saja bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ dibaca "limit fungsi $f(x)$ untuk x mendekati tak berhingga".

Pengertian di atas didasarkan pada pengertian klasik dari suatu peluang. Pengertian mengenai peluang akan sangat mudah kalian pahami dengan menggunakan ruang sampel.

Misalkan ruang sampel dari suatu percobaan adalah S. Masing-masing anggota dari ruang sampel S mempunyai kesempatan yang sama untuk muncul. Jika A suatu kejadian, dengan $A \subset S$, peluangnya dapat dirumuskan

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

dengan $n(A)$ banyak anggota kejadian A dan $n(S)$ banyak anggota ruang sampel S.

Contoh:

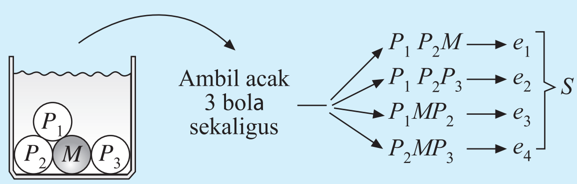
Suatu kotak berisi 3 bola putih dan sebuah bola merah. Dari dalam kotak, diambil secara acak 3 bola sekaligus. Tentukan peluang ketiga bola yang terambil terdiri atas:

a. Salah satu bola berwarna merah;

b. Ketiganya berwarna putih.

Jawab:

Cara 1:



Gambar 2.7

Perhatikan ilustrasi pada **Gambar 2.7**. Bola putih masing-masing P_1, P_2, dan P_3, sedangkan bola merah M.

$$\left.\begin{aligned} P_1P_2M &\to e_1 \\ P_1P_2P_3 &\to e_2 \\ P_1MP_3 &\to e_3 \\ P_2MP_3 &\to e_4 \end{aligned}\right\} S$$

Dari proses pengambilan di atas, hasil yang mungkin (ruang sampelnya) adalah $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \to n(S) = 4$.

a. Jika A adalah peristiwa salah satu bola yang terambil berwarna merah. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa $A = \{e_1, e_3, e_4\} \to n(A) = 3$.
   Karena kita meyakini masing-masing titik sampel dalam ruang sampel S berpeluang sama untuk terambil maka
   $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{4}$.
   Jadi, peluang salah satu bola yang terambil berwarna merah adalah $\dfrac{3}{4}$.

b. Jika B adalah peristiwa ketiga bola yang terambil berwarna putih. Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa $B = \{e_2\} \to n(B) = 1$.
   Jadi, $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{1}{4}$.

Cara 2:

Dengan menggunakan penalaran rinci. Dari **Gambar 2.7** misal ketiga bola yang terambil, kebetulan terambil P_1P_2M. Susunan yang terambil ini sebenarnya dapat berupa P_1MP_2, MP_1P_2, P_2MP_1, dan seterusnya. Karena kita tidak dapat membedakan satu sama lain, susunan $P_1P_2M = P_1MP_2 = P_2MP_1 = MP_1P_2 =$ ... dan seterusnya. Artinya, susunan bola yang terambil tidak memerhatikan urutan, berarti merupakan kasus kombinasi.

a. Peluang salah satu bola terambil merah dari 3 pengambilan

$$\begin{aligned} P(A) &= P(1M, 2P) \\ &= P(1M \text{ dari } 1M \text{ dan } 2P \text{ dari } 3P) \\ &= \frac{n(1M \text{ dari } 1M \text{ dan } 2P \text{ dari } 3P)}{n(3 \text{ bola dari } 4 \text{ bola})} \\ &= \frac{C_1^1 \times C_2^3}{C_3^4} = \frac{1 \times 3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

b. $P(B) = P(\text{ketiganya putih})$

$$= P(3P, 0M)$$

$$= P(3P \text{ dari } 3P \text{ dan } 0M \text{ dari } 1M)$$

$$= \frac{n(3P \text{ dari } 3P \text{ dan } 0M \text{ dari } 1M)}{n(3 \text{ bola dari } 4 \text{ bola})}$$

$$= \frac{C_3^3 \times C_0^1}{C_4^3} = \frac{1 \times 1}{4} = \frac{1}{4}$$

Problem Solving

Misalkan dua buah dadu dilempar bersama-sama ke atas sebanyak satu kali. Jika A menyatakan kejadian munculnya angka 5 pada dadu pertama, B menyatakan kejadian munculnya jumlah angka dadu pertama dan kedua adalah 6, dan C menyatakan kejadian munculnya angka yang sama pada kedua dadu, tentukan

a. $P(A)$; b. $P(B)$; c. $P(C)$.

Jawab:

Untuk dapat menjawab soal di atas, kalian harus dapat menentukan ruang sampel dari suatu percobaan dengan dua buah dadu itu. Ruang sampelnya dapat dipahami melalui tabel berikut.

I \ II	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Perhatikan tabel di atas. Dari tabel itu dapat dikatakan bahwa banyak anggota ruang sampel $n(S) = 36$, yaitu $S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), ..., (2, 1), (2, 2), ..., (3, 1), (3, 2), ..., (4, 1), (4, 2), ..., (5, 1), (5, 2), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6, 6)\}$.

Banyak anggota kejadian A adalah $n(A) = 6$, yaitu

$A = \{(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6)\}$.

Banyak anggota kejadian B adalah $n(B) = 5$, yaitu

$B = \{(5, 1), (4, 2), (3, 3), (2, 4), (1, 5)\}$.

Banyak anggota kejadian C adalah $n(C) = 6$, yaitu

$C = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$.

Dengan demikian, kita dapat menjawab hal-hal berikut.

a. $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

b. $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{5}{36}$

c. $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

Jendela Informasi

Informasi lebih lanjut

Sejarah Ilmu Peluang

Hitung peluang pada mulanya dihubungkan dengan permainan judi, khususnya dadu atau kartu. Pada suatu saat Chevalier de Mere memberi suatu pertanyaan kepada Blaise Pascal. De Mere memberikan suatu pertanyaan yang berkaitan dengan permainan dadu. Salah satunya adalah bagaimana membagi hasil taruhan permainan dadu yang harus berhenti di tengah permainan. Pascal bersama-sama dengan temannya, Pierre de Fermat, menyelesaikan pertanyaan itu.

Berikut ini adalah jawaban yang dikemukakan oleh Pascal dan Fermat untuk menyelesaikan teka teki yang diajukan oleh de Mere.

Teman de Mere dapat mengatakan bahwa peluang untuk memperoleh dua lemparan yang memenangkan taruhan adalah separuh peluang de Mere untuk memperoleh satu lemparan agar ia bisa menang. Jadi, ia berhak memperoleh separuh bagian de Mere, yaitu $21\frac{1}{3}$ pistole dan De Mere memperoleh $42\frac{2}{3}$. Sebaliknya, De Mere mengajukan pendapat bahwa pada lemparan berikutnya kalaupun ia tidak beruntung, permainan akan berakhir seri sehingga De Mere dan temannya sama-sama memperoleh 32 pistole. Kemungkinan lain, De Mere yang beruntung. Ia yang memenangkan permainan sehingga memperoleh 64 pistole. Dengan demikian, sebelum dadu dilemparkan, De Mere sudah memperoleh hak 32 pistole, kemudian 16 pistole lagi atas peluang 50% kemenangan De Mere.

(a)
Blaise Pascal
(1623–1662)

(b)
Pierre de Fermat
(1601–1665)

Sumber: *www.cygo.com*

Bertolak dari inilah, ilmu hitung peluang lahir. Sekarang, ilmu ini banyak digunakan di berbagai disiplin ilmu, seperti lahirnya teori atom, mekanika kuantum, dan radioaktivitas dalam fisika. Dalam matematika sendiri, ilmu hitung peluang melahirkan statistika. Carilah informasi selengkapnya tentang Pascal dan Fermat. Cari juga karya yang lain dari kedua tokoh itu di media internet.

Sumber: *www.myscienceblog.com*

Soal Kompetensi 4

• Kerjakan di buku tugas

1. Seorang peneliti ingin mengetahui tingkat kecerdasan dari seluruh kelas XI SMA Bina Bangsa. Kelas XI terdiri atas 5 kelompok, yaitu XI A, XI B, XI C, XI D, dan XI E. Setiap kelas terdiri atas 35 siswa. Peneliti itu yakin bahwa hanya dengan meneliti kelas XI C saja tingkat kecerdasan seluruh kelas XI dapat diketahui.

   Tentukan
   a. ruang sampel dan banyak anggotanya;
   b. jumlah sampelnya;
   c. nama percobaannya.
2. Sebanyak 5 orang terdiri atas 2 orang putra dan 3 orang putri akan dipilih 1 orang secara acak untuk mewakili suatu pertemuan. Tentukan peluang terpilihnya seorang putra untuk mewakili pertemuan itu. Berapa peluang terpilihnya seorang putri?
3. Pak Candra mengambil 100 biji jagung yang baik, kemudian memasukkannya dalam sebuah kantong plastik. Beberapa saat kemudian, anaknya juga memasukkan 50 biji jagung yang jelek ke dalam kantong yang sama.
   a. Jika Pak Candra mengambil 1 biji jagung dari kantong itu, berapa peluang terambil biji jagung yang baik?
   b. Jika 5 biji jagung yang jelek dibuang dari kantong itu, kemudian Pak Candra mengambil sebuah biji jagung lagi, berapa peluang terambil biji yang baik pada pengambilan kali ini?
4. Diberikan 7 angka, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7. Dari huruf-huruf tersebut akan dibentuk angka ratusan. Tentukan
   a. peluang angka ratusan lebih dari 500 yang terjadi;
   b. peluang angka ratusan ganjil yang terjadi.
5. Tiga buah koin dilempar bersama-sama. Sisi koin adalah sisi angka A dan sisi gambar G. Tentukan
   a. peluang muncul ketiga-tiganya gambar;
   b. peluang muncul 1 gambar dan 2 angka.

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

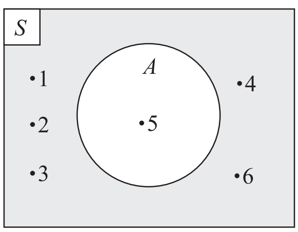
Suatu tas koper berisi uang dilengkapi dengan kunci pengaman yang terdiri atas 4 digit. Masing-masing digit merupakan angka 0 sampai dengan 9. Berapa peluang seseorang untuk menemukan angka-angka yang tepat sebagai kunci pembukanya?

6. Diketahui tumpukan satu set kartu *bridge* sejumlah 52 buah yang terdiri atas 13 buah kartu bergambar hati (warna merah), 13 buah kartu bergambar wajik (warna merah), 13 buah kartu bergambar sekop (warna hitam), dan 13 buah kartu bergambar cengkeh (warna hitam). Ketiga belas kartu dari masing-masing gambar terdiri atas kartu bernomor 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Jack (*J*), queen (*Q*), king (*K*), dan *As*.

   Selanjutnya diambil 1 buah kartu dari tumpukan. Berapa peluang kejadian yang terambil itu
   a. kartu As berwarna merah;
   b. kartu bergambar wajik;
   c. kartu berwarna merah;
   d. kartu bernomor 8;
   e. kartu bernomor ganjil;
   f. kartu bernomor berwarna hitam.
7. Soal analog nomor 7. Apabila diambil 3 buah kartu dari tumpukan, berapa peluang kejadian terambilnya
   a. kartu *As* semuanya;
   b. kartu hitam semuanya;
   c. dua buah kartu warna merah dan 1 buah warna hitam;
   d. dua buah kartu bernomor ganjil dan 1 buah bernomor genap;
   e. semua kartu bernomor genap dan hitam.
8. Andi merupakan salah satu siswa dalam suatu kelas yang terdiri atas 15 putra dan 10 putri. Pada suatu hari akan dipilih perwakilan kelas dalam lomba cerdas cermat sejumlah 4 orang yang terdiri atas 2 laki-laki dan 2 perempuan. Berapa peluang terpilihnya Andi menjadi perwakilan kelas?

3. Komplemen Suatu Kejadian dan Peluangnya

Misalkan A adalah kejadian munculnya angka 5 pada pelemparan sebuah dadu. Jadi, $A = \{5\}$. Kejadian munculnya angka bukan 5, yaitu $A^c = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ dinamakan *komplemen dari kejadian A*, ditulis A^c (dibaca A komplemen). Perhatikan diagram Venn di samping.



Gambar 2.8

Pada diagram di samping, $A = \{5\}$ dan $A^c = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
Karena $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, berlaku $S = A \cup A^c$. Di samping itu, $n(A) = 1$, $n(A^c) = 5$, dan $n(S) = 6$. Ternyata, $n(A) + n(A^c) = n(S)$ atau $n(A^c) = n(S) - n(A)$.

Jika kedua ruasnya dibagi dengan $n(S)$, diperoleh

$$\frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} - \frac{n(A)}{n(S)} \Leftrightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$$

Jadi, jika $P(A^c)$ peluang komplemen A dan $P(A)$ peluang kejadian A, berlaku

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Contoh:

Pada pelemparan sebuah koin yang mempunyai sisi angka A dan sisi gambar G, tentukan peluang muncul sisi angka dan peluang muncul sisi bukan angka.

Jawab:

Misalkan E adalah kejadian muncul sisi angka.

Pada pelemparan sebuah koin, ruang sampelnya adalah $S = \{A, G\}$. Jadi, $n(S) = 2$. Karena $n(A) = 1$ maka

$$P(E) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

Jadi, peluang muncul sisi angka adalah $\frac{1}{2}$.

Peluang muncul bukan sisi angka dapat ditentukan dengan menggunakan hubungan

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Problem Solving

Sebuah kotak berisi 3 kelereng merah dan 4 kelereng biru. Dari dalam kotak itu diambil 2 kelereng sekaligus. Tentukan peluang terambil kelereng kedua-duanya bukan biru.

Jawab:

Banyak cara pengambilan 2 kelereng biru dari 4 kelereng biru yang ada adalah

$$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!\,2!} = 6 \text{ cara.}$$

Banyak cara pengambilan 2 kelereng dari seluruh kelereng dalam kotak (7 kelereng) adalah $C_2^7 = \frac{7!}{(7-2)!\,2!} = 21$ cara.

Misalkan A adalah kejadian terambil kelereng kedua-duanya biru. $P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$

Oleh karena itu, peluang terambil kelereng kedua-duanya bukan biru adalah

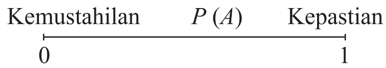
$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

4. Kisaran Nilai Peluang

Misalkan A adalah kejadian dalam ruang sampel S. Tentu $n(A) \le n(S)$ dan $n(A) \ge 0$. Hal ini dituliskan $0 \le n(A) \le n(S)$. Jika pada setiap ruas dibagi dengan $n(S)$, diperoleh

$$\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(A)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \le P(A) \le 1 \quad \text{..............................} \quad \left(\text{Ingat: } \frac{n(A)}{n(S)} = P(\text{A})\right)$$



Gambar 2.9

Jadi, nilai peluang dari suatu kejadian berada pada interval tertutup [0, 1].
Untuk $P(A) = 0$ dinamakan *kemustahilan* dan untuk $P(A) = 1$ dinamakan *kepastian*.

Mari Berdiskusi
Observasi

Dapatkah kalian memberikan contoh peluang suatu kejadian yang bernilai 0 atau 1? Berikan alasannya, mengapa kalian menyatakan demikian.

Soal Kompetensi 5

• Kerjakan di buku tugas

1. Pada pelemparan sebuah dadu bersisi 6 sebanyak satu kali, tentukan
   a. peluang kejadian muncul angka 2;
   b. peluang kejadian muncul angka ganjil;
   c. peluang kejadian muncul bukan angka 2;
   d. peluang kejadian muncul bukan angka prima.
2. Sebuah dadu dan sebuah koin dilempar sekaligus. Dadu mempunyai 6 sisi dan koin mempunyai sisi angka dan sisi gambar.
   Tentukan
   a. peluang kejadian muncul angka genap pada dadu dan sisi gambar pada koin;
   b. peluang kejadian muncul bukan angka genap pada dadu dan sisi gambar pada koin.
3. Sebuah kotak berisi 8 bola putih dan 4 bola merah. Dari kotak itu akan diambil 3 bola sekaligus secara acak.

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

1. Tiga keping uang logam dilempar ke atas sebanyak satu kali. Hitunglah peluang kejadian
   a. ketiga-tiganya tidak muncul sisi angka;
   b. paling tidak muncul 2 sisi gambar;
   c. paling banyak muncul 2 sisi angka.
2. Sebuah tas berisi 20 bola golf. Bola-bola itu diberi nomor 1–20. Akan diambil secara acak dua bola sekaligus.
   a. Tentukan peluang terambil bola dengan nomor 3 dan 7.
   b. Tentukan peluang terambil bola dengan nomor ganjil dan nomor genap.

Tentukan:
a. peluang terambil 2 bola merah dan 1 bola putih;
b. peluang terambil 3 bola putih;
c. peluang terambil ketiganya bukan merah.

4. Dua buah dadu dilempar bersama-sama. Hitunglah nilai
   a. peluang muncul kedua-duanya angka genap;
   b. peluang muncul kedua-duanya angka yang sama;
   c. peluang muncul kedua-duanya bukan angka yang sama;
   d. peluang muncul jumlah angka-angka yang muncul 13.
5. Diberikan angka-angka 3, 4, dan 5. Dari ketiga angka itu akan dibentuk angka puluhan dengan angka-angkanya boleh berulang. Dari bilangan-bilangan yang terbentuk, diambil sebuah bilangan. Tentukan
   a. peluang terambil bilangan dengan angka-angka penyusunnya berbeda;
   b. peluang terambil bilangan dengan angka-angka penyusunnya sama;
   c. peluang terambil bilangan yang nilainya lebih dari 55;
   d. peluang terambil bilangan yang nilainya kurang dari 33.
6. Sebelas buah bola bernomor dari 1 s.d. 11 dimasukkan di dalam kotak dan diambil satu buah secara acak. Tentukan peluang terambilnya
   a. bola bernomor genap;
   b. bola bernomor ganjil;
   c. bola dengan nomor kurang dari 8;
   d. bola bernomor lebih atau sama dengan 8;
   e. bola bernomor bilangan prima;
   f. bola bernomor bukan bilangan prima.
7. Tiga buah dadu dilemparkan sekali sekaligus. Tentukan peluang kejadian
   a. munculnya mata dadu berjumlah kurang dari 16;
   b. munculnya mata dadu berjumlah bukan bilangan prima;
   c. munculnya semua mata dadu bernilai genap;
   d. munculnya semua mata dadu bernilai ganjil.
8. Di dalam sebuah kotak berisi 10 buah bola. Bola-bola itu diberi nomor 1, 2, 3, 4, dan 5, masing-masing ada 2 buah. Diambil 3 buah bola sekaligus. Tentukan peluang kejadian
   a. jumlah ketiga angka pada bola 6;
   b. jumlah ketiga angka pada bola tidak lebih dari 8.

C. Frekuensi Harapan Suatu Kejadian

Perhatikan kembali percobaan pelemparan dadu bersisi 6. Peluang muncul setiap sisi adalah sama, yaitu $\frac{1}{6}$. Jika pelemparan dilakukan sebanyak 60 kali, harapan muncul suatu sisi adalah $\frac{1}{6}$ dari 60 kali lemparan, yaitu 10 kali. Kemunculan 10 kali untuk satu sisi inilah yang diharapkan terjadi pada pelemparan sebanyak 60 kali. Hal ini dinamakan *frekuensi harapan*. Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Frekuensi harapan F_h adalah banyak kejadian yang diharapkan dapat terjadi pada suatu percobaan dan dirumuskan

$$F_h(A) = P(A) \times n$$

dengan $P(A)$ peluang kejadian A dan n banyak percobaan.

Contoh:

Peluang terjadi hujan pada bulan November adalah 0,71. Berapa kemungkinan tidak hujan pada bulan ini?

Jawab:

Misalkan A adalah kejadian hujan pada bulan November.
Jadi, $P(A) = 0{,}71$.
Peluang tidak terjadi hujan pada bulan ini adalah

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0{,}71 \\ &= 0{,}29 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, kemungkinan tidak terjadi hujan pada bulan November adalah $0{,}29 \times 30$ hari = 8,7 hari.

Tugas: Inkuiri

• Kerjakan di buku tugas

Kalian telah mengenal kejadian yang mustahil terjadi dan kejadian yang pasti terjadi, serta nilai peluangnya. Bagaimana nilai frekuensi harapannya? Dapatkah kalian memberikan contohnya?

Soal Kompetensi 6

• Kerjakan di buku tugas

1. Sebuah dadu dilemparkan 20 kali. Berapa kali kemungkinan muncul angka genap?
2. Pada percobaan melempar 3 koin sebanyak 120 kali, berapakah frekuensi harapan muncul dua gambar dan 1 angka secara bersamaan pada setiap kali lemparan?
3. Sebuah koin dan sebuah dadu dilempar bersama-sama sebanyak 120 kali. Tentukan
   a. peluang muncul angka genap dan gambar;
   b. frekuensi harapan muncul angka genap dan gambar.

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Perusahaan asuransi memperkirakan bahwa kemungkinan seorang tenaga kerja mengalami kecelakaan dalam satu tahun adalah 0,12. Berapakah di antara 3.000 tenaga kerja yang diperkirakan mengalami kecelakaan dalam 1 tahun? Jika biaya perawatan akibat kecelakaan seorang tenaga kerja Rp2.750.000,00, berapa rupiahkah perusahaan asuransi itu harus menyediakan dana untuk 3 tahun?

4. Sebuah kantong berisi 2 kelereng merah, 8 kelereng biru, dan 3 kelereng putih. Sebuah kelereng diambil dari kantong itu. Jika frekuensi harapan terambil kelereng merah 10 kali, tentukan banyak pengambilan yang dilakukan.
5. Tiga koin dilempar bersama-sama sebanyak n kali. Jika A menyatakan kejadian muncul gambar secara bersamaan, tentukan
   a. n agar kejadian A muncul 2 kali;
   b. n agar kejadian A muncul 8 kali.
6. Dari sebuah kotak yang berisi 5 bola merah dan 5 bola putih, diambil secara acak 2 bola sekaligus. Apabila pengambilan dilakukan 10 kali berapakah frekuensi harapan terambil bola yang berlainan warna?
7. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan sebanyak 200 kali. Tentukan frekuensi harapan untuk kejadian
   a. munculnya mata dadu pertama adalah angka 4;
   b. munculnya kedua mata dadu sama;
   c. munculnya jumlah kedua mata dadu kurang dari 8;
   d. munculnya kedua mata dadu angka genap;
   e. munculnya jumlah kedua mata dadu lebih dari 8;
   f. munculnya mata dadu pertama ganjil dan mata dadu kedua genap.
8. Perusahan *real estate* setiap tahun rata-rata mampu membangun bangunan sebanyk 2.500 unit, yang terdiri atas tipe A 1.000 unit dan tipe B 1.500 unit. Peluang masing-masing tipe bangunan yang dibangun terjual adalah 70% dan 85%. Berapa banyak bangunan tipe A dan tipe B yang diharapkan terjual setiap tahun?

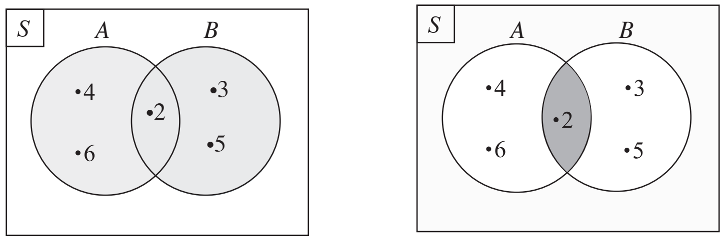
D. Peluang Kejadian Majemuk

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah diperkenalkan dengan kejadian majemuk, yaitu kejadian yang terdiri atas beberapa titik sampel. Misalkan kejadian A dan B adalah kejadian sederhana. Jika kita gunakan operasi himpunan gabungan (*union*) atau irisan (*interseksi*), akan terbentuk suatu kejadian majemuk. Misalkan A adalah kejadian muncul angka genap dan B adalah kejadian muncul angka prima pada pelemparan sebuah dadu. Dengan menggunakan operasi gabungan, dilambangkan $\cup$ dan irisan $\cap$, diperoleh kejadian majemuk $A \cup B$ dan $A \cap B$.

Pada pelemparan sebuah dadu itu, diperoleh ruang sampel

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{2, 4, 6\}$
$B = \{2, 3, 5\}$

Kejadian $A \cup B$, dibaca kejadian A *atau* B dapat ditulis $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Hal ini berarti bahwa yang terjadi kejadian A saja, B saja, atau kedua-duanya.
Kejadian $A \cap B$, dibaca kejadian A dan B dapat ditulis $A \cap B = \{2\}$. Hal ini berarti, kejadian A dan B terjadi bersama-sama.
Jika digambarkan dalam diagram Venn, tampak sebagai berikut.



$A \cup B$ (a) $A \cap B$ (b)

Gambar 2.10

Kemudian, bagaimana cara menentukan peluangnya? Perhatikan gambar di atas. Jika kita perhatikan, banyak anggota $A \cup B$ dapat dinyatakan sebagai berikut.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
Karena banyak anggota ruang sampel S adalah $n(S)$, dengan membagi kedua ruas dengan $n(S)$, diperoleh

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$\Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Jadi, diperoleh hubungan sebagai berikut.

Misalkan A dan B adalah kejadian-kejadian dalam ruang sampel S. Peluang kejadian A atau B dapat ditentukan dengan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Suatu kelas terdiri atas 40 siswa. 25 siswa gemar Matematika, 21 siswa gemar IPS, dan 9 siswa gemar Matematika dan IPS. Peluang seorang siswa tidak gemar Matematika maupun IPS adalah ....

a. $\frac{25}{40}$ d. $\frac{4}{40}$

b. $\frac{12}{40}$ e. $\frac{3}{40}$

c. $\frac{9}{40}$

UMPTN 2000

Contoh 1:

Sebuah dadu dilemparkan sekali ke atas. Jika A kejadian muncul angka genap dan B kejadian muncul angka prima, tentukan peluang muncul A atau B.

Jawab:

Ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $A = \{2, 4 ,6\}$;
$B = \{2, 3, 5\}$;

$A \cap B = \{2\}$. Dengan demikian, $n(S) = 6$, $n(A) = 3$, $n(B) = 3$, dan $n(A \cap B) = 1$.

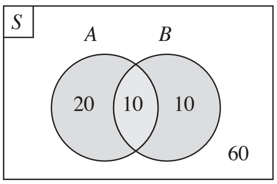
Jadi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Jadi, peluang muncul A atau B adalah $\frac{5}{6}$.

Contoh 2:

Dari 100 siswa, 30 siswa menggemari sepak bola, 20 siswa menggemari tenis meja, dan 10 orang menggemari kedua cabang olahraga itu. Jika seorang siswa dipilih secara acak, tentukan peluang siswa yang terpilih itu menggemari sepak bola atau tenis meja.



Gambar 2.11

Jawab:

Perhatikan diagram Venn yang menggambarkan soal di atas.

$S = \{\text{siswa}\} \rightarrow n(S) = 100$

$A = \{\text{siswa penggemar sepak bola}\} \rightarrow n(A) = 30$

$B = \{\text{siswa penggemar tenis meja}\} \rightarrow n(B) = 20$

$A \cap B = \{\text{siswa penggemar sepak bola dan tenis meja}\}$

$\rightarrow n(A \cap B) = 10$.

$A \cup B = \{\text{siswa penggemar sepak bola atau tenis meja}\}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

$$= \frac{30}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100}$$

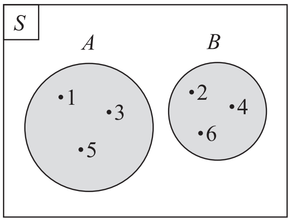
$$= \frac{40}{100}$$

$$= \frac{2}{5}$$

Jadi, peluang yang terpilih adalah siswa penggemar sepak bola atau penggemar tenis meja adalah $\frac{2}{5}$.

1. Aturan Penjumlahan dalam Peluang Kejadian Majemuk

Pada kejadian majemuk, tidak semua $A \cap B$ mempunyai anggota. Misalkan A adalah kejadian muncul angka ganjil dan B adalah kejadian muncul angka genap pada pelemparan sebuah



Gambar 2.12

dadu. Pada kejadian itu, $n(A \cap B) = 0$. Kejadian seperti ini dinamakan kejadian saling lepas (*mutually exclusive*). Jika digambarkan dengan diagram Venn, tampak sebagai berikut.
Karena $n(A \cap B) = 0$ maka $P(A \cap B) = 0$.
Akibatnya,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Dari uraian di atas, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika A dan B adalah kejadian-kejadian dalam ruang sampel S yang saling lepas, peluang A *atau* B dapat dirumuskan dengan

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Aturan seperti ini biasanya disebut *aturan penjumlahan* dalam peluang kejadian majemuk.

Contoh:

Dalam sebuah kotak terdapat 6 kelereng merah dan 4 kelereng biru. Tentukan peluang terambil kelereng merah atau biru pada pengambilan sebuah kelereng dari kotak itu.

Jawab:

Misalkan M adalah kejadian terambil kelereng merah dan B adalah kejadian terambil kelereng biru. Dari soal di atas, diperoleh $n(M) = 6$, $n(B) = 4$, dan $n(S) = 10$. Karena kelereng yang diambil hanya 1, tidak mungkin dalam sekali pengambilan mendapatkan kelereng merah dan biru sekaligus. Artinya, $P(M \cap B) = 0$. Dengan menggunakan aturan penjumlahan, diperoleh

$$\begin{aligned} P(M \cup B) &= P(M) + P(B) \\ &= \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \\ &= \frac{10}{10} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Jadi, peluang terambil kelereng merah atau biru pada pengambilan sebuah kelereng adalah 1.

2. Aturan Perkalian dalam Peluang Kejadian Majemuk

Untuk memahami peluang kejadian saling bebas stokastik, lakukan Aktivitas berikut.

Aktivitas

Tujuan : Memahami suatu kejadian yang saling bebas stokastik

Permasalahan : Seperti apakah kejadian saling bebas stokastik itu? Bagaimana menentukan peluangnya?

Kegiatan : Cobalah kalian lakukan kegiatan melempar sebuah koin dan sebuah dadu bersamaan. Misalkan A adalah kejadian muncul gambar pada koin dan B adalah kejadian muncul nomor genap pada dadu.

1. Apakah munculnya kejadian A bergantung kejadian B?
2. Bagaimanakah ruang sampelnya?
3. Apa saja elemen dari A? Berapakah peluangnya?
4. Apa saja elemen dari B? Berapakah peluangnya?
5. Apa saja elemen dari $A \cap B$? Berapakah peluangnya?
6. Apakah $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$?

Kesimpulan : Dari kegiatan di atas, apa yang dapat kalian simpulkan?

Misalkan kalian melempar sebuah koin dan sebuah dadu. Kemunculan sisi gambar (G) pada koin jelas tidak memengaruhi munculnya angka 2 pada dadu. Kejadian seperti ini dinamakan *kejadian saling bebas stokastik*.

Pada pelemparan koin dan dadu bersama-sama, ruang sampelnya adalah sebagai berikut.

Koin \ Dadu	1	2	3	4	5	6
A	$(A, 1)$	$(A, 2)$	$(A, 3)$	$(A, 4)$	$(A, 5)$	$(A, 6)$
G	$(G, 1)$	$(G, 2)$	$(G, 3)$	$(G, 4)$	$(G, 5)$	$(G, 6)$

A : sisi angka pada koin

G : sisi gambar pada koin

Misalkan A adalah kejadian muncul sisi gambar pada koin dan B adalah kejadian muncul angka 2 pada dadu. Oleh karena itu,

$P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(B) = \frac{1}{6}$.

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah ....

a. $\frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{4}$

c. $\frac{2}{21}$

d. $\frac{10}{21}$

e. $\frac{11}{21}$

Olimpiade Nasional, 2006

Sekarang perhatikan kejadian majemuk munculnya sisi gambar pada koin dan angka 2 pada dadu. Dari tabel di atas, tampak bahwa $A \cap B = \{(G, 2)\}$. Jadi, $n(A \cap B) = 1$.
Dengan demikian,

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap \text{B})}{n(S)}$$

$$= \frac{1}{12}$$

Ternyata, pada kejadian ini berlaku

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = P(A) \times P(B)$$

Secara umum, dapat dikatakan sebagai berikut.

> Jika kejadian A dan B saling bebas stokastik, $P(A)$ peluang terjadinya kejadian A dan $P(B)$ peluang terjadinya kejadian B, peluang terjadinya A dan B, ditulis $P(A \cap B)$ adalah
> $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Aturan di atas biasanya disebut *aturan perkalian* untuk dua kejadian saling bebas stokastik.

Mari Berdiskusi

Inkuiri

Setelah memahami uraian tentang kejadian saling bebas stokastik, dapatkah kalian menemukan 3 contoh kejadian yang termasuk di dalamnya? Berikan alasan kalian, mengapa kejadian itu termasuk kejadian saling bebas stokastik.

Contoh:

Dua buah dadu ditos bersama-sama. Misalnya A menyatakan kejadian muncul mata dadu genap pada dadu I dan B kejadian muncul mata dadu ganjil pada dadu II. Tentukan peluang munculnya A dan B.

Jawab:

$A = \{2,4,6\} \to n(A) = 3;\ n(S) = 6$

$B = \{1,3,5\} \to n(B) = 3;\ n(S) = 6$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Tugas: Eksplorasi

• Kerjakan di buku tugas

Pahami kembali contoh ini. Coba kalian tunjukkan dengan menggunakan tabel kemungkinan kejadian bahwa $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Problem Solving

Peluang sebuah pohon jati mampu hidup hingga 30 tahun lagi dari sekarang adalah $\frac{3}{8}$. Peluang sebuah pohon randu mampu bertahan hidup hingga 30 tahun lagi dari sekarang adalah $\frac{2}{7}$.

Tentukan

a. peluang dari sekarang keduanya akan hidup;

b. peluang hanya pohon jati yang hidup.

Jawab:

$P(A)$ = Peluang pohon jati mampu bertahan hidup hingga 30 tahun lagi dari sekarang = $\frac{3}{8}$.

$P(B)$ = Peluang pohon pohon randu mampu bertahan hidup hingga 30 tahun lagi dari sekarang = $\frac{2}{7}$.

$P(A^c)$ = Peluang pohon jati mati 30 tahun dari sekarang $= 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

$P(B^c)$ = Peluang pohon randu mati 30 tahun dari sekarang $1 - P(B) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

a. $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{2}{7}$$

$$= \frac{3}{28}$$

b. $P(A \cap B^c) = P(A) \times P(B^c)$

$$= \frac{3}{8} \times \frac{5}{7}$$

$$= \frac{15}{56}$$

3. Peluang Kejadian Bersyarat

Misalkan kejadian B terjadi jika kejadian A telah diketahui atau telah terjadi, ditulis $P(B|A)$. Untuk memahami kejadian bersyarat, lakukan Aktivitas berikut.

Aktivitas

Tujuan : Menentukan peluang kejadian bersyarat.

Permasalahan : Bagaimana menentukan peluang suatu kejadian dengan syarat kejadian lain terjadi terlebih dahulu?

Kegiatan : Sediakan 7 kelereng merah dan 3 kelereng biru, kemudian masukkan dalam 1 wadah.

1. Ambil sebuah kelereng, kemudian hitung peluang terambilnya merah.
2. Misalkan terambil merah pada pengambilan pertama.
   a. Kembalikan kelereng yang telah kalian ambil ke dalam wadah tadi. Kemudian, ambil sebuah kelereng. Tentukan peluang terambil merah pada pengambilan yang kedua ini.
   b. Tanpa mengembalikan kelereng yang telah kalian ambil pada pengambilan pertama, lanjutkan pengambilan sebuah kelereng lagi. Tentukan peluang terambil merah pada pengambilan yang kedua ini.

Kesimpulan : Apa yang dapat kalian simpulkan?

Dari aktivitas di atas, jika kalian melakukannya dengan benar, peluang terambil kelereng merah pada pengambilan kedua bergantung pada hasil pengambilan pertama. Untuk kejadian A dan B kejadian saling bebas stokastik, kejadian A yang terjadi tidak mempengaruhi peluang kejadian B, ditulis $P(B|A) = P(B)$. Karena $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, dengan $P(B) = P(B|A)$, diperoleh rumus

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) \text{ atau } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Secara umum, dapat dikatakan sebagai berikut.

Peluang kejadian B dengan syarat kejadian A telah terjadi, dirumuskan dengan

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Dengan kata lain, peluang kejadian A diikuti kejadian B pada pengambilan berikutnya adalah $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$.

Contoh:

Dari tugas di atas, tentukan peluang terambil kelereng berturut-turut merah, kemudian biru.

Jawab:

Diketahui banyak kelereng sebelum pengambilan pertama adalah 10, yaitu 7 merah dan 3 biru. Misalkan M adalah kejadian terambil merah, B kejadian terambil biru, dan $B|M$ kejadian terambil biru setelah kejadian pertama terambil merah.

Peluang terambil merah pada pengambilan pertama adalah $P(M) = \frac{7}{10}$.

Banyak kelereng setelah pengambilan pertama adalah 9, yaitu 6 merah dan 3 biru. Jadi, $P(B|M) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P(M \cap B) &= P(M) \times P(B|M) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{30} \end{aligned}$$

Jadi, peluang terambil kelereng merah diikuti kelereng biru berturut-turut adalah $\frac{7}{30}$.

Soal Kompetensi 7

• Kerjakan di buku tugas

1. Sebuah kartu remi (*bridge*) diambil dari 1 set lengkap (52 kartu). Tentukan peluang terambil kartu *As* atau kartu bergambar.
   (Ingat: 1 set kartu terdiri atas 4 *As*, 12 gambar, dan 36 angka).
2. Pada percobaan melempar dua buah dadu, tentukan peluang muncul angka genap pada dadu pertama dan angka ganjil prima pada dadu kedua.
3. Suatu kelas terdiri atas 40 siswa. Dari sejumlah siswa tersebut, 25 siswa gemar Matematika, 21 siswa gemar Ekonomi, dan 9 siswa gemar kedua mata pelajaran tersebut. Tentukan peluang siswa yang gemar Matematika atau Ekonomi.

Tantangan

Berpikir kritis

• Kerjakan di buku tugas

Dalam sebuah lomba balap sepeda motor, ada 8 peserta. Masing-masing motor diberi nomor punggung 1–8. Tentukan peluang motor bernomor 3, 7, dan 1 berturut-turut keluar sebagai juara 1, 2, dan 3.

4. Sebuah dadu dan sebuah koin dilempar satu kali. Tentukan peluang
   a. muncul mata dadu ganjil dan sisi angka pada koin;
   b. muncul mata dadu prima ganjil dan sisi gambar pada koin;
   c. muncul mata dadu 5 dan sisi angka pada koin.
5. Jika A dan B adalah dua buah kejadian, dengan $P(A) = 0,6$ dan $P(B) = 0,5$, tentukan
   a. $P(A \cup B)$;
   b. $P(A \cap B)$;
   c. $P(A^c)$;
   d. $P(B^c)$;
   e. $P(A^c \cap B)$;
   f. $P(A^c \cap B^c)$
6. Dari sebuah kotak yang berisi 10 bola merah yang diberi nomor 1 s.d. 10. Selanjutnya, diambil sebuah bola secara acak. Berapa peluang terambilnya bola dengan nomor genap atau ganjil?
7. Dua buah kotak diisi dengan bola-bola. Kotak pertama berisi 6 bola merah bernomor 1 s.d. 6 dan kotak yang lain berisi 5 bola hijau bernomor 1 s.d. 5. Tentukan berapa peluang terambilnya bola merah dan hijau bernomor kurang dari 4 atau kedua bola bernomor sama apabila dari masing-masing kotak tersebut diambil satu bola secara bersamaan?
8. Sebuah kartu diambil secara acak dari 1 set kartu *bridge*. Hitunglah peluang yang terambil itu adalah
   a. kartu bernomor 9 atau kartu berwarna merah;
   b. kartu bernomor 7 atau berwarna merah;
   c. kartu bergambar hati atau king;
   d. kartu bernomor 8 atau bernomor 9;
   e. kartu bernomor ganjil atau *queen* (Q).
9. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan sebanyak satu kali. Hitunglah peluang kejadian munculnya mata dadu pertama kurang dari 5 atau mata dadu kedua kurang dari 4.
10. Tiga buah dadu dilempar bersama secara bersamaan sebanyak satu kali. Hitunglah peluang kejadian munculnya ketiga mata dadu berjumlah 14 atau berjumlah 16.

Tantangan

Berpikir kritis

• Kerjakan di buku tugas

Sebuah lembaga penelitian sedang melakukan penelitian tentang minat masyarakat terhadap suatu produk peralatan komputer. Berdasarkan hasil survei di suatu daerah diperoleh data bahwa 8% orang tidak menyukai peralatan komputer merek X, 20% orang menyukai merek Y, dan 10% tidak menyukai merek X tapi menyukai merek Y. Berapakah peluang seseorang menyukai merek X tapi tidak menyukai merek Y apabila seseorang tersebut dipilih secara acak di daerah tersebut?

4. Menghitung Peluang dengan Cara Lain

Kalian telah mempelajari konsep permutasi dan kombinasi. Masih ingatkah kalian? Hal yang perlu kalian ingat adalah permutasi memerhatikan urutan, sedangkan kombinasi tidak memerhatikan urutan. Kita akan menggunakan kedua konsep itu untuk menghitung peluang suatu kejadian.

Contoh 1:

Sebanyak 6 pelari (masing-masing pelari memiliki nomor punggung 1–6) ikut serta dalam lomba lari. Tentukan peluang pelari bernomor punggung 3, 2, dan 6 berturut-turut akan keluar sebagai juara I, II, dan III.

Jawab:

Misalkan A = kejadian pelari bernomor punggung 3, 2, dan 6 berturut-turut sebagai juara I, II, dan III.

Banyak cara agar 3 pelari dari 6 pelari memenangkan lomba yang mementingkan urutan pemenang adalah sebagai berikut.

$$P_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120.$$

Hanya ada satu kemungkinan (cara) pelari bernomor 3, 2, dan 6 berturut-turut sebagai juara I, II, dan III. Jadi, peluang yang dimaksud pada soal adalah $P(A) = \frac{1}{120}$.

Contoh 2:

Sebanyak 6 pelari (masing-masing memiliki nomor punggung 1–6) ikut serta dalam lomba lari. Juara hanya diambil 3 kategori, yaitu juara I, II dan III. Tentukan peluang pelari bernomor punggung 3, 2, dan 6 akan menjadi juara.

Jawab:

	Juara		
	I	**II**	**III**
Nomor punggung	3	2	6
	3	6	2
	2	3	6
	2	6	3
	6	2	3
	6	3	2

Misalkan A = kejadian pelari bernomor punggung 3, 2, dan 6 akan menjadi juara (posisi bebas).

Banyak cara 3 orang menempati posisi juara ada 3! = 6. Jadi, $n(A) = 6$.

Banyak cara 3 orang menjadi juara dari 6 orang peserta lomba tanpa memerhatikan urutan adalah C_3^6.

$$C_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3!} = 20 \rightarrow n(S)$$

Jadi, $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{20}$.

Hati-hati, perhatikan kunci perbedaan permasalahan dengan Contoh 1.

Problem Solving

Dalam sebuah kantong terdapat 8 kelereng hijau, 4 kelereng putih, dan 9 kelereng kuning. Akan diambil acak 3 kelereng sekaligus.

Tentukan peluang terambil

a. kelereng kuning semua;

b. 1 kelereng hijau 2 kelereng kuning;

c. ketiga warna kelereng berbeda.

Jawab:

Banyak kelereng 8 + 4 + 9 = 21.

Banyak cara mengambil 3 kelereng dari 21 yang tersedia adalah C_3^{21}.

a. Terpilih 3 kelereng kuning (dari 9 kelereng kuning)

$$P = \frac{C_3^9}{C_3^{21}} = \frac{84}{1.330} = \frac{6}{95}$$

b. Terpilih 1 kelereng hijau (dari 8 kelereng hijau) dan 2 kelereng kuning (dari 9 kelereng kuning)

$$P = \frac{C_1^8 \times C_2^9}{C_3^{21}} = \frac{8 \times 36}{1.330} = \frac{288}{1.330} = \frac{144}{665}$$

c. Terpilih ketiga warna kelereng berbeda (1 hijau, 1 putih, dan 1 kuning)

$$P = \frac{C_1^8 \times C_1^4 \times C_1^9}{C_3^{21}} = \frac{8 \times 4 \times 9}{1.330} = \frac{288}{1.330} = \frac{144}{665}.$$

Soal Kompetensi 8

• Kerjakan di buku tugas

1. Ada 9 pelari masing-masing bernomor 1–9. Mereka mengikuti lomba untuk memperebutkan juara I, II, dan III. Tentukan peluang yang menjadi juara I, II, dan III, berturut-turut adalah pelari bernomor punggung 7, 9, dan 2.
2. Sebuah bola diambil secara random dari sebuah kotak yang berisi 4 bola merah, 6 bola hijau, dan 5 bola putih. Tentukan peluang bahwa yang terambil adalah
   a. bola hijau;
   b. bola bukan merah;
   c. bola putih.
3. Sebuah kantong berisi 8 bola kuning, 3 bola merah, dan 5 bola putih. Jika 3 bola terambil secara acak, tentukan peluang terambil
   a. semuanya bola merah;
   b. semuanya bola kuning;
   c. 2 merah dan 1 putih;
   d. paling sedikit 1 merah.

Tugas: Informasi Lanjut

• Kerjakan di buku tugas

Untuk memperkaya wawasan kalian tentang peluang, carilah informasi tentang peluang (tokoh maupun materi perluasan) di internet, perpustakaan, atau buku-buku referensi.

4. Sebuah kantong berisi 5 kelereng berwarna putih dan 3 kuning. Diambil secara acak 2 bola sekaligus. Tentukan peluang yang terambil 1 bola merah dan 1 bola putih.
5. Sebuah wadah berisi 4 bola putih, 5 bola biru, dan 6 bola merah. Dari dalam wadah itu, diambil secara acak 3 bola sekaligus. Tentukan peluang yang terambil
   a. ketiganya merah;
   b. ketiganya biru;
   c. 1 merah dan 2 putih;
   d. 1 merah, 1 putih, dan 1 biru;
   e. paling sedikit 1 merah.

Rangkuman

1. Jika terdapat n tempat dengan ketentuan banyak cara mengisi tempat pertama C_1, banyak cara mengisi tempat kedua C_2, ..., banyak cara mengisi tempat ke-n C_n maka banyak cara untuk mengisi n buah tempat secara keseluruhan adalah $C_1 \times C_2 \times C_3 \times \ldots \times C_n$.
2. Faktorial dinyatakan dengan $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.
3. Permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia dengan memerhatikan urutan susunannya dapat ditentukan dengan $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$.
4. Permutasi siklis dirumuskan dengan $P_{\text{siklis}} = (n - 1)!$
5. Kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia dirumuskan dengan $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.
6. Peluang dari kejadian A dalam ruang sampel S dirumuskan dengan $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$, untuk $n(A)$ banyak anggota A dan $n(S)$ banyak anggota ruang sampel S.
7. Hubungan peluang kejadian A dan peluang komplemennya dirumuskan dengan $P(A^c) = 1 - P(A)$.
8. Frekuensi harapan dirumuskan dengan $F_h(A) = P(A) \times n$ dengan $P(A)$ peluang kejadian A dan n banyak percobaan.
9. Peluang gabungan kejadian A atau B dirumuskan dengan $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Jika $P(A \cap B) = 0$ maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
10. Aturan perkalian dalam peluang kejadian majemuk adalah $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, syaratnya kejadian A tidak memengaruhi kejadian B.

Refleksi

Seperti yang telah kalian ketahui bahwa ilmu hitung peluang pada mulanya berawal dari suatu permainan judi. Setujukah kalian bahwa mempelajari peluang berarti mendekati permainan judi? Alat-alat yang dipergunakan dalam hitung peluang berhubungan dengan alat-alat yang digunakan dalam permainan judi. Menurutmu, apakah hal ini dapat memengaruhi siswa untuk bermain judi? Kemukakan alasanmu.

Tes Kemampuan Bab II

• Kerjakan di buku tugas

A. Pilihlah jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e.

1. Jika $C_5^{n+2} = 2C_4^{n+1}$ dan $n > 5$ maka nilai $n = ...$
   a. 8
   b. 9
   c. 10
   d. 11
   e. 12
2. Di kelas XI akan diadakan pemilihan pengurus kelas yang terdiri atas ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara kelas. Jika hanya ada 7 siswa yang kompeten, banyak cara pemilihan tersebut adalah ....
   a. 840
   b. 420
   c. 252
   d. 250
   e. 210
3. Disediakan angka-angka 3, 5, 6, 7, dan 9. Dari angka tersebut, akan disusun bilangan ratusan yang berbeda. Bilangan-bilangan yang tersusun, dengan nilai kurang dari 600 sebanyak ....
   a. 8
   b. 10
   c. 12
   d. 18
   e. 24
4. Seorang siswa diminta mengerjakan 5 dari 7 soal ulangan. Akan tetapi, ada ketentuan bahwa soal nomor 1 dan 2 harus dikerjakan. Banyaknya pilihan soal yang dapat diambil siswa tersebut adalah ....
   a. 4
   b. 5
   c. 6
   d. 7
   e. 10
5. Dari sekelompok remaja terdiri atas 10 pria dan 7 wanita, akan dipilih 2 pria dan 3 wanita untuk mewakili perlombaan group vokal. Banyaknya cara pemilihan tersebut adalah .... (UMPTN 2000)
   a. 1.580
   b. 1.575
   c. 1.595
   d. 5.175
   e. 6.188
6. Banyaknya cara penyusunan huruf yang dapat dibentuk dari huruf-huruf penyusun kata "*GOTONGROYONG*" adalah ....
   a. 1.420.300
   b. 1.542.730
   c. 1.524.730
   d. 1.663.200
   e. 1.662.300
7. Pada suatu kompetisi sepak bola diikuti 5 klub (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*), masing-masing klub membawa bendera untuk dikibarkan pada 5 buah tiang berjajar. Banyak cara yang dapat dilakukan untuk menempatkan 5 bendera itu, dengan bendera klub *A* terletak di tengah-tengah adalah ....
   a. 24
   b. 48
   c. 72
   d. 96
   e. 120
8. Suatu pertemuan dihadiri oleh 15 tamu undangan. Apabila semua orang yang hadir tersebut melakukan jabat tangan, banyaknya jabat tangan yang terjadi pada pertemuan itu adalah ....
   a. 15
   b. 30
   c. 105
   d. 157
   e. 210

9. Ali, Bety, Candra, dan Devi akan bekerja secara bergiliran. Banyaknya urutan kerja yang dapat disusun, dengan Ali selalu mendapat giliran ter-akhir adalah ....
   a. 3
   b. 6
   c. 12
   d. 18
   e. 24
10. Suatu stadion mempuyai 5 pintu masuk. Tiga orang hendak memasuki stadion tersebut. Banyak cara mereka dapat memasuki stadion dengan pintu yang berlainan adalah ....
   a. 60
   b. 50
   c. 30
   d. 20
   e. 10
11. Banyak bilangan genap mulai dari 10 sampai dengan 99 yang terdiri atas digit-digit yang berbeda adalah ....
   a. 35
   b. 40
   c. 41
   d. 50
   e. 55
12. Sebuah kotak berisi 10 kelereng, 4 di antaranya berwarna biru dan 6 di antaranya berwarna merah. Dua kelereng diambil dari dalam kotak itu sekaligus. Peluang terambil 1 kalereng biru dan 1 kelereng merah adalah ....
   a. $\frac{1}{24}$
   b. $\frac{2}{9}$
   c. $\frac{8}{15}$
   d. $\frac{5}{12}$
   e. $\frac{6}{15}$
13. Sebuah kartu diambil secara acak dari satu set lengkap kartu *bridge*. Peluang terambil kartu merah atau kartu *As* adalah ....
   a. $\frac{7}{13}$
   b. $\frac{4}{52}$
   c. $\frac{12}{52}$
   d. $\frac{14}{52}$
   e. $\frac{17}{52}$
14. Pada percobaan melemparkan dua buah dadu sebanyak satu kali, peluang muncul jumlah kedua mata dadu 6 atau 9 adalah ....
   a. $\frac{5}{36}$
   b. $\frac{6}{36}$
   c. $\frac{9}{36}$
   d. $\frac{15}{36}$
   e. $\frac{18}{36}$
15. Sebuah kantong plastik berisi 5 kelereng merah dan 3 kelereng biru. Jika dari dalam kantong itu diambil 2 kelereng sekaligus, peluang terambil kelereng merah dan biru adalah ....
   a. $\frac{7}{28}$
   b. $\frac{8}{28}$
   c. $\frac{10}{28}$
   d. $\frac{15}{28}$
   e. $\frac{21}{28}$

16. Terdapat 2 buah kotak *A* dan *B* yang masing-masing berisi 12 buah lampu pijar. Setelah diperiksa, ternyata dalam kotak *A* terdapat 2 lampu rusak dan pada kotak *B* terdapat 1 lampu rusak. Dari masing-masing kotak diambil sebuah lampu secara acak. Peluang terambilnya sebuah lampu pijar rusak adalah ....

    a. $\frac{2}{144}$

    b. $\frac{3}{144}$

    c. $\frac{18}{144}$

    d. $\frac{34}{144}$

    e. $\frac{48}{144}$

17. Sekelompok siswa yang terdiri atas 62 orang menyukai beberapa cabang olahraga.
    32 orang menyukai basket;
    27 orang menyukai renang;
    12 orang menyukai bola voli.

    Jika salah satu siswa dipanggil, kemungkinan yang terambil adalah siswa yang menyukai basket dan renang adalah ....

    a. $\frac{3}{62}$

    b. $\frac{9}{62}$

    c. $\frac{12}{62}$

    d. $\frac{27}{62}$

    e. $\frac{32}{62}$

18. Seorang peneliti melakukan penelitian terhadap populasi belalang di suatu padang rumput. Ia membatasi area padang rumput itu dengan tambang. Daerah itu berukuran 1 m × 1 m. Kemudian, ia mulai menghitung belalang di area yang dibatasi itu. Ia menyimpulkan, untuk memperoleh belalang pada luasan itu 0,4. Jika luas padang rumput itu 100 m^2, banyak belalang yang ada di padang rumput terbanyak ....

    a. 4
    b. 16
    c. 40
    d. 400
    e. 1.600

19. Pakar vulkanologi memperkirakan bahwa besar peluang terjadi letusan gunung berapi dalam 8 tahun mendatang adalah 2×10^{-2} di antara 800 gunung berapi. Banyak gunung berapi yang diperkirakan akan meletus dalam jangka 8 tahun tersebut adalah ....

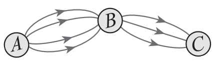
    a. 2 buah
    b. 8 buah
    c. 16 buah
    d. 32 buah
    e. 80 buah

20. Hasil suatu penelitian menyimpulkan bahwa peluang terdapat lampu yang rusak (cacat) dari 100 lampu adalah 0,12. Jika peneliti mengambil 1.000 sampel lampu, harapan lampu dalam kondisi baik ada ....

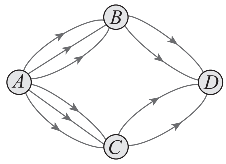
    a. 12
    b. 88
    c. 120
    d. 708
    e. 880

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Perhatikan gambar jalur perjalanan dari suatu kota ke kota lain berikut.



(a)



(b)

   a. Tentukan banyak cara untuk menempuh Kota *C* dari *A* melalui *B* pada gambar (a).
   b. Tentukan banyak cara untuk menempuh Kota *D* dari Kota *A* melalui *B* atau *C* pada gambar (b).
2. Disediakan angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan 8. Tentukan banyak cara menyusun bilangan ribuan jika:
   a. angka-angka penyusunnya boleh berulang;
   b. angka-angka penyusunnya tidak boleh berulang;
   c. angka-angka penyusunnya tidak boleh berulang dan ganjil.
3. Terdapat 6 putra dan 2 putri yang akan menempati 8 kursi berjajar. Tentukan banyak cara duduk dengan urutan berbeda jika
   a. mereka dapat duduk di sembarang tempat;
   b. putri harus duduk di ujung;
   c. kursi yang paling ujung (kanan dan kiri) tidak boleh ditempati putri.
4. Konsep kombinasi dapat digunakan dalam teorema binomial untuk menentukan koefisien dari perpang-katan. Teorema tersebut adalah sebagai berikut.

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^{n-k} y^k ,$$

   dengan n adalah bilangan asli.
   Dengan menggunakan konsep kombinasi, tentukan
   a. koefisien x^3y^2 dari penjabaran perpangkatan $(x + y)^5$;
   b. koefisien x^2y^5 dari penjabaran perpangkatan $(x + 2y)^7$;
   c. koefisien x^6y^4 dari penjabaran perpangkatan $(x - y)^{10}$;
5. Tiga bola diambil secara acak dari sebuah kotak yang berisi 6 bola berwarna merah, 8 bola berwarna hitam, dan 4 bola berwarna putih. Tentukan peluang bahwa yang terambil adalah
   a. ketiga-tiganya berwarna merah;
   b. dua bola berwarna putih dan sebuah bola berwarna putih;
   c. ketiga-tiganya mempunyai warna yang berbeda.

Kata Bijak

Lakukanlah sesuatu sesuai kemampuan Anda, jangan menunda karena ada kemungkinan Anda tidak akan memperoleh apa-apa.

Latihan Ulangan Umum Semester 1

• Kerjakan di buku tugas

A. Pilihlah jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e.

1. Diketahui sebuah data:
   $a, b, 7, 3, 4, 4, 5, 5, 4, 5, 5, 5, 7, c, 6, 6$
   Jika a, b, dan c ketiganya memiliki nilai tidak kurang dari 7, median data tersebut adalah ....
   a. 6,5
   b. 6,0
   c. 5,5
   d. 5,0
   e. 4,5
2. Mean ulangan Matematika dari 30 siswa adalah 7,7. Jika nilai ulangan Matematika dari 5 orang siswa lainnya digabungkan, mean ulangan Matematika dari sekelompok siswa itu menjadi 8,0. Nilai mean ulangan Matematika dari 5 siswa yang digabungkan itu adalah ....
   a. 9,8
   b. 9,5
   c. 8,5
   d. 8,3
   e. 8,05
3. Sebuah data yang terdiri atas n datum memiliki mean a. Jika setiap datum dari data itu ditambah dengan $2n + 1$, nilai mean data yang baru adalah ....
   a. $a + 2n + 1$
   b. $an + 2$
   c. $(a + 2)n + 1$
   d. $(a + 1)n + 1$
   e. $(a + 1)n + 2$
4. Diketahui 3 buah data pengamatan. Rata-rata ketiga data tersebut adalah 15, median 15, dan jangkauannya 10. Data pengamatan terbesar dari ketiga data tersebut adalah ....
   a. 18
   b. 19
   c. 20
   d. 21
   e. 22
5. Diketahui data yang terdiri atas 2, 8, 4, 6, a, 2, 5, 8, 3, 7. Jika median dari data-data tersebut adalah 5,5 maka berikut ini yang bukan merupa-kan kemungkinan-kemungkinan nilai a adalah ....
   a. 6
   b. 7
   c. 8
   d. 9
   e. 10
6. Dari 4 buah bilangan diketahui bahwa bilangan terkecil adalah 24 dan terbesar adalah 36. Rata-rata keempat bilangan tersebut tidak mungkin sama dengan ....
   a. 26
   b. 27
   c. 28
   d. 29
   e. 30
7. Nilai rata-rata ujian dari 39 orang siswa adalah 45. Jika nilai seorang siswa lain digabungkan ke kelompok tersebut, rata-rata nilai ujian 40 orang siswa menjadi 46. Berarti, nilai ujian anak itu adalah ....
   a. 47
   b. 51
   c. 85
   d. 90
   e. 92
8. Jika r adalah rata-rata nilai dari data x_1, $x_2, x_3, ..., x_{10}$ maka rata-rata nilai dari data $x_1 + 10, x_2 + 9, x_3 + 8, ..., x_{10} + 1$ adalah ....
   a. $r + 2$
   b. $r + 10$
   c. $r + 1$
   d. $r + 5$
   e. $r + 5,5$

9. Suatu ujian Matematika diikuti oleh 40 siswa. Rata-rata nilai dari semua siswa adalah 32 dengan standar deviasi 25. Karena nilainya terlalu rendah, selanjutnya nilai setiap siswa dikalikan 2 lalu dikurangi 10. Pernyataan di bawah ini yang benar adalah ....
   a. nilai rata-rata menjadi 54
   b. nilai rata-rata menjadi $63\frac{3}{4}$
   c. deviasi standar 25
   d. deviasi standar 40
   e. deviasi standar 50

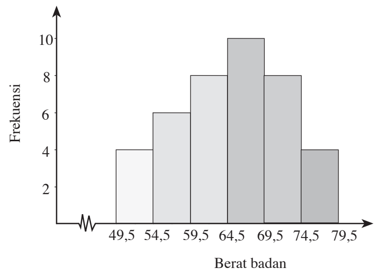
10. Ada lima orang dalam ruangan yang belum saling mengenal. Apabila mereka ingin saling berkenalan dengan berjabat tangan sekali kepada setiap orang maka jabat tangan yang terjadi sebanyak ....
   a. 5 kali
   b. 10 kali
   c. 15 kali
   d. 20 kali
   e. 24 kali

11. Perhatikan tabel berikut:

Berat (kg)	Frekuensi
31–36	4
37–42	6
43–48	9
49–54	14
55–60	10
61–66	5
67–72	2

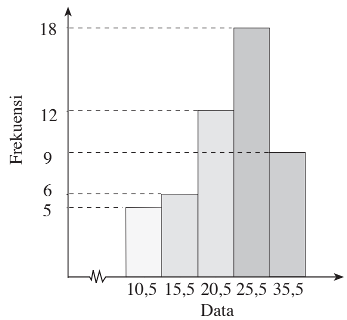
   Modus pada tabel tersebut adalah ... kg. (UN 2007)
   a. 49,06
   b. 50,20
   c. 50,70
   d. 51,33
   e. 51,83

12. Perhatikan gambar berikut.



   Berat badan siswa pada suatu kelas disajikan dengan histogram seperti pada gambar. Rataan berat badan tersebut adalah ... kg. (UN 2006)
   a. 64,5
   b. 65
   c. 65,5
   d. 66
   e. 66,5

13. Nilai rataan dari data pada diagram adalah .... (UN 2004)



   a. 23
   b. 25
   c. 26
   d. 28
   e. 30

14. Rataan skor dari data pada tabel adalah .... (UN 2005)

Skor	Frekuensi
0–4	4
5–9	6
10–14	9
15–19	14
20–24	10
25–29	5
30–34	2

   a. 15,5
   b. 15,8
   c. 16,3
   d. 16,5
   e. 16,8

15. Median dari data umur pada tabel di bawah adalah .... (UN 2004)

Skor	Frekuensi
4 – 7	6
8 – 11	10
12 – 15	18
16 – 19	40
20 – 23	16
24 – 27	10

a. 16,5
b. 17,1
c. 17,3
d. 17,5
e. 18,3

16. 10 orang finalis suatu lomba kecantikan akan dipilih secara acak 3 yang terbaik. Banyak cara pemilihan tersebut ada ... cara. (UN 2005)
a. 70
b. 80
c. 120
d. 360
e. 720

17. Rataan hitung upah 10 orang pekerja adalah Rp7.000,00 tiap hari, sedangkan rata-rata upah pekerja termasuk ketua kelompoknya adalah Rp7.100,00 tiap hari. Upah ketua kelompok tiap hari adalah ....
a. Rp7.900,00 d. Rp8.100,00
b. Rp8.000,00 e. Rp8.300,00
c. Rp8.050,00

18. Kursi-kursi di dalam suatu gedung pertunjukan opera diberi nomor dengan format huruf dan angka seperti $A10$, $B29$, $B32$, demikian sete-rusnya. Angka yang digunakan dalam penomor-an tersebut merupakan bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 60. Jumlah maksimum kursi yang dapat dinomori adalah ....
a. 1.500 d. 1.600
b. 1.550 e. 1.650
c. 1.560

19. Banyaknya cara penyusunan menu nasi goreng tiga kali dalam satu minggu untuk sarapan pagi adalah ....
a. 35 d. 125
b. 40 e. 250
c. 45

20. Banyak cara membagikan 8 buah buku yang berbeda kepada tiga orang siswa apabila siswa pertama mendapat 4 buku; siswa kedua dan ketiga masing-masing mendapat 2 buku adalah ....
a. 240 d. 630
b. 360 e. 480
c. 420

21. Jika $C_4^n = n^2 - 2n$ maka $C_{n+3}^{2n} = ...$
a. 101 d. 1.011
b. 1.001 e. 1.100
c. 1.010

22. Dari 4 pasangan suami istri akan dipilih 2 orang pria dan 2 orang wanita untuk menjadi pengurus kampung. Banyaknya cara pemilihan pengurus tersebut dengan syarat tidak boleh ada pengurus yang merupakan pasangan suami istri adalah ....
a. 4 d. 36
b. 6 e. 40
c. 12

23. Banyaknya bilangan genap yang dapat dibentuk antara 400 s.d. 900 dari angka-angka 3, 4, 5, dan 6 adalah ....
a. 8 d. 24
b. 12 e. 48
c. 16

24. Dua dadu dilempar dua kali. Peluang munculnya 2 mata dadu yang berjumlah 3 atau 10 adalah ....
a. $\frac{1}{36}$ d. $\frac{5}{36}$
b. $\frac{2}{36}$ e. $\frac{6}{36}$
c. $\frac{3}{36}$

25. Banyaknya bilangan antara 2.000 dan 6.000 yang dapat disusun dari angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, dan tidak ada angka yang sama adalah .... (UAN 2002)
    a. 1.680
    b. 1.470
    c. 1.260
    d. 1.050
    e. 840

26. Dari kota *A* ke kota *B* dilayani oleh 4 bus dan dari *B* ke *C* oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota *A* ke kota *C* melalui *B*, kemudian kembali lagi ke *A* juga melalui *B*. Jika saat kembali dari *C* ke *A*, ia tidak mau menggunakan bus yang sama maka banyak cara perjalanan orang ter-sebut adalah .... (UAN 2002)
    a. 12
    b. 36
    c. 72
    d. 96
    e. 144

27. Di antara 99 bilangan asli pertama, peluang untuk memilih secara acak sebuah bilangan yang habis dibagi 2 atau 5 adalah ....
    a. $\frac{69}{99}$
    b. $\frac{60}{99}$
    c. $\frac{70}{99}$
    d. $\frac{79}{99}$
    e. $\frac{59}{99}$

28. Dari 6 orang pria dan 4 wanita, dipilih 3 orang dari 2 orang pria dan 1 orang wanita. Peluang pemilihan tersebut adalah ....
    a. $\frac{70}{120}$
    b. $\frac{60}{120}$
    c. $\frac{36}{120}$
    d. $\frac{19}{120}$
    e. $\frac{10}{120}$

29. Banyak garis yang dapat dibuat dari 8 titik yang tersedia, dengan tidak ada 3 titik yang segaris adalah .... (UAN 2000)
    a. 336
    b. 168
    c. 56
    d. 28
    e. 16

30. Dalam kantong I terdapat 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih, dalam kantong II terdapat 4 kelereng merah dan 6 kelereng hitam. Dari setiap kantong diambil satu kelereng secara acak. Peluang terambilnya kelereng putih dari kantong I dan kelereng hitam dari kantong II adalah .... (UN 2007)
    a. $\frac{39}{40}$
    b. $\frac{9}{13}$
    c. $\frac{1}{2}$
    d. $\frac{9}{20}$
    e. $\frac{9}{40}$

31. *A*, *B*, *C*, dan *D* akan berfoto secara berdam-pingan. Peluang *A* dan *B* selalu berdampingan adalah .... (UN 2006)
    a. $\frac{1}{2}$
    b. $\frac{1}{6}$
    c. $\frac{1}{3}$
    d. $\frac{1}{2}$
    e. $\frac{2}{3}$

32. Sebuah kotak berisi 5 bola merah, 4 bola biru, dan 3 bola kuning. Dari dalam kotak diambil 3 bola sekaligus secara acak, peluang terambil 2 bola merah dan 1 bola biru adalah .... (UAN 2004)
    a. $\frac{1}{10}$
    b. $\frac{5}{36}$
    c. $\frac{1}{6}$
    d. $\frac{2}{11}$
    e. $\frac{4}{11}$

33. Dalam suatu populasi keluarga dengan tiga orang anak, peluang keluarga tersebut mem-punyai paling sedikit dua anak laki-laki adalah .... (UAN 2004)

a. $\frac{1}{8}$
d. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{1}{3}$
e. $\frac{3}{4}$
c. $\frac{3}{8}$

34. Dua buah dadu dilempar bersama-sama. Peluang munculnya jumlah mata dadu 9 atau 10 adalah .... (UAN 2003)

a. $\frac{5}{36}$
d. $\frac{9}{36}$
b. $\frac{7}{36}$
e. $\frac{11}{36}$
c. $\frac{8}{36}$

35. Sebuah dompet berisi uang logam, 5 keping lima ratusan dan 2 keping ratusan rupiah. Dompet yang lain berisi uang logam 1 keping lima ratusan dan 3 keping ratusan rupiah. Jika sebuah uang logam diambil secara acak dari salah satu dompet, peluang untuk mendapatkan uang logam ratusan rupiah adalah .... (UAN 2003)

a. $\frac{3}{56}$
d. $\frac{29}{56}$
b. $\frac{6}{28}$
e. $\frac{30}{56}$
c. $\frac{8}{28}$

36. Peluang Desi tidak lulus Ujian Akhir Nasional (UAN) adalah 0,05 dan peluang Heni tidak lulus UAN adalah 0,08. Peluang Desi lulus UAN, tetapi Heni tidak lulus UAN adalah ....

a. 0,043
d. 0,928
b. 0,046
e. 0,958
c. 0,076

37. Misalkan A dan B adalah suatu kejadian. Jika $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, $P(A^c) = \frac{2}{3}$, dan $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ maka $P(B)$ = ...

a. $\frac{1}{5}$
b. $\frac{1}{3}$
c $\frac{1}{2}$
e. $\frac{4}{5}$
d. $\frac{2}{3}$

38. Seorang penembak mempunyai akurasi menembak dengan tepat sebesar 90%. Jika hasil bidikan yang diulang bebas dan kemampuan penembak itu tetap, peluang menembak 3 kali dengan hasil untuk pertama kali meleset dan dua kali berikutnya tepat adalah ....

a. 0,81
d. 0,081
b. 0,18
e. 0,027
c. 0,09

39. Indah dan Ferdi mengikuti suatu ujian. Peluang Indah dan Ferdi untuk lulus dalam tes itu berturut-turut adalah 0,85 dan 0,6. Peluang Indah lulus, tetapi Ferdi gagal adalah ....

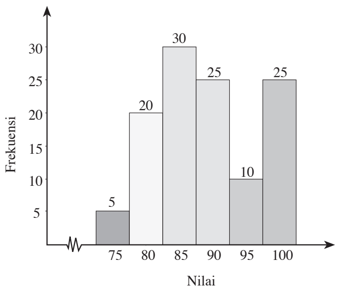
a. 0,09
d. 0,34
b. 0,24
e. 0,51
c. 0,25

40. Sekelompok remaja terdiri atas 10 pria dan 20 wanita. Setengah dari pria dan setengah dari wanita berasal dari kota Nusa. Peluang seorang yang dipilih dari kelompok itu berasal dari kota Nusa atau seorang pria adalah .... (Ebtanas 1993)

a. $\frac{16}{20}$
d. $\frac{18}{20}$
b. $\frac{14}{20}$
e. $\frac{7}{20}$
c. $\frac{12}{20}$

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Diadakan test IQ (*Intelligence Quotient*) pada 3 buah kelas dalam suatu sekolah. Jumlah siswa kelas A terdiri atas 40 siswa, kelas B 30 siswa, dan kelas C 40 siswa. Apabila rata-rata IQ semua siswa ketiga kelas tersebut adalah 120,5 dan rata-rata IQ siswa kelas B dan C adalah 125,8, tentukan rata-rata IQ siswa kelas A.

2. 

   Perhatikan histogram berikut ini. Tentukan ra-taan hitung (mean), median, dan modusnya.

3. Diberikan data nilai ujian Matematika di suatu kelas sebagai berikut.

Nilai	Frekuensi
20–34	4
35–49	6
50–64	15
65–79	7
80–94	3

   Tentukan
   a. modus;
   b. median;
   c. rata-rata nilai;
   d. Q_1, Q_2, Q_3;
   e. varians;
   f. grafik ogif.

4. Sebuah pesan yang berupa sandi morse dapat dibentuk dari rangkaian 5 buah garis putus-putus dan 3 buah titik. Berapa banyak pesan yang dapat dibentuk?

–	–	•	•	–	–	–	•

Contoh pesan sandi morse

5. Terdapat 6 pasang sepatu di dalam lemari. Jika 4 buah sepatu diambil secara acak dari lemari tersebut, berapa peluang terambilnya 2 buah sepatu sebelah kanan dan 2 buah sepatu sebelah kiri, tetapi tidak ada yang merupakan pasangan kanan dan kiri?

6. Dua buah dadu (dadu I dan dadu II) dilempar secara bersamaan sebanyak satu kali. Diketahui bahwa
   A adalah kejadian muncul jumlah kedua mata dadu 6;
   B adalah kejadian muncul mata dadu 1 atau 2 dari dadu I;
   C adalah kejadian muncul salah satu mata dadu 2.
   Tentukan peluang dari kejadian-kejadian ber-syarat berikut.
   a. $P(A|B)$
   b. $P(B|C)$
   c. $P(A|C)$
   d. $P(C|A)$
   e. $P(B|A)$
   f. $P(C|B)$

Bab III

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat
1. menentukan aturan fungsi dari komposisi beberapa fungsi;
2. menjelaskan nilai fungsi komposisi terhadap komponen pembentuknya;
3. menyebutkan komponen fungsi komposisi jika aturan komposisinya diketahui;
4. menjelaskan kondisi agar suatu fungsi mempunyai invers;
5. menentukan aturan fungsi invers dari suatu fungsi;
6. menggambarkan grafik fungsi invers dari grafik fungsi asalnya.

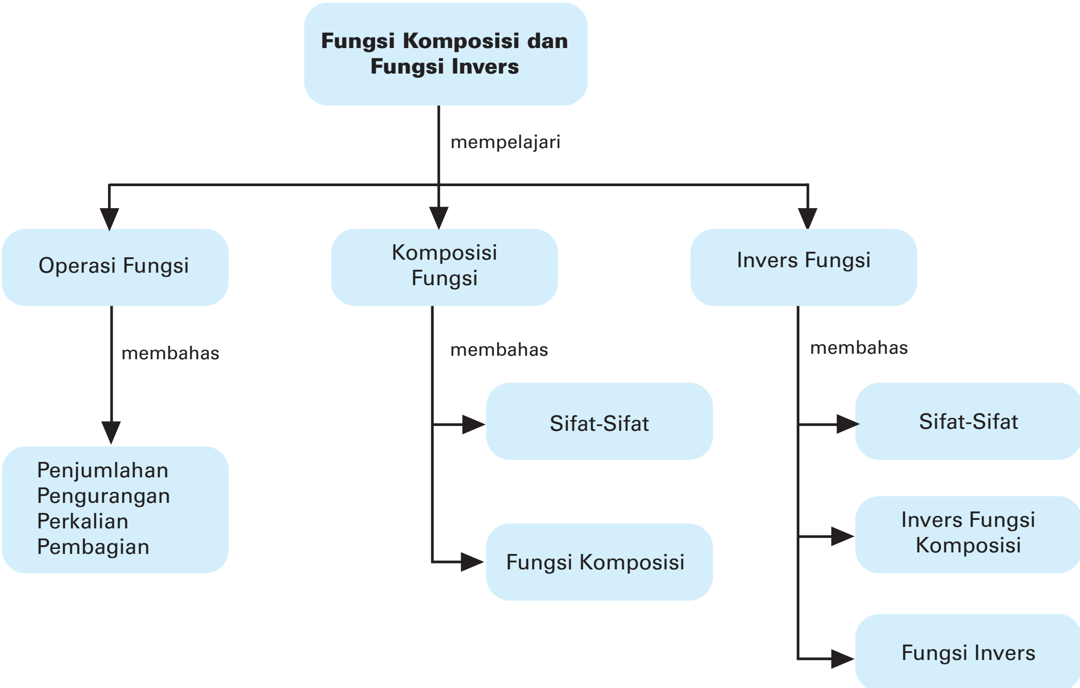
Sumber: *cd corel architectur4*

Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Motivasi

Fungsi merupakan suatu relasi khusus yang memiliki suatu aturan tertentu. Dalam kehidupan sehari-hari, banyak masalah yang dapat diselesaikan dengan fungsi. Misalnya, fungsi dari pencampuran bahan-bahan untuk membangun gedung, jembatan, jalan, fungsi penawaran, fungsi permintaan, fungsi pemecah kode rahasia, dan masih banyak lagi.

Peta Konsep



Kata Kunci

- domain
- fungsi
- fungsi bijektif
- fungsi identitas
- fungsi injektif
- fungsi invers
- fungsi komposisi
- fungsi surjektif
- invers fungsi
- kodomain
- komposisi fungsi
- korespondensi
- peta
- prapeta
- range

Tentu kalian telah mengenal fungsi, bukan? Bayangkan ketika kalianmembeli bensin di pompa bensin. Misalkan setiap satu liter bensin berharga Rp4.500,00. Kita dapat menaksirkan kira-kira berapa rupiah yang harus kalian bayar apabila kalian membeli bensin sebanyak 5,9 liter. Sebaliknya, apabila kalian membeli bensin seharga Rp155.000,00, berapa liter bensin yang kalian dapatkan? Itu merupakan salah satu masalah sederhana dalam kehidupan sehari-hari yang terkait dengan fungsi.

Pengertian fungsi, domain, kodomain, dan range telah kalian pelajari di SMP. Pada pembahasan kali ini, akan dipelajari lebih lanjut tentang fungsi, yaitu fungsi komposisi dan fungsi invers.

Sebelum kalian mempelajari lebih lanjut materi ini, coba jawab pertanyaan-pertanyaan berikut.

Prasyarat

Kerjakan di buku tugas

1. Apa yang dimaksud dengan fungsi? Berikan contohnya.
2. Apa yang dimaksud dengan domain, kodomain, dan range?
3. Misalkan diberikan fungsi $f(x) = 2 + 3x$. Tentukan
   a. domain dan range fungsi itu;
   b. $f(0)$, $f(-3)$, $f(t)$, dan $f(1 - t^2)$.
4. Suatu fungsi linear bernilai 9 ketika $x = 2$ dan bernilai 1 ketika $x = 0$. Bagaimana rumus fungsi itu?

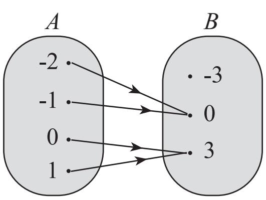
Setelah menjawab dengan benar soal-soal di atas, mari kita pelajari selengkapnya materi ini.

A. Fungsi dan Sifat-Sifatnya

Di kelas X, kalian telah mempelajari tentang fungsi secara detail. Coba kalian ingat kembali. Kalian tentu juga masih ingat dengan domain, kodomain, dan range suatu fungsi.

1. Definisi Fungsi

Misalkan himpunan $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ dan $B = \{-3, 0, 3\}$. f menyatakan fungsi dari A ke B dengan aturan seperti diagram panah di samping.



Gambar 3.1

Daerah asal atau domain dari f adalah $A = \{-2, -1, 0, 1\}$.
Daerah kawan atau kodomain dari f adalah $B = \{-3, 0, 3\}$.
Daerah hasil atau range dari f adalah $\{0, 3\}$.

Fungsi atau pemetaan merupakan relasi khusus. Tidak semua relasi merupakan fungsi. Definisi fungsi atau pemetaan diberikan sebagai berikut.

Fungsi atau pemetaan dari A ke B adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B dalam hal ini setiap $x \in A$ dipasangan dengan tepat satu $y \in B$.

Suatu fungsi biasanya dinyatakan dengan huruf kecil, seperti f, g, dan h. Suatu fungsi f dari A ke B ditulis dengan $f : A \to B$.

Contoh:

Tentukan domain (daerah asal) fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = x + 1$

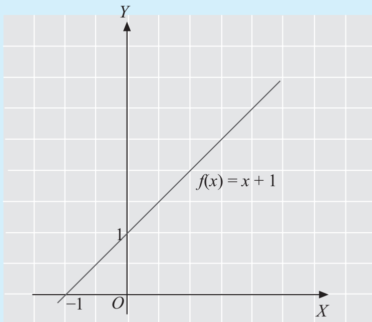
b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$

c. $f(x) = \dfrac{5}{x^2 - 5x + 4}$

d. $f(x) = |x - 3|$

Jawab:

a. Untuk sembarang x bilangan real, $f(x) = x + 1$ akan bernilai real atau terdefinisi. Jadi, domainnya adalah $x \in R$ atau $D_f = \{ x \mid x \in R\}$. Hal ini akan lebih jelas jika divisualisasikan dalam grafik. Dari grafik di atas, tampak bahwa range-nya juga semua x anggota himpunan bilangan real R.



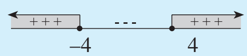
Gambar 3.2

b. Fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ akan terdefinisi jika bilangan di dalam tanda akar tidak bernilai negatif.

$$x^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4$$

Dalam garis bilangan tampak seperti **Gambar 3.3**.

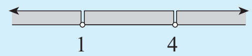
Dengan demikian, domain dari f adalah $D_f = \{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4\}$.



Gambar 3.3

c. Fungsi pecahan akan terdefinisi jika penyebutnya tidak sama dengan nol. Oleh karena itu, $x^2 - 5x + 4 \neq 0$ atau $(x - 1)(x - 4) \neq 0$

Penyebab penyebut nol adalah $x = 1$ atau $x = 4$.



Gambar 3.4

Jadi, domainnya adalah

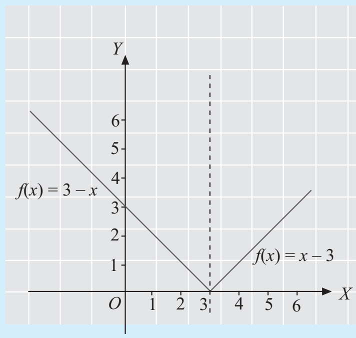
$D_f = \{x \mid x \in R,\ x \neq 1 \text{ atau } x \neq 4\}$.

Dapat juga ditulis $\{x \mid x < 1 \text{ atau } 1 < x < 4 \text{ atau } x > 4\}$.

d. Fungsi $f(x) = \mid x - 3 \mid$ sama artinya dengan

$$f(x) = \begin{cases} x - 3; x \geq 3 \\ 3 - x; x < 3 \end{cases}$$

(Coba diingat lagi tentang harga mutlak yang sudah kalian pelajari di kelas X). Jika divisualisasikan dalam grafik, tampak seperti gambar di samping. Dari grafik di samping tampak bahwa domain f adalah semua $x \in R$. Namun, rangenya hanya y anggota himpunan bilangan real positif.



Gambar 3.5

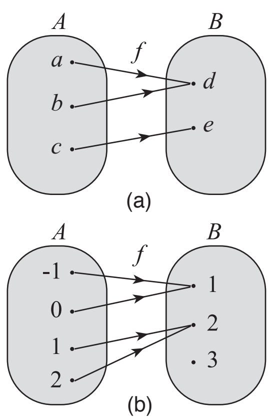
2. Jenis-Jenis Fungsi

Berikut ini adalah beberapa jenis fungsi yang berhubungan dengan anggota-anggota domain dan anggota-anggota kodomain.

a. Fungsi Surjektif

Suatu fungsi dengan daerah hasil sama kodomainnya disebut dengan *fungsi surjektif* atau *fungsi onto*. Dengan kata lain, fungsi surjektif dapat didefinisikan sebagai berikut.

Fungsi $f : A \rightarrow B$ disebut fungsi surjektif jika dan hanya jika daerah hasil fungsi f sama dengan himpunan B atau $R_f = B$.

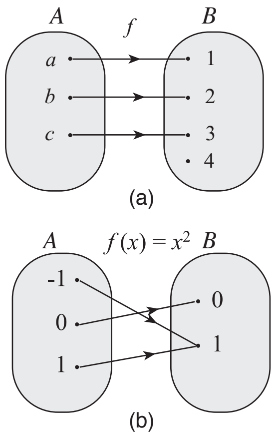


Gambar 3.6

Sebagai contoh, perhatikan gambar di samping.

1) **Gambar 3.6** (a) merupakan fungsi surjektif karena setiap kodomain mempunyai pasangan atau $R_f = B$.
2) **Gambar 3.6** (b) bukan fungsi surjektif karena ada anggota kodomain, yaitu 3 yang tidak mempunyai pasangan.

b. Fungsi Injektif



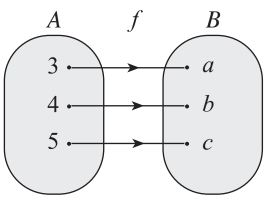
Gambar 3.7

Sebuah fungsi dengan setiap anggota domain yang berbeda mempunyai peta yang berbeda disebut dengan *fungsi injektif*. Fungsi injektif disebut juga dengan *fungsi satu satu*. Secara matematis, fungsi injektif dapat didefinisikan sebagai berikut.

> Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi injektif jika dan hanya jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ maka berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$.

Perhatikan **Gambar 3.7** (a). Gambar tersebut menunjukkan fungsi injektif karena setiap anggota domain fungsi berbeda mempunyai peta yang berbeda pula. Namun, **Gambar 3.7** (b) bukan merupakan fungsi injektif karena ada dua anggota domain fungsi f, yaitu –1 dan 1 yang mempunyai peta yang sama, yaitu 1.

c. Fungsi Bijektif



Gambar 3.8

Misalkan fungsi $y = f(x)$, dengan $A = \{3, 4, 5\}$ dan $B = \{a, b, c\}$ dinyatakan dengan pasangan berurutan $f = \{(3, a), (4, b), (5, c)\}$. Fungsi f dapat ditunjukkan sebagai diagram panah seperti pada gambar di samping. Pada gambar tersebut tampak bahwa fungsi f adalah fungsi surjektif karena range fungsi f sama dengan kodomain fungsi f atau $R_f = B$. Di samping itu, fungsi f juga fungsi injektif, karena untuk setiap anggota domain yang berbeda mempunyai peta yang berbeda. Fungsi yang surjektif sekaligus injektif seperti ini disebut *fungsi bijektif*. Secara matematis, hal ini dapat dituliskan dalam definisi berikut.

> Fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi bijektif jika dan hanya jika fungsi f sekaligus merupakan fungsi surjektif dan injektif.

Jika kita perhatikan kembali contoh di atas, setiap anggota domain dari fungsi f dipasangkan dengan tepat satu anggota himpunan kodomain, dan sebaliknya. Oleh karena itu, fungsi bijektif disebut juga dengan *korespondensi satu-satu*.

Contoh:

Tentukan jenis fungsi berikut ini.

a. Fungsi $f: R \to R$ (R adalah himpunan bilangan real) yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x$.

b. Fungsi $f: N \to R$ (N adalah himpunan bilangan asli) yang didefinisikan dengan $g(x) = x^2$.

c. Fungsi $f: Z \to N$ (Z adalah himpunan bilangan bulat) yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$.

Jawab:

a. Untuk setiap bilangan real a, maka pasti akan mendapat satu pasangan bilangan real, yaitu $2a$.
Demikian pula untuk setiap anggota kodomain mendapat pasangan bilangan real dari domain. Artinya, setiap bilangan real $2a$ (dalam kodomain), pasti akan ditemukan bilangan real a (dalam domain). Oleh karena itu, fungsi tersebut sekaligus injektif dan surjektif sehingga bisa disebut fungsi bijektif.

b. Setiap bilangan asli b anggota domain mempunyai peta yang berbeda, yaitu bilangan real b^2 sehingga fungsi f merupakan fungsi injektif. Kemudian, kita dapat melihat bahwa kodomain fungsi f tidak sama dengan range fungsi f. Misalnya, bilangan real 3 (anggota kodomain f karena $\sqrt{3}$ bukan bilangan asli. Oleh karena itu, fungsi f tidak surjektif.

c. Untuk setiap bilangan bulat c, pasti mendapat pasangan dalam kodomainnya, yaitu bilangan asli c^2. Akan tetapi, bilangan bulat yang berbeda, yaitu c dan $-c$ mendapat pasangan yang sama, yaitu c^2 (tidak injektif). Selain itu, terdapat pula anggota kodomain yang tidak mendapat pasangan dari domain, misalnya bilangan 5 karena $\sqrt{5}$ bukan bilangan bulat (tidak surjektif). Berarti fungsi f tersebut tidak injektif sekaligus tidak surjektif.

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Carilah contoh fungsi injektif, surjektif, bijektif, dan tidak injektif maupun surjektif masing-masing 2 fungsi. Diskusikan hasil yang kamu peroleh dengan teman-temanmu.

Soal Kompetensi 1

• Kerjakan di buku tugas

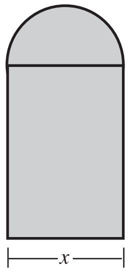
1. Misalkan diketahui $P = \{-2, -1, 0, 1, 2,\}$ dan $Q = \{0, 1, 2, 5, 7\}$.
   Di antara relasi-relasi dari P ke Q berikut, manakah yang merupakan fungsi?
   a. $A = \{(-2, 0), (-1, 0), (0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$
   b. $B = \{(-2, 1), (-1, 2), (0, 5), (1, 7), (-2, 2)\}$
   c. $C = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 5), (2, 7)\}$
2. Tentukan domain dan range fungsi-fungsi berikut agar terdefinisi pada himpunan bilangan real.
   a. $f(x) = 3x - 7$
   b. $f(x) = \sqrt{x}$
   c. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
   d. $f(x) = |x - 1|$
   e. $f(x) = 1 - |x - 1|$

3. Misalkan diberikan fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
   b. $f(x) = x - |x|$
   c. $f(x) = \sqrt{1 - |x|}$

   Tentukan domain ketiga fungsi di atas agar terdefinisi pada himpunan bilangan real.
4. Di antara fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi injektif?
   a. $f(x) = 10$
   b. $f(x) = x$
   c. $f(x) = x^2$
   d. $f(x) = x^{-1}$
   e. $f(x) = \sqrt{x}$
   f. $f(x) = |x|$
5. Tentukan sifat fungsi-fungsi berikut ini.
   a. Fungsi $f : R \to R$, didefinisikan dengan $f(x) = 2x - 1$.
   b. Fungsi $g : R \to R$, didefinisikan dengan $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$.
   c. Fungsi $h : Z \to Z$, didefinisikan dengan $h(x) = |x|$.
   d. Fungsi $f : R \to R$, didefinisikan dengan $f(x) = 0$.
6. Anita membeli kain di sebuah toko untuk dijual kembali dengan mengecer. Kain yang dibeli Anita adalah sebagai berikut.
   a. 100 meter kain I dengan harga per meternya 5.000 rupiah.
   b. 100 meter kain II dengan harga per meternya 15.000 rupiah.
   c. 100 meter kain III dengan harga per meternya 17.500 rupiah.
   d. 100 meter kain IV dengan harga per meternya 20.000 rupiah.

   Setiap pembelian kain terkena pajak PPh sebesar 10%.
   a. Tentukan harga masing-masing kain tersebut setelah ditambah dengan PPh 10%. Berapa harga kain yang harus dibayar seluruhnya?
   b. Buatlah diagram panah yang menunjukkan fungsi:
      - Jenis kain → harga kain
      - Jenis kain → harga yang harus dibayar Anita
   c. Bersifat apakah fungsi yang diperoleh?
      Injektif, surjektif, atau bijektif? Selidikilah.
7. Persegi panjang mempunyai keliling 20 m. Nyatakan luas persegi panjang tersebut sebagai fungsi panjang salah satu sisinya.

8. Persegi panjang mempunyai luas 16 m^2. Nyatakan keliling persegi panjang tersebut sebagai fungsi panjang salah satu sisinya.

9. 

Sebuah jendela berbentuk persegi panjang yang di atasnya berupa setengah lingkaran. Perhatikan gambar di samping.
Jika keliling jendela tersebut adalah 30 kaki, nyatakan luas jendela A sebagai fungsi lebar jendela x (dalam kaki).

10. Di negara tertentu, pajak penghasilan dipungut sebagai berikut. Apabila penghasilan seseorang tidak melebihi \$10.000 maka bebas pajak. Apabila penghasilan berkisar \$10.000 sampai dengan \$20.000, dikenai pajak 10%, sedangkan pajak sebesar 15% dikenakan kepada yang berpenghasilan melebihi \$20.000. Berapa besar pajak yang dipungut kepada seorang yang berpenghasilan \$14.000? Berapa besar pajak bagi orang yang berpenghasilan \$26.000?

B. Operasi Aljabar pada Fungsi

Operasi aljabar yang sudah kita kenal dalam operasi bilangan real adalah penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Operasi aljabar tersebut dapat diterapkan dalam fungsi.

Misalkan diberikan suatu fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Jika D_f domain fungsi f dan D_g domain fungsi g, sedangkan $D_f \cap D_g \neq \phi$ maka dapat dituliskan operasi aljabar untuk fungsi-fungsi tersebut sebagai berikut.

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \; g(x) \neq 0$

Contoh 1:

Diketahui $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = 2(x - 1)$. Tentukan

a. $(f + g)(x)$;

b. $(f - g)(x)$;

c. $(f \times g)(x)$;

d. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$.

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Misalkan N adalah himpunan semua bilangan bulat positif. $f : N \to N$ adalah suatu fungsi sehingga $f(x + 1) = f(x) + x$, untuk $x \in N$ dan $f(1) = 5$. Tentukan $f(2.005)$.

Soal SEAMO III Penang)

Jawab:

Diketahui bahwa $f(x) = 3x + 4$ dan $g(x) = 2(x - 1) \Leftrightarrow g(x) = 2x - 2$.

a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$= (3x + 4) + (2x - 2)$
$= 5x + 2$

b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
$= (3x + 4) - (2x - 2)$
$= 3x + 4 - 2x + 2$
$= x + 6$

c. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
$= (3x + 4) \times (2x - 2)$
$= 3x(2x) + 3x(-2) + 4(2x) + 4(-2)$
$= 6x^2 + 2x - 8$

d. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{3x+4}{2x-2}, x \neq 1$

Contoh 2:

Diketahui $f(x) = x^2 + 3x - 1$ dan $(f + g)(x) = x^2 + 5$. Tentukan $g(x)$.

Jawab:

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
$\Leftrightarrow x^2 + 5 = (x^2 + 3x - 1) + g(x)$
$\Leftrightarrow g(x) = (x^2 + 5) - (x^2 + 3x - 1)$
$\Leftrightarrow g(x) = x^2 + 5 - x^2 - 3x + 1$
$\Leftrightarrow g(x) = -3x + 6$

Soal Kompetensi 2

• Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $f(x) = 5x^2 + 2x + 1$ dan $g(x) = 3(x + 2) + 1$. Tentukan rumus fungsi berikut.
   a. $f + g$
   d. $\dfrac{f}{g}$
   b. $f - g$
   e. $\dfrac{g}{f}$
   c. $f \times g$
2. Diketahui $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ dengan $f(x) = x^2 + 3$ dan $g(x) = x - 5$. Tentukan
   a. rumus $f + g, f - g, f \times g, \dfrac{f}{g}$;

Tantangan

Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Pada pukul 12.00 sebuah pesawat A terbang ke arah barat dengan kecepatan 400 mil/jam. Pada saat yang bersamaan, pesawat B terbang ke arah timur dengan kecepatan 300 mil/jam. Dengan mengabaikan kelengkungan permukaan bumi serta menganggap ketinggian pesawat A dan B adalah sama, carilah rumus $D(t)$, yaitu fungsi yang menyatakan jarak kedua pesawat setelah t jam.

a. Analog dengan soal tersebut, akan tetapi pesawat B terbang 1 jam setelah pesawat A berangkat.
b. Berdasarkan soal tersebut, tentukan jarak kedua pesawat sesaat pada pukul 14.30.

b. nilai fungsi $f+g, f-g, f \times g, \dfrac{f}{g}$ untuk $x = 0, 1, 2, 3$.

3. Diketahui fungsi f dan g didefinisikan sebagai himpunan pasangan berurutan seperti berikut.
   $f = \{(-2, 1), (0, 3), (2, 5), (4, 7)\}$
   $g = \{(-2, -3), (0, -2), (2, -1), (4, 0)\}$
   Tentukan
   a. $f+g$
   b. $f-g$
   c. $f \times g$
   d. $g-f$
   e. $\dfrac{f}{g}$
   f. $\dfrac{g}{f}$

4. Jika $(f + g)(x) = x^2 + 3x$ dan $g(x) = x^2 - 5x + 2$, tentukan fungsi $f(x)$.

5. Tentukan rumus fungsi $(f \times g)(x)$ jika diketahui $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 4x - 3$. Kemudian, tentukan $h(x) = (f \times g)(x) - (f + g)(x)$.

6. Carilah $f+g, f-g, fg$, dan $\dfrac{f}{g}$ serta tentukan domainnya dari fungsi-fungsi berikut ini kemudian tentukan nilai fungsi-fungsi baru tersebut untuk x yang diberikan.
   a. $f(x) = x^3 + 2$ dan $g(x) = \dfrac{2}{(x-1)}$, untuk $x = 2$
   b. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$ dan $g(x) = \dfrac{2}{x}$, untuk $x = -1$
   c. $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)}$ dan $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, untuk $x = 1$

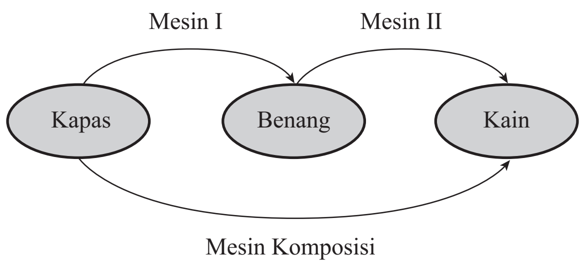
7. Diketahui suatu fungsi $f(x) = \dfrac{2x}{(x+1)}$ dan $g(x) = x^2 - 2x - 4$.
   Tentukan
   a. $f^2(x)$;
   b. $g^3(x)$;
   c. $f^2(x) + g^3(x)$;
   d. $f^2(x) - g^3(x)$;
   e. $f^2(x)\, g^3(x)$.

8. Hitunglah $\sqrt{f^2(3,46) + 4f(3,46)}$ jika diketahui $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)}$ dengan menggunakan kalkulator.

9. Hitunglah $\sqrt[3]{g^3(\pi) - g(\pi)}$ jika diketahui $g(x) = 6x - 11$.
10. Jika f adalah suatu fungsi, berlakukah $f(s + t) = f(s) + f(t)$? Jika tidak, tunjukkan dengan beberapa contoh fungsi f yang tidak meme-nuhi persamaan tersebut.
11. Jika f adalah suatu fungsi, apakah berlaku $f(3x) = 3f(x)$? Jika tidak, tunjukkan beberapa contoh fungsi f yang tidak memenuhi persamaan tersebut.
12. Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang telah digambar grafiknya. Didefinisikan suatu fungsi konstan $g(x) = 5$. Bagaimana bentuk grafik $f(x) + g(x)$ dibandingkan grafik $f(x)$ mula-mula? Selidiki pula grafik fungsi $f(x) - g(x)$.

C. Fungsi Komposisi

Perhatikan sebuah pabrik yang membuat kain. Kain terbuat dengan bahan dasar kapas, kemudian diolah menjadi benang oleh mesin pembuat benang. Dari benang diolah oleh mesin pembuat kain menjadi kain. Dengan pengolahan seperti ini, setidaknya ada dua fungsi yang bekerja. Fungsi pertama: mengerjakan instruksi pada mesin pertama. Fungsi kedua: mengerjakan instruksi mesin kedua. Pertanyaannya adalah bagaimana kerja mesin yang sekaligus dapat mengubah bahan dasar kapas langsung menjadi kain? Fungsi yang melaksanakan instruksi mesin ini (kita sebut saja mesin komposisi) dinamakan sebagai fungsi komposisi. Ilustrasinya adalah sebagai berikut



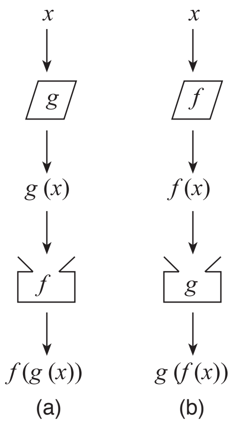
Gambar 3.9

Dengan ilustrasi di atas, mari kita terapkan dalam memahami komposisi fungsi.

1. Pengertian Fungsi Komposisi

Misalkan diberikan fungsi $f\colon R \to R$ dan $g\colon R \to R$. Fungsi f dirumuskan dengan $f(x) = x + 1$ dan g dirumuskan dengan $g(x) = x^2$. Dengan menggunakan rumus $f(x) = x + 1$, untuk

$x = 1 \to f(1) = 1 + 1$
$x = 2 \to f(2) = 2 + 1$
$x = t \to f(t) = t + 1$



Gambar 3.10

Jika x diganti dengan fungsi $g(x)$, diperoleh

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) &= g(x) + 1 \\
&= x^2 + 1
\end{aligned}
$$

Misalkan fungsi $h(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$.

Fungsi $h(x)$ yang diperoleh dengan cara di atas, dinamakan komposisi fungsi g dan f. Fungsi ini dituliskan dengan $f \circ g$, dibaca "*f bundaran g*".

Dengan cara serupa, diperoleh

$g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 1)^2$

Misalkan $z(x) = g(f(x)) = (x + 1)^2$. Dengan demikian, diperoleh fungsi $g \circ f$.

Untuk memudahkan kalian dalam memahami komposisi fungsi, perhatikan gambar di samping. Dari **Gambar 3.10** (a), fungsi g menerima masukan x sehingga g bekerja pada x dan menghasilkan $g(x)$ sebagai keluaran. Fungsi $g(x)$ menjadi masukan fungsi f sehingga fungsi f bekerja pada $g(x)$ dan menghasilkan keluaran $f(g(x))$.

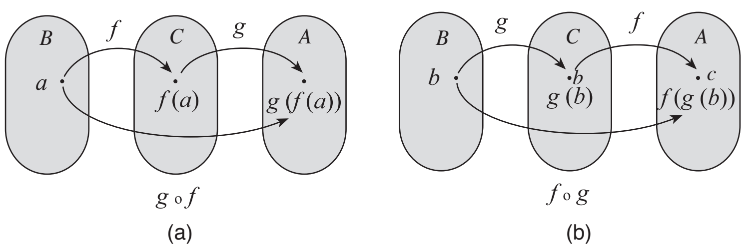
Dari **Gambar 3.10** (b), fungsi f menerima x sebagai masukan dan menghasilkan $f(x)$. Kemudian, $f(x)$ menjadi masukan bagi fungsi g dan menghasilkan keluaran $g(f(x))$.

Dari uraian di atas, dapat kita buat suatu definisi tentang fungsi komposisi dua buah fungsi sebagai berikut.

> Misalkan fungsi $f : A \to B$, dengan $f(a) = b$ dan fungsi $g : B \to C$ dengan $g(b) = c$. Komposisi fungsi f dan g, ditulis $g \circ f$ (dibaca: g bundaran f) adalah suatu fungsi yang ditentukan dengan aturan
>
> $$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Hal yang sama juga berlaku untuk komposisi fungsi $f \circ g$. Misalkan $g : B \to C$, dengan $g(b) = c$ dan $f : C \to A$, dengan $f(c) = a$ maka komposisi fungsi f dan g, ditulis $f \circ g$ pengerjaannya dilakukan pada fungsi f terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan fungsi g. Hal ini dapat dituliskan $(f \circ g)(a) = f(g(a))$.

Ilustrasi komposisi fungsi dari fungsi f dan fungsi g adalah sebagai berikut.



Gambar 3.11

Contoh 1:

Diketahui fungsi f dan g yang dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan sebagai berikut.

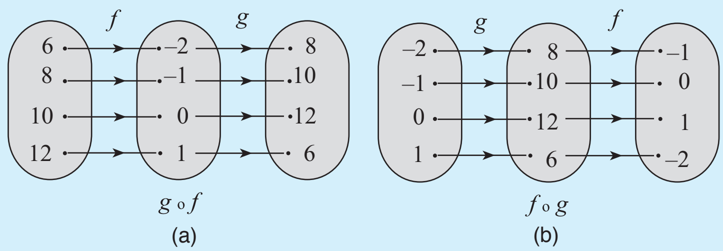
$f\ \ = \{(6, –2), (8, –1), (10, 0), (12, 1)\}$

$g\ \ = \{(–2, 8), (–1, 10), (0, 12), (1, 6)\}$

Tentukan $f \circ g$, $g \circ f$, $(f \circ g)(1)$, $(g \circ f)(6)$, dan $(g \circ f)(10)$.

Jawab:

Untuk menjawabnya, akan lebih jelas jika kita gambarkan dalam diagram panah untuk kedua fungsi tersebut, seperti berikut.



Gambar 3.12

Dari kedua gambar di atas, dapat kita peroleh sebagai berikut.

a. $g \circ f = \{(6, 8), (8, 10), (10, 12), (12, 6)\}$
b. $f \circ g = \{(–2, –1), (–1, 0), (0, 1), (1, –2)\}$
c. $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(6) = –2$
d. $(g \circ f)(6) = g(f(6) = g(–2) = 8$
e. $(g \circ f)(10) = g(f(10)) = g(0) = 12$

Contoh 2:

Diketahui $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = x^2$.

Tentukan

a. $(g \circ f)(x)$;
b. $(f \circ g)(x)$;
c. apakah $g \circ f = f \circ g$?

Jawab :

a. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = (3x + 2)^2 = 9x^2 + 12 + 4$
b. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 3x^2 + 2$
c. Karena $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 12 + 4$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 2$ maka terlihat bahwa $g \circ f \neq f \circ g$.

Problem Solving

Diketahui $f(x) = 3x + 5$ dan $g(x) = 2x – 7$. Tentukan

a. $(f \circ g)(3)$;
b. $(g \circ f)(–2)$.

Jawab:

Ada dua cara untuk menentukan nilai dari suatu fungsi komposisi.

a. *Cara 1*:

Dengan menentukan fungsi komposisinya terlebih dahulu

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x - 7)\\ &= 3(2x - 7) + 5\\ &= 6x - 21 + 5\\ &= 6x - 16\end{aligned}$$

Untuk memperoleh nilai $(f \circ g)(3)$, substitusikan nilai $x = 3$ ke $(f \circ g)(x)$.

$(f \circ g)(3) = 6(3) - 16 = 2$

Jadi, $(f \circ g)(3) = 2$.

Cara 2:

Kalian tahu bahwa $(f \circ g)(3) = f(g(3))$.

Untuk itu, terlebih dahulu dicari $g(3)$, yaitu $g(3) = 2(3) - 7 = -1$.

Jadi, $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(-1) = 3(-1) + 5 = 2$.

b. *Cara 1*:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(3x + 5)\\ &= 2(3x + 5) - 7\\ &= 6x + 10 - 7\\ &= 6x + 3\end{aligned}$$

Dengan demikian, $(g \circ f)(-2) = 6(-2) + 3 = -9$.

Cara 2:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(-2))\\ &= g(3(-2) + 5)\\ &= g(-1)\\ &= 2(-1) - 7\\ &= -9\end{aligned}$$

Jadi, $(g \circ f)(-2) = -9$.

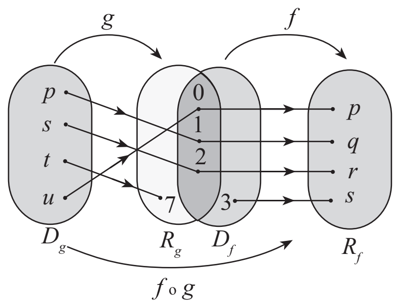
Mari Berdiskusi

Inkuiri

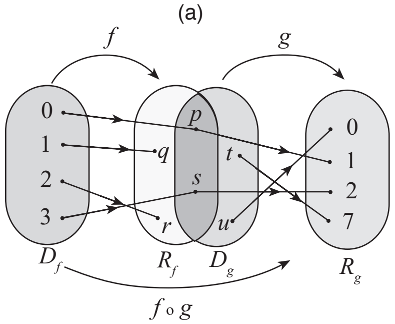
Ingat kembali definisi dan komposisi fungsi. Apakah hasil dari komposisi fungsi selalu dapat disebut sebagai fungsi? Berikan alasan kalian dengan menunjukkan contoh untuk memperkuat jawaban kalian. Presentasikan di depan kelas.

2. Syarat agar Dua Fungsi Dapat Dikomposisikan

Misalkan terdapat dua fungsi, yaitu f dan g. Apakah dua fungsi selalu dapat dikomposisikan? Dua fungsi belum tentu dapat dikomposisikan menjadi fungsi komposisi. Untuk mengetahui syarat agar komposisi dua fungsi menjadi fungsi komposisi, perhatikan uraian berikut.



(a)



(b)

Gambar 3.13

Misalkan diketahui fungsi f dan g dinyatakan dengan pasangan berurutan berikut.

$f = \{(0, p), (1, q), (2, 5), (3, 5)\}$

$g = \{(p, 1), (s, 2), (t, 7), (u, 0)\}$

Mari kita selidiki fungsi komposisi $f \circ g$ dan $g \circ f$.

a. Komposisi fungsi $f \circ g$ berarti pemetaan pertama fungsi g dilanjutkan pemetaan kedua fungsi f. Hal ini dapat digambarkan dalam diagram panah seperti pada **Gambar 3.13** (a). Berdasarkan diagram tersebut, dapat diperoleh pasangan berurutan
$(f \circ g) = \{(p, q), (s, r), (u, p)\}$
Mengapa kita tidak dapat menentukan $(f \circ g)(t)$?

b. Komposisi fungsi $g \circ f$ berarti pemetaan pertama fungsi f dilanjutkan pemetaan kedua fungsi g. Hal ini dapat digambarkan dalam diagram panah seperti pada **Gambar 3.13** (b). Berdasarkan diagram tersebut, dapat diperoleh pasangan berurutan $(g \circ f) = \{(0, 1), (3, 2)\}$.
Mengapa kita tidak dapat menentukan $(g \circ f)(1)$ dan $(g \circ f)(2)$?

Berdasarkan dua kegiatan di atas, dapat kita simpulkan sebagai berikut.

Syarat agar fungsi f dan g dapat dikomposisikan $(f \circ g)$ adalah irisan antara daerah hasil fungsi g dan daerah asal fungsi f bukan himpunan kosong. Secara matematis, hal ini dapat ditulis

$$R_g \cap D_f \neq \phi$$

Lebih jauh lagi, syarat agar fungsi f dapat dikomposisikan menjadi fungsi komposisi $(f \circ g)$ adalah apabila range fungsi g merupakan himpunan bagian dari domain f, atau

$$R_g \subseteq D_f$$

Demikian pula sebaliknya, syarat agar fungsi g dan fungsi f dapat dikomposisikan $(g \circ f)$ adalah irisan antara daerah hasil fungsi f dan daerah asal fungsi g bukan himpunan kosong. Dalam notasi matematika dapat ditulis

$$R_f \cap D_g \neq \phi$$

Kemudian, komposisi $g \circ f$ merupakan sebuah fungsi apabila range fungsi f merupakan himpunan bagian dari domain g, atau

$$R_f \subseteq D_g$$

Contoh:

Diketahui fungsi f dan g dinyatakan dalam pasangan berurutan berikut.

$f = \{(0, 0), (1, 2), (2, 2)\}$ $\quad g = \{(1, 0), (2, 2)\}$

a. Nyatakan komposisi fungsi berikut dalam pasangan berurutan.
   1) $f \circ g$ $\quad$ 2) $g \circ f$
b. Tentukan
   1) $(g \circ f)(1)$; $\quad$ 2) $(g \circ f)(2)$;
   3) $(f \circ g)(1)$; $\quad$ 4) $(f \circ g)(2)$.

Jawab:

a. 1) $(f \circ g) = \{(1, 0), (2, 2)\}$
   2) $(g \circ f) = \{(0, 0), (1, 2), (2, 2)\}$

b. 1) $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 2$
   2) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(2) = 2$
   3) $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 0$
   4) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = 2$

3. Sifat-Sifat Fungsi Komposisi

Dalam memahami sifat-sifat fungsi komposisi, kalian menemukannya dari definisi komposisi itu. Untuk itu lakukan Aktivitas berikut.

Aktivitas

Tujuan : Menyelidiki sifat-sifat komposisi fungsi.

Permasalahan : Sifat-sifat apakah yang berlaku pada komposisi fungsi?

Kegiatan : Misalkan diberikan fung si-fungsi dengan rumus berikut: $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 2x + 1$, $h(x) = 2 - x$, dan $I(x) = x$.

1. Selidiki, apakah $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$? Berlakukah sifat komutatif?
   a. Tentukan $(f \circ g)(x)$.
   b. Tentukan rumus fungsi $(g \circ f)(x)$.
2. Selidiki, apakah $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$? Berlakukah sifat asosiatif?
   a. Tentukan $(f \circ (g \circ h))(x)$.
   b. Tentukan rumus fungsi $((f \circ g) \circ h)(x)$.

3. Selidiki, apakah $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x)$? Apakah terdapat fungsi identitas? Fungsi manakah yang dinamakan fungsi identitas?
   a. Tentukan $(f \circ I)(x)$.
   b. Tentukan $(f \circ I)(x)$.

Ulangi lagi kegiatan 1, 2, dan 3, tetapi ambillah sembarang fungsi lain.

Kesimpulan : Apa yang dapat kalian simpulkan dari kegiatan di atas?

Jika kalian melakukan Aktivitas di atas dengan benar, kalian akan dapat menyimpulkan sifat-sifat komposisi fungsi sebagai berikut.

a. Komposisi fungsi tidak bersifat komutatif, yaitu $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.
b. Komposisi fungsi bersifat asosiatif, yaitu $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$.
c. Terdapat fungsi identitas $I(x) = x$ sehingga $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$.

4. Menentukan Fungsi yang Diketahui Fungsi Komposisinya

Jika fungsi komposisi $f \circ g$ atau $g \circ f$ diketahui dan fungsi f diketahui, kita dapat menentukan fungsi g. Sebaliknya, jika fungsi komposisi $f \circ g$ atau $g \circ f$ diketahui dan fungsi g diketahui maka fungsi f dapat kita tentukan. Lebih lanjut, untuk memahami hal tersebut, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 1:

Diketahui fungsi $(f \circ g)(x) = -15x + 5$ dan fungsi $f(x) = 3x + 2$. Tentukan fungsi g.

Jawab:

Karena $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, berarti

$$f(g(x)) = -15x + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad 3(g(x)) + 2 = -15x + 5$$
$$\Leftrightarrow \quad g(x) = \frac{-15x + 3}{3}$$
$$\Leftrightarrow \quad g(x) = -5x + 1$$

Jadi, $g(x) = -5x + 1$.

Contoh 2:

Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$. Jika $g(x) = x^2 - 9$ dan $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x$. Tentukan $f(x)$.

Jawab:

Diketahui $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 12x$ dan $g(f(x)) = 4x^2 + 12x$.

Karena $g(x) = x^2 - 9$ maka $g(f(x)) = (f(x))^2 - 9$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} (f(x))^2 - 9 &= 4x^2 + 12x \\ \Leftrightarrow \quad (f(x))^2 &= 4x^2 + 12x + 9 \\ \Leftrightarrow \quad (f(x))^2 &= (2x + 3)^2 \\ \Leftrightarrow \quad f(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = 2x + 3$.

Problem Solving

Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$. Jika $g(x) = x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 5x + 7$, tentukan $f(x)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= 5x + 7 \\ \Leftrightarrow \quad f(g(x)) &= 5x + 7 \\ \Leftrightarrow \quad f(x + 2) &= 5x + 7 \end{aligned}$$

Ada dua cara untuk menyelesaikan persamaan di atas.

Cara 1:

$f(x + 2) = 5x + 7$

Pada ruas kanan harus terbentuk faktor $(x + 2)$ sehingga

$$\begin{aligned} f(x + 2) &= 5x + 7 \\ &= 5(x + 2) - 10 + 7 \\ &= 5(x + 2) - 3 \end{aligned}$$

Karena $f(x + 2) = 5(x + 2) - 3$ maka $f(x) = 5x - 3$.

Jadi, diperoleh $f(x) = 5x - 3$.

Cara 2:

Perhatikan $f(x + 2) = 5x + 7$.

Dari persamaan ini, variabel ruas kiri adalah $(x + 2)$, sedangkan variabel ruas kanan adalah x. Dengan demikian, $(x + 2)$ bersesuaian dengan x.

$x + 2 \leftrightarrow x$

$x \leftrightarrow x - 2$

Jadi, $(x + 2)$ di ruas kiri diubah menjadi x, sedangkan variabel x di ruas kanan diubah menjadi $x - 2$. Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) &= 5(x - 2) + 7 \\ &= 5x - 10 + 7 \\ &= 5x - 3 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $f(x) = 5x - 3$.

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Jika $g(x) = x^2 - 1$ dan fungsi f memenuhi $(f \circ g)(x) = x^4$ maka $f(4) = ...$

a. 5
b. 10
c. 15
d. 20
e. 25

SPMB 2007

Soal Kompetensi 3

• Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui fungsi f dan g yang dinyatakan dengan himpunan pasangan berurut seperti berikut.
   $f = \{(4, 1), (0, 3), (1, 4), (3, 6), (2, 10)\}$
   $g = \{(1, 0), (3, 1), (4, 2), (6, 3), (10, 4)\}$
   Tentukan $f \circ g$, $g \circ f$, $(f \circ g)(3)$, $(f \circ g)(6)$, $(g \circ f)(1)$, dan $(g \circ f)(0)$.
2. Tentukan $(f \circ g)(2)$ dan $(g \circ f)(-1)$ untuk fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 4x + 1$ dan $g(x) = 3x - 5$
   b. $f(x) = 2x^2$ dan $g(x) = x + 1$
   c. $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = x^2 + 2$
3. Carilah $f \circ g \circ h$ dan domain fungsi komposisi tersebut dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x - 1$
   b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3$, $h(x) = x^2 + 2$
   c. $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x - 5$, $h(x) = \sqrt{x}$
   d. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{(x-1)}$, $h(x) = \sqrt{x}$
4. Carilah fungsi $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$, dan $g \circ g$ serta domain fungsi komposisi tersebut dari fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$
   b. $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2$
   c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = x^3 + 2x$
   d. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
   e. $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$
5. Jika $f(x) = x + 4$ dan $h(x) = 4x - 1$, carilah fungsi $g(x)$ sedemikian rupa sehingga $g \circ f = h$.
6. Sajikan fungsi $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$ sebagai komposisi dari tiga fungsi.
7. Fungsi f, g, dan h ditentukan dengan aturan $f(x) = x - 4$, $g(x) = 3x + 2$, dan $h(x) = x^2 - 1$. Tentukan
   a. $(f \circ g \circ h)(x)$;
   b. $(f \circ h \circ g)(x)$;
   c. $(h \circ g \circ f)(x)$;
   d. $(g \circ f \circ h)(2)$;
   e. $(g \circ h \circ f)(3)$;
   f. $(h \circ f \circ g)(1)$.

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Jika $f(x) = 2 - x$, $g(x) = x^2 + 1$, dan $h(x) = 3x$ maka $(h \circ g \circ f)(3) = ...$
a. -80
b. -6
c. 6
d. 80
e. 81

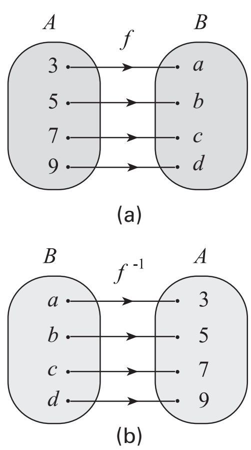
UMPTN 2001

8. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$. Jika $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+2x+2}$, tentukan $g(x-3)$.
9. Diketahui fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$. Jika $g(x) = x^2 + 2x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 6x + 5$, tentukan $f(x)$ dan $f(x-1)$.
10. Diketahui $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = \frac{x-2}{x+3}$. Jika $(f \circ g)(a) = 0$, tentukan nilai a.

D. Fungsi Invers

Untuk memahami invers suatu invers, perhatikan uraian berikut ini. Misalkan $f = \{(3, a), (5, b), (7, c), (9, d)\}$. Fungsi balikan dengan anggota-anggotanya $\{(a, 3), (b, 5), (c, 7), (d, 9)\}$ disebut *invers fungsi f*. Fungsi ini biasanya dinotasikan dengan f^{-1}. Dengan demikian, invers fungsi f di atas adalah $f^{-1} = \{(a, 3), (b, 5), (c, 7), (d, 9)\}$. Diagram panah untuk fungsi f dan f^{-1} tampak seperti **Gambar 3.14** (b).

1. Pengertian Invers Suatu Fungsi



Gambar 3.14

Balikan fungsi (invers) dari fungsi $f: A \to B$ adalah $f^{-1} : B \to A$. Fungsi f memetakan anggota himpunan A ke himpunan B yang dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$, sedangkan fungsi f^{-1} memetakan anggota himpunan B ke himpunan A yang dinyatakan dengan $\{(y, x) \mid y \in B, x \in A\}$. Secara umum, definisi untuk invers suatu fungsi f adalah sebagai berikut.

Jika fungsi $f : A \to B$ dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$ maka invers dari fungsi f adalah $f^{-1} : B \to A$ yang dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in B, x \in A\}$.

Contoh 1:

Diketahui fungsi $f : A \to B$ dengan $A = \{1, 3, 5\}$, dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$, dan f dinyatakan dengan pasangan berurutan $f = \{(1, 2), (3, 6), (5, 8)\}$.
Tentukan invers fungsi f dan selidikilah apakah invers fungsi f merupakan sebuah fungsi.

Jawab:

Invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \to A$, yaitu $f^{-1} = \{(1, 2), (3, 6), (5, 8)\}$. Dengan demikian, invers fungsi f adalah relasi biasa (bukan fungsi) karena ada sebuah anggota B yang tidak dipetakan ke A, yaitu 4.

Contoh 2:

Diketahui $A = \{1, 3, 5\}$, dan $B = \{0, 2, 4\}$. Fungsi $g : A \to B$ ditentukan oleh $g = \{(1, 0), (3, 2), (5, 4)\}$. Carilah g^{-1} dan selidikilah apakah g^{-1} merupakan sebuah fungsi.

Jawab:

Invers g adalah $g^{-1} : B \to A$, dengan $g^{-1} = \{(0, 1), (2, 3), (4, 5)\}$. Tampak bahwa g^{-1} merupakan sebuah relasi yang merupakan fungsi.

Dari kedua contoh di atas, syarat agar invers suatu fungsi merupakan fungsi (fungsi invers) adalah sebagai berikut.

Suatu fungsi $f : A \to B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1} : B \to A$ jika dan hanya jika f merupakan fungsi bijektif atau A dan B berkorespondensi satu-satu.

2. Menentukan Invers Suatu Fungsi

Kita telah memahami bahwa invers sebuah fungsi belum tentu berbentuk fungsi. Jika invers suatu fungsi berbentuk sebuah fungsi maka inversnya itu disebut *fungsi invers*. Syarat agar invers sebuah fungsi merupakan fungsi invers adalah fungsi tersebut merupakan fungsi bijektif. Hal ini telah kita pelajari dalam pembahasan di atas.

Misalkan f adalah fungsi bijektif dan y adalah peta dari x oleh fungsi f sehingga pemetaan f dapat dinyatakan dengan persamaan $y = f(x)$. Jika f^{-1} adalah invers f, maka x adalah peta dari y oleh fungsi f^{-1} sehingga fungsi f^{-1} dapat dinyatakan dengan persamaan $x = f^{-1}(y)$. Rumus $x = f^{-1}(y)$ dapat diperoleh dengan langkah-langkah berikut.

a. Ubahlah bentuk $y = f(x)$ menjadi $x = g(y)$. Dalam hal ini, x sebagai fungsi y.
b. Nyatakan x sebagai $f^{-1}(y)$ sehingga $f^{-1}(y) = g(y)$.
c. Gantilah y pada $f^{-1}(y)$ dengan x sehingga diperoleh rumus fungsi invers $f^{-1}(x)$.

Contoh:

Tentukan rumus invers fungsi dari fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = 5x + 2$

b. $f(x) = \dfrac{3-4x}{x+3}$, $x \neq -3$

c. $f(x) = x^2 + 4$, $x \geq 0$

Jawab:

a.
$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Leftrightarrow y &= 5x + 2 \\ \Leftrightarrow 5x &= y - 2 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{y-2}{5} \\ \Leftrightarrow f^{-1}(y) &= \frac{y-2}{5} \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{y-2}{5}$.

b.
$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{3-4x}{x+3} \\ \Leftrightarrow xy + 3y &= 3 - 4x \\ \Leftrightarrow (y + 4)x &= 3 - 3y \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3-3y}{y+4} \\ \Leftrightarrow f^{-1}(y) &= \frac{3-3y}{y+4} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{3-3x}{x+4} \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{3-3x}{x+4}$, $x \neq -4$

c.
$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \Leftrightarrow y &= x^2 + 4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= y - 4 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{y-4} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y-4} \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{y-4}$, $x \geq 4$

Untuk $x \geq 0$ maka $f^{-1}(x) = \sqrt{x-4}$, $x \geq 4$.

Dengan cara serupa, untuk $x < 0$ diperoleh

$f^{-1}(x) = -\sqrt{x-4}$, $x > 4$.

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Diketahui fungsi f dan g dinyatakan $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = \dfrac{2x+5}{x-4}$, dan $h(x) = (g \circ f^{-1})(x)$ untuk f^{-1} adalah invers fungsi f dan h^{-1} adalah invers fungsi h. Rumus fungsi $h^{-1}(x) = ...$

a. $\dfrac{12x+2}{x-2}$

b. $\dfrac{6x+2}{x-2}$

c. $\dfrac{12x-2}{x-2}$

d. $\dfrac{2x+12}{5x+13}$

e. $\dfrac{2x-12}{5x-13}$

Ebtanas 2001

3. Komposisi Suatu Fungsi dengan Inversnya

Untuk mengetahui tentang hubungan invers dengan komposisi fungsi perhatikan uraian berikut.

a. Misalkan ditentukan fungsi $f(x) = x + 5$.
Dapat kita tentukan invers dari fungsi f, yaitu

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & y = x + 5 \\ \Leftrightarrow\ & x = y - 5 \\ \Leftrightarrow\ & f^{-1}(y) = y - 5 \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = x - 5$.
Sekarang perhatikan komposisi fungsi f dan f^{-1} berikut.
1) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x - 5) = (x - 5) + 5 = x$
2) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f(x + 5) = (x + 5) - 5 = x$

Dengan demikian, diperoleh $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

b. Perhatikan sekali lagi untuk fungsi $f(x) = x^2 + 6, x \geq 0$.

$$\begin{aligned} & y = f(x) \\ \Leftrightarrow\ & y = x^2 + 6 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = y - 6 \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\sqrt{y - 6} \\ \Leftrightarrow\ & f^{-1}(y) = \pm\sqrt{y - 6} \end{aligned}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x - 6}$, $x \geq 6$

1) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x - 6})$
$= (\sqrt{x - 6})^2 + 6$
$= (x - 6) + 6 = x$

2) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 + 6)$
$= \sqrt{(x^2 + 6) - 6} = \sqrt{x^2} = x$

Dengan demikian, diperoleh $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Dari uraian di atas, dapat dilihat bahwa komposisi fungsi dengan inversnya (atau sebaliknya) akan menghasilkan fungsi identitas sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$$

4. Grafik Fungsi Invers

Sebelum kalian menggambarkan grafik fungsi invers, terlebih dahulu kalian mempelajari cara menentukan domain dan kodomain dari fungsi invers. Agar kalian mudah dalam memahami pengertian-pengertian di atas, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 1:

Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 6$.
a. Carilah $f^{-1}(x)$.
b. Tentukan domain dan kodomain fungsi f agar $f(x)$ mempunyai fungsi invers.

Jawab:

a. $f(x) = 2x + 6$

Misalkan $y = f(x)$. Dengan demikian,

$$y = 2x + 6$$

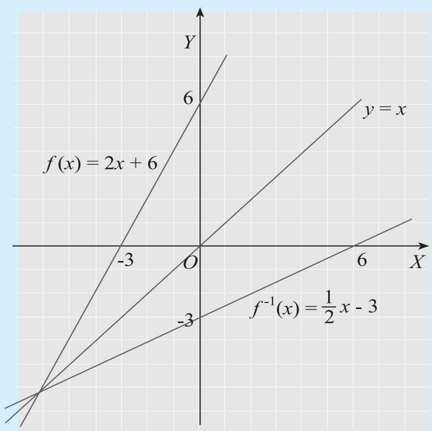
$$\Leftrightarrow 2x = y - 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}y - 3$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 3. \text{ Jadi, } f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 3.$$

b. Domain untuk f adalah semua himpunan bilangan real atau ditulis $D_f = \{x \mid x \in R\}$.

Karena domain dari $f^{-1}(x)$ merupakan kodomain fungsi f maka kodomain f agar mempunyai fungsi invers adalah semua bilangan anggota himpunan bilangan real. Jika digambarkan dalam bidang Cartesius, tampak seperti gambar berikut.



Gambar 3.15

Contoh 2:

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 2$. Tentukan

a. grafik $f(x)$;

b. domain fungsi f agar fungsi $f(x)$ mempunyai fungsi invers;

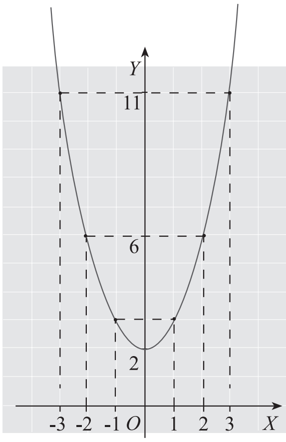
c. rumus $f^{-1}(x)$ dan domain $f^{-1}(x)$;

d. grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dalam satu sumbu koordinat.

Jawab:

a. $f(x) = x^2 + 2$

Fungsi $f(x)$ berbentuk fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a = 1$, $b = 0$, dan $c = 2$. Kita tentukan sumbu



Gambar 3.16

simetrinya, yaitu $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2(1)} = 0$. Dengan menyubstitusikan $x = 0$ ke $f(x) = x^2 + 2$, diperoleh $y = 2$ sehingga dihasilkan titik puncak (0, 2). Karena $a = 1 > 0$, parabola membuka ke atas. Untuk mempermudah, gunakan titik-titik bantu seperti berikut.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	11	6	3	2	3	6	11
(*x*, *y*)	(–3, 11)	(–2, 6)	(–1, 3)	(0, 2)	(1, 3)	(2, 6)	(3, 11)

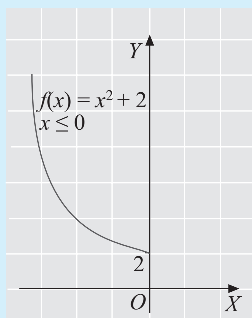
Grafik $f(x) = x^2 + 2$ adalah seperti gambar di samping.

b. Grafik $f(x) = x^2 + 2$ berbentuk parabola. Fungsi $f(x) = x^2 + 2$ bukan fungsi injektif sehingga fungsi ini tidak mempunyai fungsi invers.
Fungsi $f(x)$ dapat diubah menjadi fungsi yang mempunyai fungsi invers dengan cara membagi domain fungsi menjadi dua bagian. Karena sumbu simetrinya adalah $x = 0$, agar $f(x)$ mempunyai fungsi invers maka domainnya adalah $D_{f_1} = \{x \mid x \leq 0, x \in R\}$ dan $D_{f_2} = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$. Dengan demikian, fungsi $f(x) = x^2 + 2$ menjadi dua fungsi, sesuai dengan domainnya, masing-masing fungsi merupakan fungsi bijektif.

c. $f(x) = x^2 + 2$
Misalkan $f(x)$.

$$\begin{aligned} y &= x^2 + 2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= y - 2 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{y-2} \\ \Leftrightarrow f^{-1}(y) &= \sqrt{y-2} \\ \Leftrightarrow f^{-1}(x) &= \sqrt{x-2} \end{aligned}$$

1) Untuk $D_{f_1} = \{x \mid x \leq 0, x \in R\}$ dipilih tanda negatif. Oleh karena itu, $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}$.
Jadi, untuk $D_{f_1} = \{x \mid x \leq 0, x \in R\}$, fungsi invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-2}$. Domain fungsi invers adalah $\{x \mid x \geq 2, x \in R\}$.

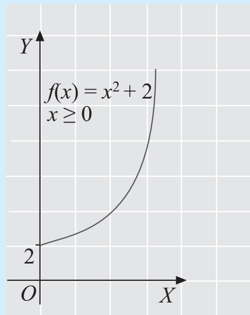


Gambar 3.17

2) Untuk $D_{f_2} = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$, dipilih tanda positif. Oleh karena itu, $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$.

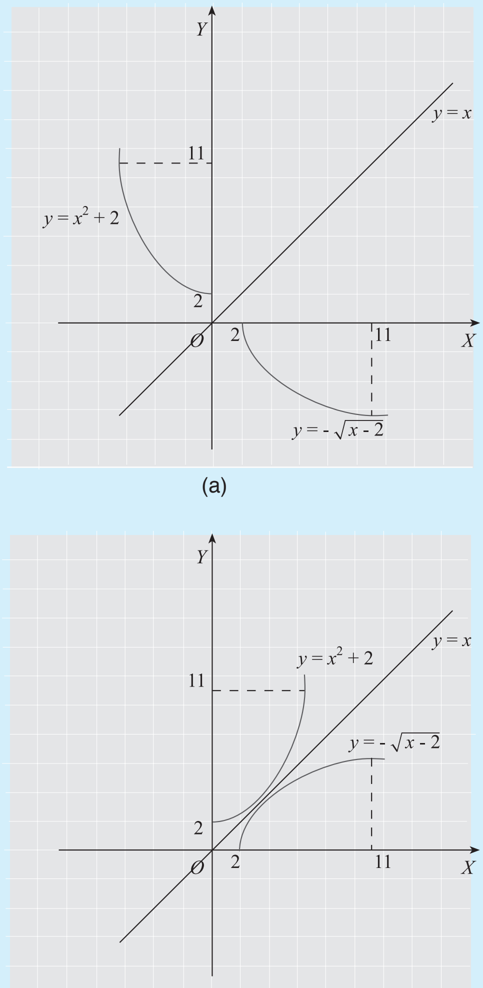
Jadi, untuk $D_{f_2} = \{x \mid x \geq 0\}$ fungsi invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$.

Domain fungsi invers adalah $\{x \mid x \geq 2, x \in R\}$.



Gambar 3.18

d. Gambar grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ untuk masing-masing domain adalah sebagai berikut.



(b)

Gambar 3.19

Dari contoh-contoh di atas, tampak bahwa grafik fungsi $f^{-1}(x)$ merupakan hasil pencerminan dari grafik $f(x)$ terhadap garis $y = x$ dan sebaliknya. Dengan demikian, mudah bagi kalian untuk menggambarkan grafik fungsi invers $f^{-1}(x)$.

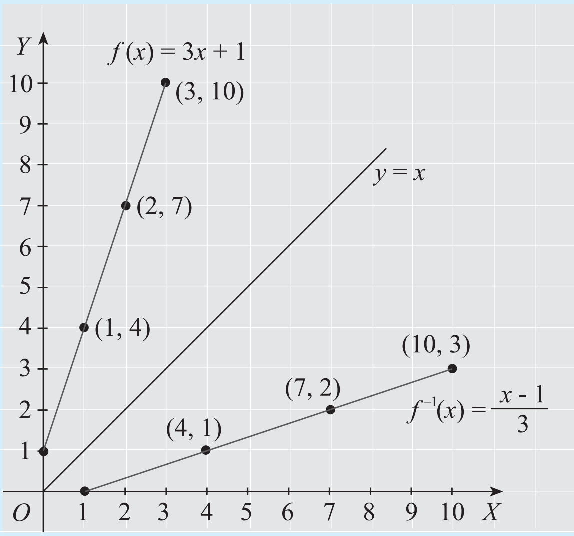
Mari Berdiskusi
Berpikir kritis

Syarat apa yang harus dipenuhi agar suatu fungsi memiliki invers? Apakah invers dari suatu fungsi pasti juga merupakan suatu fungsi? Jelaskan alasanmu. Bagaimana dengan invers fungsi kuadrat? Apa yang harus kalian lakukan agar invers fungsi kuadratis juga merupakan suatu fungsi?

Contoh:

Diberikan fungsi $f(x) = 3x + 1$, untuk $0 \leq x \leq 3$. Gambarlah grafik fungsi $f^{-1}(x)$ dari grafik fungsi f.

Jawab:



Gambar 3.20

Terlebih dahulu digambar grafik fungsi f. Grafik fungsi $f(x) = 3x + 1$ berupa garis lurus. Untuk titik $x = 0$ maka $f(0) = 1$, $x = 1$ maka $f(1) = 4$, dan seterusnya. Grafik fungsi f diperoleh dengan menghubungkan titik (0, 1), (1, 4), (2, 7), dan (3, 10). Selanjutnya, dari titik-titik tersebut, digambar titik (1, 0), (4, 1), (7, 2) dan (10, 3) yang merupakan titik-titik dari fungsi $f^{-1}(x) = \dfrac{x-1}{3}$.

Kemudian, grafik fungsi $f^{-1}(x)$ diperoleh dengan menghubungkan titik-titik (1, 0), (4, 1), (7, 2), dan (10, 3).

Soal Kompetensi 4

• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan invers masing-masing fungsi di bawah ini, kemudian gambarkan diagram panahnya.
   a. $f = \{(\sqrt{2}, 2), (-\sqrt{2}, 3), (2, 4), (-2, 5)\}$
   b. $g = \{(a, b), (c, d), (e, f), (g, h)\}$
2. Tentukan fungsi invers dari fungsi-fungsi berikut dan gambarkan grafik fungsi dan inversnya pada satu sumbu koordinat. Kemudian, tentukan domain dan range fungsi-fungsi invers tersebut.
   a. $f(x) = \frac{1}{3}x + 3$
   b. $f(x) = (x + 2)^2$
   c. $f(x) = x^2 + 5x + 4$
   d. $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
3. Tentukan invers dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 4x - 3$
   b. $f(x) = x^2 - 4x + 3$
   c. $f(x) = \dfrac{4}{x+7}$
   d. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x-3}$
   e. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-2}$
   f. $f(x) = (1 - x^3)^{\frac{1}{3}} - 3$
4. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+5}$, untuk $x \neq -5$. Jika $f(a) = 0$, tentukan nilai $f^{-1}(a)$.
5. Misalkan fungsi f adalah fungsi injektif dan fungsi g adalah fungsi yang tidak injektif. Berikan contoh fungsi f dan g, kemudian tentukan inversnya.
   a. Apakah g^{-1} suatu fungsi? Jika tidak, bagaimana caranya agar g^{-1} menjadi suatu fungsi?
   b. Di antara fungsi-fungsi berikut, tentukan mana yang merupakan fungsi injektif.
      1) f^{-1}
      2) g^{-1}
      3) $f + g$
      4) $(f + g)^{-1}$
      5) $f - g$
      6) $(f - g)^{-1}$
6. Jika $f(x - 1) = 2x^2$. Tentukan
   a. $f(x)$;
   b. $f^{-1}(x)$;
   c. $f(x + 1)$;
   d. $f^{-1}(x + 1)$;
7. Fungsi $f: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$.
   a. Carilah rumus $f^{-1}(x)$.
   b. Apakah $f^{-1}(x)$ merupakan fungsi invers dari $f(x)$?

c. Jika $f^{-1}(x)$ bukan merupakan fungsi invers dari $f(x)$ maka tentukan daerah asal untuk $f(x)$ sedemikian rupa sehingga $f^{-1}(x)$ merupakan fungsi inversnya.

8. Misalkan $A = \{x |\ x \in R;\ x > 0\}$, f dan g adalah fungsi-fungsi pada A yang ditentukan oleh $f(x) = 2x + 7$ dan $g(x) = 3x^2 - 5$.
   a. Carilah $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$.
   b. Hitung $f^{-1}(13)$ dan $g^{-1}(9)$.
   c. Jika $f^{-1}(a) = 15$ dan $g^{-1}(b) = 10$, carilah nilai a dan b.

9. Rumus $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, dengan $F \geq -459{,}67\ ^{\circ}$F, menyatakan suhu Celsius C sebagai fungsi dari suhu Fahrenheit F.
   a. Tentukan rumus untuk fungsi invers dan interpretasinya.
   b. Tentukan daerah asal dari fungsi inversnya.

10. Di suatu daerah, jumlah populasi suatu spesies X dipengaruhi oleh jumlah populasi spesies Y. Apabila jumlah populasi spesies X dinotasikan dengan x dan jumlah populasi spesies Y dinotasikan dengan y maka hubungan keduanya adalah $y = \frac{\sqrt{x^2 + 5} + 3}{4}$. Tentukan jumlah populasi spesies X apabila diketahui jumlah populasi spesies Y adalah 20.

E. Invers Fungsi Komposisi

Misalkan f dan g merupakan fungsi-fungsi komposisi, dengan komposisi fungsi-fungsi sebagai berikut.

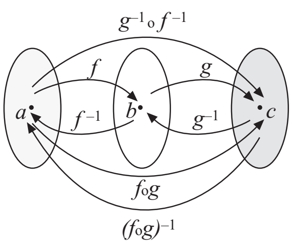
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ dan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Invers dari komposisi didefinisikan sebagai berikut.

Jika u dan v merupakan komposisi dari fungsi f dan g, yaitu $u = f \circ g$ dan $v = g \circ f$, invers dari fungsi u dan v merupakan invers dari fungsi komposisi f dan g yang ditulis

$u^{-1} = (f \circ g)^{-1}$

$v^{-1} = (g \circ f)^{-1}$



Gambar 3.21

Perhatikan diagram panah di samping.

Dari diagram di samping tampak bahwa invers dari fungsi komposisi $(f \circ g)$, yaitu $(f \circ g)^{-1}$ diperoleh dengan memetakan c ke b oleh f^{-1}, kemudian dilanjutkan dengan memetakan b ke a oleh g^{-1}. Dengan demikian, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$

Dengan cara yang sama dapat kita peroleh invers fungsi komposisi $g \circ f$, yaitu

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Diketahui $f(x) = \frac{1-x}{x}$ untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Jika $g : R \rightarrow R$ adalah suatu fungsi sehingga $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2x + 1$ maka fungsi invers $g^{-1}(x) = ...$

a. $\frac{x-3}{x+1}$

b. $\frac{x-3}{x-1}$

c. $\frac{x+1}{x-3}$

d. $\frac{x-3}{1-x}$

e. $\frac{x-1}{3-x}$

SPMB 2007

Contoh:

Diberikan fungsi f dan g, yaitu $f(x) = 5x + 8$ dan $g(x) = x - 5$.

a. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$.

b. Tentukan $(g \circ f)^{-1}(x)$.

c. Apakah $(g \circ f)^{-1}(0) = (f \circ g)^{-1}(0)$?

Jawab:

Ada dua cara untuk menentukan invers fungsi komposisi ini.

a. *Cara 1*:

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x-5) = 5(x-5) + 8 = 5x - 17$

$(f \circ g)^{-1}(x)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

Misalkan $(f \circ g)(x) = y$.

$$y = (f \circ g)(x)$$
$$\Leftrightarrow y = 5x - 17$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y+17}{5}$$
$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = \frac{y+17}{5}$$
$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x+17}{5}$$

Jadi, fungsi invers dari $(f \circ g)(x)$ adalah $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x+17}{5}$.

Cara 2:

Kita tentukan terlebih dahulu $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$.

Misalkan $y = f(x)$.

$$y = f(x)$$
$$\Leftrightarrow y = 5x + 8$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y-8}{5}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y-8}{5}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-8}{5}$$

Misalkan $y = g(x)$.

$$y = g(x)$$
$$\Leftrightarrow y = x - 5$$

$\Leftrightarrow \quad x = y + 5$

$\Leftrightarrow \quad g^{-1}(y) = y + 5$

$\Leftrightarrow \quad g^{-1}(x) = x + 5$

Dengan demikian, kita dapat menentukan invers dari $f \circ g$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}(f \circ g)^{-1}(x) &= (g^{-1} \circ f^{-1})(x)\\ &= g^{-1}(f^{-1}(x))\\ &= g^{-1}\left(\frac{x-8}{5}\right)\\ &= \frac{x-8}{5} + 5\\ &= \frac{x+17}{5}\end{aligned}$$

Jadi, fungsi invers dari $(f \circ g)(x)$ adalah $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x+17}{5}$.

b. *Cara 1*:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x + 8) = (5x + 8) - 5 = 5x + 3$

$(g \circ f)^{-1}(x)$ dapat kita peroleh dengan memisalkan $y = (g \circ f)(x)$.

$\quad y = (g \circ f)(x)$

$\Leftrightarrow \quad y = 5x + 3$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y-3}{5}$

$\Leftrightarrow \quad (g \circ f)^{-1}(y) = \frac{y-3}{5}$

$\Leftrightarrow \quad (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$

Jadi, fungsi invers dari $(g \circ f)(x)$ adalah $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$.

Cara 2:

Dari jawaban a, diperoleh $f^{-1}(x) = \frac{x-8}{5}$ dan $g^{-1}(x) = x + 5$.

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned}(g \circ f)^{-1}(x) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(x)\\ &= f^{-1}(g^{-1}(x))\\ &= f^{-1}(x + 5)\\ &= \frac{(x+5)-8}{5} = \frac{x-3}{5}\end{aligned}$$

Jadi, fungsi invers dari $(g \circ f)(x)$ adalah $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x-3}{5}$.

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Fungsi $f : R \to R$ dan fungsi $g : R \to R$ dirumuskan dengan $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ dan $g(x) = 2x + 4$ maka $(g \circ f)^{-1}(10)$ = ...

a. 4
b. 8
c. 9
d. 12
e. 16

UMPTN 1995

c. Dari jawaban di atas, diperoleh

$$(g \circ f)^{-1}(0) = \frac{0-3}{5} = \frac{-3}{5}$$

$$(f \circ g)^{-1}(0) = \frac{0+17}{5} = \frac{17}{5}$$

Jadi, $(g \circ f)^{-1}(0) \neq (f \circ g)^{-1}(0)$.

Soal Kompetensi 5

• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$ jika diketahui
   a. $f(x) = 5x$ dan $g(x) = 5 - 2x$;
   b. $f(x) = \dfrac{3}{x-5}$ dan $g(x) = 6 - 2x$;
   c. $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ dan $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$;
   d. $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$ dan $g(x) = x + 4$.
2. Diketahui $f(x) = \dfrac{3}{x+1}$ dan $g(x) = x + 6$. Tentukan nilai-nilai berikut.
   a. $(f \circ g)^{-1}(2)$
   b. $(g \circ f)^{-1}(2)$
   c. $(f \circ g)^{-1}(-2)$
   d. $(g \circ f)^{-1}(-2)$
   e. $(f \circ g)^{-1}(0)$
   f. $(g \circ f)^{-1}(\frac{1}{2})$
3. Jika $g(x) = x^2 + 2$ dan $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 6x + 3$, tentukan $f^{-1}(x)$ dan $f(x + 2)$.
4. Jika $f(x) = 5^x$ dan $g(x) = x^2 + 4$, tentukanlah $f^{-1}(g(x^2) - 4)$.
5. Jika $f(x) = 10^x$ dan $h(x) = x^2 + 3$, tentukanlah $f^{-1}(h(x^2) - 3)$.
6. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = 2x - 10$ dan $g(x) = x + n$. Jika $(f \circ g)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g)(x)$, berapakah n?
7. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = x + 6$ dan $g(x) = x^3 + 1$. Hitunglah
   a. $(f \circ g)^{-1}(a + 1)$;
   b. $(g^{-1} \circ f^{-1})(a + 1)$;
   c. $(f \circ g)^{-1}(8z^3 + 7)$;
   d. $(f^{-1} \circ g^{-1})(8z^3 + 1)$;

Tugas: Informasi lebih lanjut

• Kerjakan di buku tugas

Untuk menambah wawasan kalian, coba carilah beberapa contoh bentuk fungsi yang inversnya tidak berupa fungsi. Kalian boleh mencari dari berbagai sumber, seperti di internet, di buku referensi yang lain, atau kalian bisa membuatnya sendiri.

8. Diketahui $A = \{x|x \in R;\ x > 0\}$, f dan g adalah fungsi-fungsi pada A yang ditentukan oleh suatu fungsi $f(x) = \dfrac{2}{x}$ dan $g(x) = x - 2$. Tentukan
   a. $(f^2(x))^{-1}$
   b. $(g^2(x))^{-1}$
   c. $f^2(x) \circ g^2(x)$
   d. $(f^2(x) \circ g^2(x))^{-1}$
9. Diketahui suatu fungsi total harga suatu produk (dalam dolar) adalah $C(x) = x^2 + 2x$, dengan x adalah jumlah produk yang dihasilkan.
   a. Tentukan fungsi invers dari $C(x)$.
   b. Kapan total harga produk tersebut mencapai \$99?
10. Soal analog dengan nomor 9. Diketahui $C(x) = x^2 + 4x$.
   a. Tentukan fungsi invers dari $C(x)$.
   b. Kapan total harga produk tersebut mencapai \$32?

Rangkuman

1. Fungsi atau pemetaan adalah suatu relasi (hubungan) dari himpunan A ke himpunan B dengan memasangkan setiap $x \in A$ dengan tepat satu $y \in B$.
2. Fungsi mempunyai sifat surjektif (fungsi onto/pada), injektif (fungsi satu-satu) dan atau bijektif (fungsi satu-satu dan pada).
3. Operasi aljabar pada fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah sebagai berikut.
   a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
   c. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
   d. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, untuk $g(x) \neq 0$
4. Komposisi fungsi $g \circ f$ adalah suatu fungsi yang mengerjakan (memetakan) fungsi f terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan fungsi g.
5. Komposisi fungsi mempunyai sifat sebagai berikut.
   a. Pada umumnya tidak komutatif
   $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
   b. Asosiatif
   $((f \circ g) \circ h\ (x) = (f \circ (g \circ h))(x)$
   c. Terdapat fungsi identitas $I(x) = x$
6. Suatu fungsi $f : A \to B$ dinyatakan dengan himpunan pasangan berurutan $f = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$. Invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \to A$ yang dinyatakan dengan $f^{-1} = \{(y, x) \mid y \in A, x \in B\}$.
7. Suatu fungsi f memiliki fungsi invers f^{-1} jika dan hanya jika f merupakan fungsi injektif (satu-satu).
8. Pada fungsi komposisi f dan g, berlaku
   a. $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$;
   b. $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$.

Refleksi

Fungsi sebenarnya telah kalian kenal di kelas X. Pada bab ini, tentu kalian lebih memahami tentang fungsi. Dapatkah kalian memberikan beberapa contoh fungsi, terutama fungsi komposisi dan fungsi invers yang langsung berhubungan dengan kejadian sehari-hari? Berikan penjelasan, mengapa kejadian itu kalian anggap sebagai fungsi (fungsi komposisi dan/atau fungsi invers)?

Tes Kemampuan Bab III

• Kerjakan di buku tugas

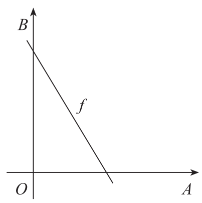
A. Pilihlah jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e.

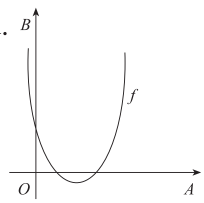
1. Domain fungsi $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$ adalah ....
   a. $\{x \mid x \in R\}$
   b. $\{x \mid x < 2 \text{ atau } x > 6\}$
   c. $\{x \mid x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6\}$
   d. $\{x \mid x \leq -6 \text{ atau } x \geq -2\}$
   e. $\{x \mid -2 \leq x < 6\}$

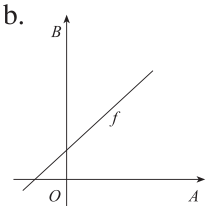
2. Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = x - 1$
   Nilai dari $f(f(f(g(g(g(1)))))) = ...$
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

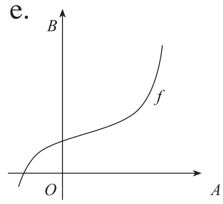
3. Fungsi $g: R \to R$ ditentukan oleh $g(x) = x^2 - x + 3$ dan fungsi $f: R \to R$ sehingga $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 3x + 4$. Rumus fungsi $f(x - 2) = ...$
   a. $2x - 11$
   b. $2x - 7$
   c. $3x + 1$
   d. $3x - 7$
   e. $3x - 11$

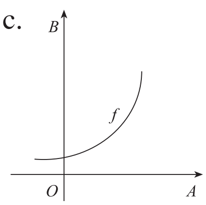
4. Di antara grafik fungsi berikut yang *bukan* merupakan fungsi jika diketahui $f : B \to A$ adalah ....

   a.


   d.


   b.


   e.


   c.


5. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ dengan $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x+1}$ maka $f\{g(x)\} = ...$
   a. -1
   b. 1
   c. x
   d. $-x$
   e. x^2

6. Diketahui fungsi $f(x) = 6x - 3$, $g(x) = 5^{x+4}$, dan $(f \circ g)(a) = 3.747$. Nilai a = ...
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2
7. Jika $f(x) = -x + 3$ maka $f(x^2) + \{f(x)\}^2 - 2\,f(x)$ = ...
   a. $2x^2 - 6x + 4$
   b. $2x^2 + 4x + 6$
   c. $2x^2 - 4x - 6$
   d. $6x + 4$
   e. $-4x + 6$
8. Fungsi $f: R \to R$ dan $g: R \to R$ dengan $f(x) = x - 3$ dan $g(x) = x^2 + 5$. Jika $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ maka x = ...
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5
9. Diketahui $f(x) = x^2 - 9$ dan $(f \circ g)(x) = x(x - 6)$. Salah satu rumus fungsi $g(x)$ = ...
   a. $x + 3$
   b. $x - 3$
   c. $3 - x^2$
   d. $3x + 1$
   e. x
10. Misalkan $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$, dan $h(x) = 1 - x$. Fungsi $(f \circ g \circ h)(x)$ = ...
    a. $4x^2 - 8x + 4$
    b. $4x^2 + 8x - 4$
    c. $2x^2 - 4x + 1$
    d. $x^2 - 2x + 1$
    e. $4 - 2x + x^2$
11. Apabila $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{2x-2}$ maka $g(x)$ = ...
    a. $x + \dfrac{1}{2}$
    b. $x - \dfrac{1}{2}$
    c. $2 - \dfrac{1}{x}$
    d. $1 - \dfrac{2}{x}$
    e. -1
12. Apabila $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x-2}\sqrt{x^2-4x+5}$ maka $g(x - 3)$ = ...
    a. $\dfrac{1}{x-5}$
    b. $\dfrac{1}{x+1}$
    c. $\dfrac{1}{x-1}$
    d. $\dfrac{1}{x-3}$
    e. $\dfrac{1}{x+3}$
13. Diketahui $f: R \to R$ dan $g: R \to R$. Jika $f(x) = 3 - 3x$ dan $g(x) = 2x$, rumus $(g \circ f)^{-1}(x)$ = ...
    a. $6 - 6x$
    b. $3 - 6x$
    c. $1 - \dfrac{1}{6}x$
    d. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}x$
    e. $1 - \dfrac{1}{3}x$
14. Fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$. Misalkan $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{x-k}$, maka nilai k supaya $f^{-1}(x)$ merupakan invers dari $f(x)$ adalah ....
    a. -2
    b. -1
    c. 0
    d. 1
    e. 2
15. Jika $f(x) = x - 2$, $g(x) = x^3$, dan $h(x) = 4x$, rumus fungsi untuk $((f \circ g) \circ h)^{-1}(x)$ = ...
    a. $64x^3 - 2$
    b. $2 - 64x^3$
    c. $\sqrt{\dfrac{x+2}{64}}$
    d. $\sqrt[3]{\dfrac{x+2}{64}}$
    e. $\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{64}}$
16. Jika $f(x) = -3 + 2x$ dan $g(x) = (3x + 1)^{-1}$ maka $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$ = ...
    a. $-\dfrac{3x+1}{2x+9}$
    b. $\dfrac{3x+1}{2x+9}$
    c. $-\dfrac{x+1}{3x+9}$
    d. $-\dfrac{3x-1}{3x+9}$
    e. $\dfrac{3x+1}{3x-9}$

17. Diketahui $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $x \neq 0$ dan f^{-1} adalah invers dari f. Jika k adalah banyaknya faktor prima dari 210 maka $f^{-1}(k) = ...$
    a. $\frac{1}{5}$
    b. $\frac{1}{4}$
    c. $\frac{1}{3}$
    d. 3
    e. 4
18. Fungsi f ditentukan oleh $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$. Jika f^{-1} adalah invers dari f maka $f^{-1}(1) = ...$
    a. 4
    b. 3
    c. –3
    d. –4
    e. –5
19. Diketahui $(f \circ g)(x) = 4^{2x+1}$. Jika $g(x) = 2x - 1$ maka $f(x) = ...$ (UN 2005)
    a. 4^{x+2}
    b. 4^{2x+3}
    c. $2^{4x+1} + \frac{1}{2}$
    d. $2^{2x+1} + \frac{1}{2}$
    e. $2^{2x+1} + 1$
20. Jika $f(x) = \sqrt{x+1}$ dan $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x+1}$ maka fungsi g adalah $g(x) = ...$ (UN 2004)
    a. $2x - 1$
    b. $2x - 3$
    c. $4x - 5$
    d. $4x + 3$
    e. $5x - 4$
21. Ditentukan $g(f(x)) = f(g(x))$. Jika $f(x) = 2x + p$ dan $g(x) = 3x + 120$ maka nilai $p = ...$ (UAN 2003)
    a. 30
    b. 60
    c. 90
    d. 120
    e. 150
22. Diketahui $f(x-1) = \frac{x-1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$ dan $f^{-1}(x)$ adalah invers dari $f(x)$.
    Rumus $f^{-1}(2x - 1) = ...$ (UAN 2002)
    a. $\frac{-x-2}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$
    b. $\frac{-2x+2}{4x-3}, x \neq \frac{3}{4}$
    c. $\frac{x-1}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$
    d. $\frac{-2x+1}{4x+3}, x \neq -\frac{3}{4}$
    e. $\frac{x+1}{2x-4}, x \neq 2$
23. Diketahui fungsi $f(x) = 6x - 3$, $g(x) = 5x + 4$, dan $(f \circ g)(a) = 81$. Nilai $a = ...$ (UAN 2001)
    a. – 2
    b. – 1
    c. 1
    d. 2
    e. 3
24. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x + 1) = -2x^2 - 4x - 1$.
    Nilai $g(-2) = ...$ (UAN 2000)
    a. – 5
    b. – 4
    c. – 1
    d. 1
    e. 5
25. Fungsi-fungsi f dan g didefinisikan oleh $f: x \to ax + b, a \in R$; a dan b konstan.
    $g: x \to \frac{5}{x-4}; x \neq 4$. Jika $(f \circ g)(6) = 6$ dan $g^{-1}(-1) = f(-1)$, nilai $a + b = ...$
    a. –3
    b. –2
    c. –1
    d. 1
    e. 3

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Tentukan fungsi invers dan domain invers dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x-1}$
   b. $f(x) = \log (x^2 - 6x)$
   c. $f(x) = 10^{2x-1}$
2. Misalkan diketahui $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2$, dan $h(x) = 1 - x$. Tentukan
   a. $(f \circ g)(x)$;
   b. $(f \circ h \circ g)(x)$;
   c. $(g \circ f \circ h)(x)$.
3. Diketahui f: $R \to R$. Di samping itu, juga diketahui bahwa g: $R \to R$ dengan rumus $g(x) = 3x + 2$. Jika $(g \circ f)(x) = 3x^2 - 18x + 8$, tentukan $f(x)$ dan $f(-2)$.
4. Diketahui suatu fungsi $f(t) = t^2 - ct, t > 0$ dan $c > 0$. Tentukan $f^{-1}(t)$. Apakah $f^{-1}(t)$ merupakan fungsi? Jelaskan.
5. Misalkan diketahui fungsi-fungsi $f(x) = (x-4)^2$, $g(x) = 2(x-4) + 1$, dan $h(x) = \dfrac{x+1}{x}$. Tentukan
   a. $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(1 - x)$;
   b. $(h \circ g \circ f)^{-1}(x - 1)$;
   c. $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(0)$;
   d. nilai p sehingga $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(p) = 0$
6. Misalkan diketahui $A = \{x|x \in R\}$, $B = \{0, 1\}$, dan $C = A - B$.

   Fungsi-fungsi f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, dan f_6 terdefinisi pada C dan dirumuskan sebagai berikut.

   $f_1(x) = x$ $\qquad f_4(x) = \dfrac{f_1(x)}{-f_3(x)}$

   $f_2(x) = \dfrac{1}{f_1(x)}$ $\qquad f_5(x) = \dfrac{1}{f_3(x)}$

   $f_3(x) = 1 - x$ $\qquad f_6(x) = \dfrac{1}{f_4(x)}$

   Lengkapi tabel berikut.

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1					f_6
f_2		f_1			f_3	
f_3			f_1	f_5		
f_4			f_6	f_1		
f_5		f_4			f_6	
f_6	f_6					f_5

   Dengan menggunakan tabel itu, tentukan suatu fungsi yang mewakili komposisi berikut.
   a. $f_3 \circ (f_4 \circ f_5)$
   b. $(f_2 \circ f_5) \circ f_6$
   c. $(f_6 \circ f_6 \circ f_6)$
   d. $f_1 \circ (f_2 \circ f_3)$

Kata Bijak

Kalau Anda tidak berbuat sesuatu dengan kehidupan Anda, percuma saja Anda berusia lama.

Bab IV

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat
1. menjelaskan arti limit fungsi di satu titik;
2. menghitung limit fungsi aljabar di satu titik;
3. menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit;
4. menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi;
5. menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar;
6. menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.

Sumber: *Dokumen Penerbit*

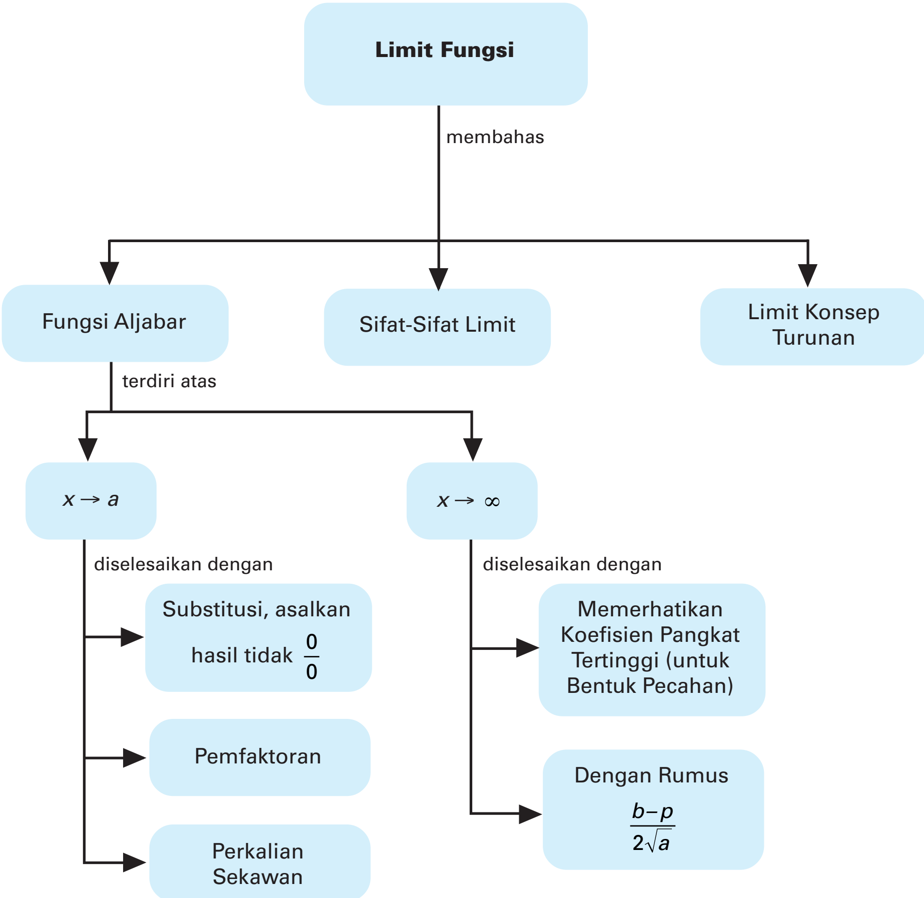
Limit Fungsi

Motivasi

Misalkan kalian ingin mengetahui kecepatan *motor cross* yang sedang melaju. Dapatkah kalian menentukan kecepatan tepat pada waktu ke-t? Tentu kesulitan, bukan? Mengapa demikian? Hal ini terjadi karena rentang waktu sangat kecil. Untuk memudahkan perhitungannya, dapat dilakukan dengan nilai pendekatan kecepatan rata-rata. Untuk menentukan kecepatan rata-rata dengan rentang waktu sangat kecil (mendekati nol), dapat digunakan konsep limit.

Limit fungsi merupakan salah satu bahasan utama yang akan digunakan dalam kalkulus, terutama turunan dan integral. Dalam fisika, limit banyak digunakan dalam penentuan kecepatan, percepatan, kemiringan (gradien) suatu garis atau bidang, dan perubahan-perubahan sesaat lainnya. Dalam bidang ekonomi, limit fungsi digunakan untuk penurunan fungsi biaya marjinal, fungsi-fungsi elastisitas (permintaan, penawaran, produksi), dan lain-lain.

Peta Konsep



Kata Kunci

- bentuk tak tentu
- berhingga
- gradien
- limit
- limit kanan
- limit kiri
- mendekati
- pemfaktoran
- sekawan
- substitusi
- tak berhingga
- teorema limit pusat

Tentunya materi limit fungsi masih asing bagi kalian. Di SMP, kalian belum pernah mempelajarinya. Pada pembahasan kali ini, kalian diajak untuk mempelajari limit fungsi. Dalam menentukan nilai limit fungsi, kalian akan sering menggunakan substitusi dan pemfaktoran. Kedua cara ini telah kalian pelajari di kelas X.

Sebelum kalian mempelajari bab ini lebih lanjut, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut ini.

Prasyarat

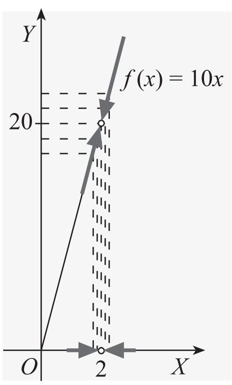
Kerjakan di buku tugas

1. Misalkan diberikan fungsi $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Apakah sama artinya $f(3)$ dan $f(2{,}999....)$?
2. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 4$ dan $g(x) = \begin{cases} 2x - 1; x \le 0 \\ x; x > 0 \end{cases}$
   a. Tentukan nilai fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ untuk $x = -1; -0{,}5; -0{,}05; -0{,}001; -0{,}0001$.
   b. Tentukan nilai fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ untuk $x = 5; 1; 0{,}5; 0{,}05; 0{,}001; 0{,}0001$.
   c. Untuk x yang makin mendekati nol dari hasil a, menuju nilai berapakah $f(x)$ dan $g(x)$?
   d. Untuk x yang makin mendekati nol dari hasil b, menuju nilai berapakah $f(x)$ dan $g(x)$?

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari kita lanjutkan mempelajari materi berikut.

A. Definisi Limit Fungsi Aljabar

Materi limit baru kalian pelajari pada kali ini. Sebelumnya, kalian belum pernah mempelajari tentang limit. Untuk itu, kalian harus memahami pengertian limit terlebih dahulu.



Gambar 4.1

Kata limit berasal dari bahasa Inggris, berarti mendekati. Sesuai dengan kata mendekati, jika dikatakan bahwa x mendekati 2, artinya nilai x itu *hanya* mendekati nilai 2, tetapi *tidak pernah* bernilai 2. Untuk mempermudah perhitungan, kata "mendekati" dinyatakan dengan simbol "$\to$".

Pemahaman limit secara intuitif dapat kalian pahami melalui uraian berikut.

Misalkan $f(x) = 10x$, dengan x bilangan-bilangan real. Untuk $x \to 2$, artinya nilai $x \neq 2$, tetapi dapat diambil nilai-nilai di sekitar 2. Misalnya, 1,91; 1,95; 1,99; 2,01; 2,05; dan 2,09. Adapun nilainya dapat ditampilkan pada tabel berikut.

x	1,91	1,95	1,99	2,01	2,05	2,09
$f(x)$	19,1	19,5	19,9	20,1	20,5	20,9

Dari tabel di atas tampak bahwa untuk $x \to 2$, nilai $10x \to 20$. Secara geometris dapat ditampilkan seperti **Gambar 4.1**.

Dengan demikian, secara intuitif, limit fungsi dapat diartikan sebagai berikut.

Misalkan f suatu fungsi dalam variabel x dan L adalah bilangan real.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

diartikan untuk x mendekati a (ingat: $x \neq a$), nilai $f(x)$ mendekati L.

Secara formal, limit fungsi didefinisikan sebagai berikut.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ diartikan untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ seberapa pun kecilnya, terdapat sebuah bilangan $\delta > 0$ sedemikian rupa sehingga jika $0 < |x - a| < \delta$, berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Definisi ini adalah definisi limit secara umum. Definisi limit secara umum akan kalian perdalam pada jenjang pendidikan yang lebih tinggi. Di SMA, kalian hanya diajak untuk mempelajari definisi limit secara intuitif.

Suatu fungsi dikatakan mempunyai limit di titik a jika limit dari kiri dan limit dari kanan bernilai sama. *Limit dari kiri* maksudnya adalah nilai pendekatan $f(x)$ untuk x bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang membesar (melalui nilai-nilai $x < a$). *Limit dari kanan* maksudnya adalah nilai pendekatan $f(x)$ untuk x bergerak mendekati limitnya melalui nilai-nilai yang mengecil (melalui nilai-nilai $x > a$). Untuk mempermudah penulisan, x yang mendekati a dari kiri ditulis $x \to a^-$ dan x mendekati a dari kanan, ditulis $x \to a^+$.
Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ maka

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = L.$$

Artinya, nilai limit $f(x)$ untuk x mendekati a ada, yaitu L.

Contoh:

Apakah nilai limit fungsi berikut ada?

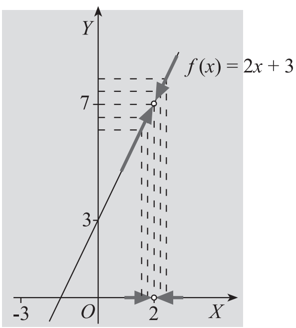
a. $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 3)$

b. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$, untuk $f(x) = \begin{cases} x; & x < 5 \\ 5 - x; & x \geq 5 \end{cases}$

Jawab:

a. Misalkan $x \to 2^-$ (nilai-nilai $x < 2$)

x	1,90	1,95	1,96	1,99	1,995	1,999
$f(x)$	6,80	6,90	6,92	6,98	6,99	6,998



Gambar 4.2

Tampak bahwa untuk $x \to 2^-$, nilai $f(x)$ makin mendekati 7.

Artinya, $\lim\limits_{x \to 2^-} (2x + 3) = 7$.

Misalkan $x \to 2^+$ (nilai-nilai $x > 2$)

x	2,10	2,09	2,05	2,01	2,001
$f(x)$	7,20	7,18	7,10	7,02	7,002

Tampak bahwa untuk $x \to 2^+$, nilai $f(x)$ makin mendekati 7.

Artinya, $\lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 3) = 7$.

Karena $\lim\limits_{x \to 2^-} (2x + 3) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x + 3) = 7$ maka $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 3) = 7$.

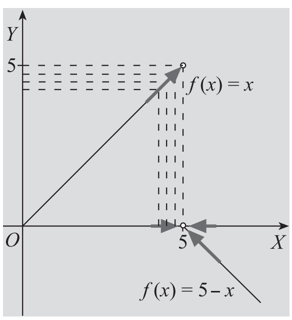
b. Misalkan $x \to 5^-$.

Artinya, $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 5^-} x = 5$.

Misalkan $x \to 5^+$.

Artinya, $\lim\limits_{x \to 5^+} (5 - x) = 5 - 5 = 0$.

Karena $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$ maka $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ tidak ada.



Gambar 4.3

Soal Kompetensi 1

• Kerjakan di buku tugas

Di antara fungsi-fungsi berikut, manakah yang mempunyai limit di titik yang diberikan? Jika ada, tentukan nilai limitnya.

1. $f(x) = 3x$; $x \to 2$
2. $f(x) = 5x - 1$; $x \to 3$
3. $f(x) = x^2 - 1$; $x \to 1$
4. $f(x)) = 7$; $x \to 5$

5. $f(x) = 1 - x^2 - x^3$; $x \to 0$

6. $f(x) = \begin{cases} 1; x < 1 \\ 5; x \geq 1 \end{cases}$; $x \to 1$

7. $f(x) = \begin{cases} 2x - 1; x < 2 \\ 3x^2; x \geq 2 \end{cases}$; $x \to 2$

8. $f(x) = \begin{cases} 10x - 1; x < 1 \\ 9x; x \geq 1 \end{cases}$; $x \to 1$

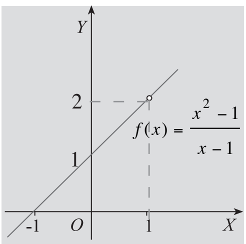
9. Tentukan limit fungsi di bawah ini untuk x mendekati nilai yang diberikan

$$g(x) = \begin{cases} x^2,\ x \leq 0 \\ x,\ 0 < x < 1 \\ 1 + x^2,\ x \geq 1 \end{cases} \quad ; x \to 1$$

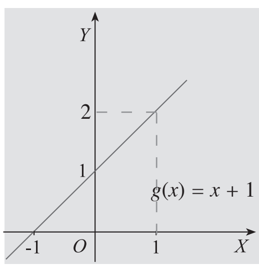
10. Tentukan limit fungsi di bawah ini untuk x mendekati nilai yang diberikan

$$g(x) = \begin{cases} x^2,\ x \leq 0 \\ x - 1,\ 1 < x < 2 \\ 5 + x^2,\ x \geq 2 \end{cases} \quad ; x \to 1$$

B. Menentukan Nilai Limit Fungsi Aljabar



(a)



(b)

Gambar 4.4

Kalian telah mengetahui bahwa nilai limit tidak harus sama dengan nilai fungsinya. Ada suatu fungsi yang mempunyai nilai limit di suatu titik, tetapi tidak mempunyai nilai fungsi di titik itu. Perhatikan fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$. Fungsi ini tidak mempunyai nilai di $x = 1$ (mengapa?). Namun, meskipun fungsi ini tidak mempunyai nilai di $x = 1$, kita tidak boleh menyatakan bahwa fungsi ini tidak memiliki nilai limit untuk x mendekati 1. Misalkan $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ dan $g(x) = x + 1$. Fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, tidak terdefinisi di $x = 1$. Dengan demikian, kita tidak memerhatikan nilai $x = 1$. Sekarang, bandingkan nilai limit fungsi $g(x) = x + 1$. Keduanya dapat kalian perhatikan pada grafik-grafik di samping.

Dari grafik $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ tampak bahwa faktor $(x - 1) \neq 0$, artinya $x \neq 1$. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Faktor $x - 1$ dapat dieliminir (dihilangkan) karena $x - 1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1} g(x) &= \lim_{x \to 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Dengan demikian, $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x)$.

Secara intuitif, kalian dapat menduga nilai $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Dengan menggunakan kalkulator, hitunglah nilai $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ untuk x seperti yang ada dalam tabel di bawah ini.

x	–1	0	0,5	0,9	0,99	1,05	1,15	1,5	2
$f(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Apabila nilai $f(x)$ pada tabel di atas sudah dicari, kalian dapat melihat bahwa untuk x mendekati 1 (dari kanan maupun dari kiri) nilai $f(x)$ mendekati 2.

Hal yang sama juga dapat dilakukan untuk mencari nilai limit $g(x) = x + 1$ untuk x mendekati 1. Lakukan langkah di atas untuk nilai x yang sama (0,9; 0,99; ...; sampai mendekati 1).

Hasil perhitungan menunjukkan bahwa makin dekat nilai x dengan 1 maka nilai $g(x)$ makin mendekati 2.

Jadi, kita dapat memahami bahwa meskipun kedua fungsi itu berbeda, namun memiliki nilai limit yang sama. Limit fungsi seperti ini lebih mudah diselesaikan dengan cara memfaktorkan. Untuk itu, mari kita pelajari beberapa cara menentukan nilai limit fungsi aljabar.

1. Menentukan Nilai Limit Fungsi untuk $x \to a$

Misalkan $f(x)$ memiliki nilai limit untuk $x \to a$, nilai limitnya dapat ditentukan dengan cara

a. substitusi;

b. pemfaktoran;

c. mengalikan dengan faktor sekawannya.

Agar lebih jelas, perhatikan uraian berikut.

a. Menentukan Nilai Limit Fungsi dengan Substitusi

Misalkan fungsi f terdefinisi di setiap x bilangan real, nilai limit fungsinya sama dengan nilai fungsinya. Untuk memperoleh nilai limitnya, kalian dapat menyubstitusikan secara langsung ke dalam fungsi tersebut.

Contoh 1:

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 7)$ b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x + 1}$

Jawab:

a. Fungsi $f(x) = 2x - 7$ terdefinisi di setiap nilai x.

$$\lim_{x \to 2} (2x - 7) = 2(2) - 7 = -3$$

b. Fungsi $f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ terdefinisi di setiap nilai x, kecuali di $x = -2$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x - 1}{x + 2} = \frac{3(1) - 1}{1 + 2} = \frac{2}{3}$$

Contoh 2:

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{3x^2 + 1}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - 6}{x}$

Jawab:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{3x^2 + 1} = \frac{0}{3(0)^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{1^2 + 1}{1 - 1} = \frac{2}{0} = \infty$ (bilangan positif yang tak berhingga besarnya)

c. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - 6}{x} = \frac{0 - 6}{0} = \frac{-6}{0} = -\infty$ (negatif dari bilangan yang tak berhingga besarnya)

Tugas: Berpikir Kritis

• Kerjakan di buku tugas

Apakah makna $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2}{x}$ sama dengan $f(x) = \frac{2}{x}$, untuk $x = 0$?
Jelaskan.

Mari Berdiskusi

Inkuiri

Coba jelaskan dengan bahasamu sendiri, apakah limit fungsi itu? Misalkan tertulis $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4)$. Dapatkah dikatakan bahwa $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 - 4) = f(2)$, untuk $f(x) = x^2 - 4$? Jelaskan alasanmu. Bagaimana cara menentukan nilai limit suatu fungsi yang tidak dapat ditentukan dengan pemfaktoran maupun substitusi? Berikan contohnya.

b. Menentukan Nilai Limit Fungsi dengan Pemfaktoran

Kalian telah mengerti cara menentukan nilai limit dengan substitusi. Bagaimana jika hasil substitusi itu $\frac{0}{0}$? Jika limit suatu fungsi dikerjakan dengan cara substitusi menghasilkan nilai $\frac{0}{0}$, berarti kita harus menggunakan cara lain, misalnya pemfaktoran.

Misalkan limit fungsi $\frac{f(x)}{g(x)}$ didekati $x \to a$ menghasilkan $\frac{0}{0}$ sehingga fungsi $g(x)$ dan $f(x)$ pasti mempunyai faktor $(x - a)$. Oleh karena itu, kalian harus menghilangkan faktor-faktor yang sama dari $f(x)$ dan $g(x)$ terlebih dahulu.

Misalkan fungsi $f(x) = \frac{(x-a)g(x)}{(x-a)h(x)}$. Dengan demikian,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)g(x)}{(x-a)\,h(x)} = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}.$$

Jika ternyata $\frac{g(a)}{h(a)} = \frac{0}{0}$ maka cari faktor-faktor $g(x)$ dan $h(x)$ sama. Kerjakan dengan cara serupa.

Untuk mempermudah perhitungan dengan cara pemfaktoran, kalian ingat kembali bentuk faktorisasi aljabar berikut.

1) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
2) $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$
3) $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$
4) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$
5) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

b. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 3}$

c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$

Jawab:

a. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(x-4)(x+4)}{x-4}$

$= \lim\limits_{x \to 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$

b. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-4)(x-3)}{(x-1)(x-3)}$, karena $(x-3) \neq 0$ maka kita dapat membagi dengan $(x - 3)$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 4}{x - 1}$

$= \dfrac{3-4}{3-1} = \dfrac{-1}{2}$

c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3^3}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3}$

$= \lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 3x + 9)$

$= 3^2 + 3(3) + 9 = 27$

c. Menentukan Nilai Limit Fungsi dengan Mengalikan Faktor Sekawan

Kalian tentu masih ingat dengan faktor sekawan. Materi faktor sekawan telah kalian pelajari di kelas X. Pada pembahasan limit fungsi, kita akan menggunakannya untuk menentukan nilai limit fungsi aljabar. Limit fungsi yang akan kita tentukan nilainya dengan mengalikan faktor sekawan, biasanya mengandung tanda akar. Oleh karena itu, pengalian dengan faktor sekawan dimaksudkan untuk menghilangkan tanda akar sehingga perhitungan lebih mudah dan sederhana. Beberapa bentuk faktor sekawan yang sering dipakai dalam menentukan limit fungsi di antaranya adalah sebagai berikut.

1) $(x - a)$ faktor sekawan dari $(x + a)$ dan sebaliknya.
2) $\sqrt{x} - a$ faktor sekawan dari $\sqrt{x} + a$ dan sebaliknya.
3) $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ faktor sekawan dari $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ dan sebaliknya.
4) $\sqrt{f(x)} - a$ faktor sekawan dari $\sqrt{f(x)} + a$ dan sebaliknya.

Selain akar pangkat dua atau akar kuadrat, ada pula bentuk akar pangkat tiga dari suatu fungsi seperti $\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$ dan $\frac{x-8}{\sqrt[3]{x} - 2}$. Kalian tentu masih ingat bahwa $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$.

Bentuk ini dapat kalian gunakan untuk menentukan nilai limit suatu fungsi yang mempunyai bentuk akar pangkat tiga.

Contoh:

Tentukan limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1}$

b. $\lim\limits_{x \to 27} \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}$

Jawab:

a.
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1}}{x-1} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2x-1})^2}{(x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1})}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x - (2x-1)}{(x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1})}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x} + \sqrt{2x-1})}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{\sqrt{x} + \sqrt{2x-1}}$$
$$= \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

$\lim\limits_{x \to 1} \frac{\sqrt{2-x} - x}{x^2 - x} = ...$

a. $-1\frac{1}{2}$
b. -1
c. 0
d. 1
e. $1\frac{1}{2}$

SPMB 2007

b. $\lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$ $= \lim\limits_{x\to 27} \dfrac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3} \times \dfrac{(\sqrt[3]{x})^2+3\sqrt[3]{x}+9}{(\sqrt[3]{x})^2+3\sqrt[3]{x}+9}$

$= \lim\limits_{x\to 27} \dfrac{(x-27)((\sqrt[3]{x})^2+3\sqrt[3]{x}+9)}{x-27}$

$= \lim\limits_{x\to 27} (\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+9)$

$= \sqrt[3]{27^2}+3\sqrt[3]{27}+9$

$= 9 + 3(3) + 9 = 27$

Soal Kompetensi 2

• Kerjakan di buku tugas

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

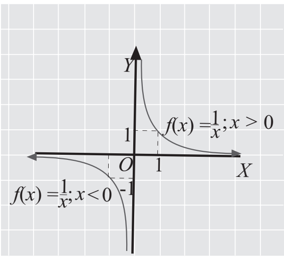
1. $\lim\limits_{x\to 2} (2x^2 - 3x + 1)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+1}{3x^2-2x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x^2-x-12}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-x-3}{3x^2+8x+5}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+10x}{x^3+2x}$
7. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2-6t}{t^2+3t}$
8. $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2-3t+2}{t-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x^2+x-3}{x^2-2x-3}$
10. $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2(x^2-4)}{x-2} + \dfrac{x^2-2x)}{2(x-2)}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$
12. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h}$
13. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$
14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$
15. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$

2. Menentukan Limit Fungsi di Titik Tak Berhingga (Pengayaan)

Sebelum mempelajari limit fungsi di titik tak berhingga, perlu kalian ketahui bahwa lambang "∞" bukanlah notasi suatu bilangan. Namun, lambang itu hanya menyatakan suatu bilangan yang sangat besar.

Sekarang perhatikan bilangan-bilangan berikut.

$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1.000}$	...	$\frac{1}{100.000}$	$\frac{1}{1.000.000}$	...
0,1	0,01	0,001	...	0,00001	0,000001	0,00...1



Gambar 4.5

Tampak bahwa makin besar pembaginya, nilai $\frac{1}{x}$ menjadi makin kecil mendekati nol. Hal ini ditulis untuk $x \to \infty$, nilai $\frac{1}{x} \to 0$. Perhatikan gambar di samping. Kita dapat melihat bahwa makin besar nilai x, grafik makin mendekati sumbu X, yang berarti $\frac{1}{x}$ makin mendekati nol.

Dengan demikian, mudah bagi kalian untuk mengatakan $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$.

Pada pembahasan kali ini, kita akan mempelajari bentuk limit yang apabila dikerjakan dengan substitusi, diperoleh $\frac{\infty}{\infty}$, yaitu nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Seperti yang telah kalian ketahui bahwa $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Limit fungsi berbentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan $f(x)$ dan $g(x)$ fungsi pangkat dikerjakan atas dasar $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$. Misalkan pangkat tertinggi dari variabel adalah $f(x)$ dan $g(x)$ adalah m maka variabel berpangkat tertinggi adalah x^m. Nilai limitnya dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{\left(\frac{1}{x^m}\right)}{\left(\frac{1}{x^m}\right)}$$

Contoh 1:

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + x}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - x}{3x^2 + 1}$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + x}{4x^3 + 1}$

Jawab:

a. $$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 2x^2 + 1}{2x^2 + x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{2x^3 + x} \times \frac{\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{3 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{3}{2}$$

b. $$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x}{3x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - x}{3x^2 + 1} \times \frac{\left(\frac{1}{x^3}\right)}{\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{\infty}}{\frac{3}{\infty} + \frac{1}{\infty}}$$

$$= \frac{2 - 0}{0 + 0} = \infty$$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^2}{2x-1} - \dfrac{x^2}{2x+1} \right) = ...$

a. 2

b. 1

c. $\frac{1}{2}$

d. $\frac{1}{4}$

e. 0

UM-UGM 2006

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + x}{4x^3 + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + x}{4x^3 + 1} \times \dfrac{\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}{\left(\dfrac{1}{x^3}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^2}}{4 + \dfrac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{\dfrac{2}{\infty} + \dfrac{1}{\infty}}{4 + \dfrac{1}{\infty}} = \frac{0+0}{4+0} = 0$$

Limit bentuk $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ untuk $x \to \infty$ dapat dikerjakan dengan cepat.

Misalkan $f(x)$ mempunyai pangkat tertinggi m dan $g(x)$ mempunyai pangkat tertinggi n. Dalam pembahasan limit, tentu kalian masih ingat nilai limit berikut.

1. Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a, a \in R$ maka $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.
2. Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a > 0$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ maka $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.
3. Jika $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a < 0$ dan $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ maka $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Dengan demikian, kita dapat menentukan nilai limit berikut. Untuk $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + a_0$ dan $g(x) = px^n + qx^{n-1} + \ldots + b_0$, berlaku

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{p} \text{ jika } m = n$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty \text{ jika } m > n \text{ dan } a > 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty \text{ jika } m > n \text{ dan } a < 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \text{ jika } m < n$$

Contoh 2:

Tentukan limit fungsi berikut.

a. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$

b. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 7}{x^2 + 1}$

c. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{-5x^5 + 2}{x^2 - 1}$

d. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 - 7}{3x^7 + 1}$

Jawab:

a. Misalkan $f(x) = x^2 - 2x + 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Tampak bahwa pangkat tertinggi kedua fungsi sama, yaitu 2. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\text{sebab } \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty}}{1 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{1} = 1.$$

b. Misalkan $f(x) = 2x^3 - 7$ dan $g(x) = x^2 + 1$. Pangkat tertinggi $f(x)$ adalah 3, pangkat tertinggi $g(x)$ adalah 2, dan koefisien dari x^3 adalah $2 > 0$.
Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 7}{x^2 + 1} = \infty$$

$$\text{sebab } \lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 7}{x^2 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{7}{\infty}}{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = \frac{2}{0} = \infty.$$

c. Misalkan $f(x) = -5x^5 + 2$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Pangkat tertinggi $f(x)$ adalah 5, pangkat tertinggi $g(x)$ adalah 2, dan koefisien x^5 adalah $-5 < 0$. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-5x^5 + 2}{x^2 - 1} = -\infty$$

$$\text{sebab } \lim_{x \to \infty} \frac{-5x^5 + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5 + \frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{-5}{0} = -\infty.$$

d. Misalkan $f(x) = 6x^2 - 7$ dan $g(x) = 3x^7 + 1$. Pangkat tertinggi $f(x)$ adalah 2, pangkat tertinggi $g(x)$ adalah 7. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2 - 7}{3x^7 + 1} = 0 \text{ sebab } \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{6}{\infty} - \frac{7}{\infty}}{3 + \frac{1}{\infty}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{(5 + 4x)(x - 5)(1 - 3x)}{(3 - 2x)(x^2 - 3x + 7)}$

= ....

a. 2
b. 4
c. 6
d. 8
e. 12

UM-UGM 2006

3. Limit Tak Berhingga dalam Bentuk Akar

Perhatikan bentuk limit berikut.

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+px+q}$$

Dengan menggunakan perkalian sekawan, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+px+q} \times \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(ax^2+bx+c)-(ax^2+px+q)}{\sqrt{ax^2+bx+c}+\sqrt{ax^2+px+q}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(b-p)x+(c-q)}{x\left(\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{b-p+(\frac{c-q}{x})}{\sqrt{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}}+\sqrt{a+\frac{p}{x}+\frac{q}{x^2}}}$$

$$= \frac{b-p}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$$

Dari uraian di atas, diperoleh rumus

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{ax^2+px+q} = \frac{b-p}{2\sqrt{a}}$$

Kalian harus ingat, koefisien x^2 pada kedua tanda akar harus sama.

Tantangan

Inovatif

• Kerjakan di buku tugas

Kalian tentu dapat menyelesaikan limit bentuk $\lim_{x\to\infty} U(x)-V(x)$, dengan $U(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ dan $V(x)=\sqrt{ax^2+px+q}$. Bagaimana cara menentukan limit fungsi $\lim_{x\to\infty} \frac{U(x)-V(x)}{x-c}$ jika $U(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ dan $V(x)=\sqrt{ax^2+px+q}$, dengan $a \neq r$?

Contoh:

Tentukan $\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2-2x+3} - \sqrt{3x^2+x-5}$.

Jawab:

Dari soal diketahui $a = 3$, $b = –2$, dan $p = 1$.

Dengan menggunakan rumus di atas, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2-2x+3} - \sqrt{3x^2+x-5} = \frac{-2-1}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{3}\sqrt{3}$$

Problem Solving

Tentukan $\lim\limits_{x \to \infty} (x-2) - \sqrt{x^2 - 5x + 2}$.

Jawab:

$$\lim_{x \to \infty} (x-2) - \sqrt{3x^2 - 5x + 2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{(x-2)^2} - \sqrt{x^2 - 5x + 2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 5x + 2}$$

Dari bentuk terakhir, diperoleh $a = 1$, $b = –4$, dan $p = –5$.
Dengan menggunakan rumus, diperoleh

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 5x + 2} = \frac{-4-(-5)}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

Soal Kompetensi 3

• Kerjakan di buku tugas

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 7x + 1}{2x^2 + 7x - 1}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^3 - 2x + 1}{3x^3 - x - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7x^2 - 6x + 2}{x}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 4x^2}{2x^4 + 1}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x - x^7}{x^8 + 2x}$
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-3)(2x+4)}{3x^2 - 2}$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 25}}{3x^2 - 2}$
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{5x - 1}}{\sqrt{5x + 1}}$
9. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}}$
10. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x + 5}{3x - 1}\right)^2$
11. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 6x + 5} - \sqrt{x^2 + x - 1}$
12. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{2x^2 - 4x + 1} - \sqrt{2x^2 + 2x - 1}$
13. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2 - 2} - \sqrt{x^2 - 3x + 5}$
14. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2 + 5x + 1}$
15. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{8x^2 - x + 1} - x$
16. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{9x^2 - 2} - 3x - 1$
17. $\lim\limits_{x \to \infty} (3x-2) - \sqrt{9x^2 - 2x + 1}$
18. $\lim\limits_{x \to \infty} (4x-1) - \sqrt{(4x+1)^2 + 1}$
19. $\lim\limits_{x \to \infty} (1+3x) - \sqrt{x^2 + (2\sqrt{2}x+1)^2}$
20. $\lim\limits_{x \to \infty} (5\sqrt{2} - \sqrt{2}x) - \sqrt{2x^2 + 8x - 1}$

C. Sifat-Sifat Limit dan Penggunaannya

Kalian telah mempelajari bentuk limit fungsi aljabar. Jika kalian telah memahami limit-limit fungsi tersebut dengan baik, kalian dapat menarik kesimpulan bahwa dalam perhitungan limit berlaku aturan-aturan (sifat-sifat tertentu), baik penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan perpangkatan. Untuk memahami sifat-sifat itu, lakukan Aktivitas berikut.

Aktivitas

Tujuan : Menyelidiki sifat-sifat limit

Permasalahan : Sifat-sifat apakah yang berlaku pada limit fungsi?

Kegiatan : Kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Berapakah nilai $\lim\limits_{x \to 2} 6$? Berapa pula nilai $\lim\limits_{x \to 2} 9$?
2. Berapakah nilai $\lim\limits_{x \to 2}$?
3. Samakah nilai $\lim\limits_{x \to 1} 4x$ dengan $4 \lim\limits_{x \to 1} x$?
4. Samakah nilai $\lim\limits_{x \to 2} (2x + x^2)$ dengan $\lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} x^2$?
5. Samakah nilai $\lim\limits_{x \to 3} (x + 1)(x + 2)$ dengan $\lim\limits_{x \to 3} (x + 1) \, . \lim\limits_{x \to 3} (x + 2)$?
6. Samakah nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x + 3}{x + 1}$ dengan $\dfrac{\lim\limits_{x \to 2} (2x + 3)}{\lim\limits_{x \to 2} (x + 1)}$?
7. Samakah nilai $\lim\limits_{x \to 2} x^4$ dengan $\left(\lim\limits_{x \to 2} x\right)^4$?
8. Samakah nilai $\lim\limits_{x \to 2} (2x - 1)^n$ dengan $\left(\lim\limits_{x \to 2} (2x - 1)\right)^n$? Bagaimana jika n rasional?

Kesimpulan : Berdasarkan jawaban dari kegiatan nomor 1–8, coba simpulkan sifat-sifat limit yang dapat kalian peroleh.

Dari Aktivitas di atas, kalian akan dapat menyimpulkan sifat-sifat berikut.

Misalkan n bilangan bulat positif, f dan g fungsi-fungsi yang mempunyai limit di titik a, dan c suatu konstanta, berlaku sebagai berikut.

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$
2. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$
3. $\lim\limits_{x \to a} c\, f(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$
7. $\lim\limits_{x \to a} f(x)^n = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^n$
8. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Sifat-sifat di atas biasa disebut teorema limit pusat (*Central limit theorem*).

Agar kalian lebih paham dalam penggunaannya, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai-nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 6x + 7)$

b. $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 7)\sqrt[5]{3x - 1}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x + 7}{x + 1}\right)^3$

Jawab:

a. $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 - 6x + 7) = \lim\limits_{x \to 1} x^2 - \lim\limits_{x \to 1} 6x + \lim\limits_{x \to 1} 7$

$= 1^2 - 6 \lim\limits_{x \to 1} x + 7 = 1 - 6(1) + 7 = 2$

Kuis

• Kerjakan di buku tugas

Jika $U(x) = \sqrt{2x^2 + 5x - 7}$

dan $V(x) = \sqrt{3x^2 + 8x - 25}$

maka nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{U(x) - V(x)}{x - 3}$

= ....

a. $-\dfrac{7}{52}\sqrt{26}$

b. $-\dfrac{8}{52}\sqrt{26}$

c. $-\dfrac{9}{52}\sqrt{26}$

d. $\dfrac{-10}{52}\sqrt{26}$

e. $\dfrac{-11}{52}\sqrt{26}$

UM-UGM 2005

b. $\lim\limits_{x \to 0} (2x + 7)\sqrt[5]{3x - 1} = \lim\limits_{x \to 0} (2x + 7) \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[5]{3x - 1}$

$= [\lim\limits_{x \to 0} 2x + \lim\limits_{x \to 0} 7] \cdot \lim\limits_{x \to 0} \sqrt[5]{3x - 1}$

$= [2(0) + 7] \times (\sqrt[5]{3(0) - 1})$

$= 7\sqrt[5]{-1}$

$= -7$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{2x + 7}{x + 1}\right)^3 = \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x + 7}{x + 1}\right)^3$

$= \left(\dfrac{\lim\limits_{x \to 0} (2x + 7)}{\lim\limits_{x \to 0} (x + 1)}\right)^3$

$= \left(\dfrac{2(0) + 7}{0 + 1}\right)^3$

$= \left(\dfrac{7}{1}\right)^3 = 343$

Soal Kompetensi 4

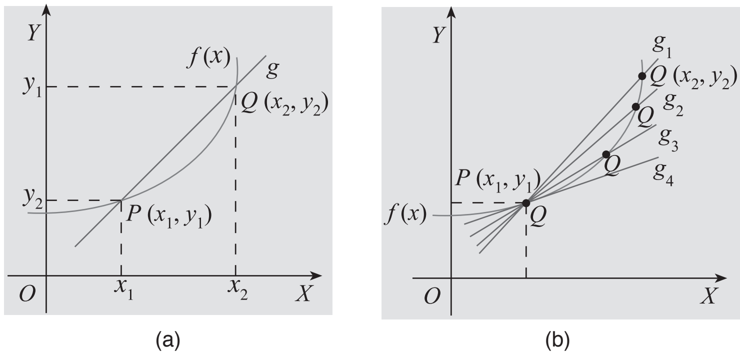
• Kerjakan di buku tugas

Dengan menggunakan sifat-sifat limit, tentukan nilai limit fungsi berikut.

1. $\lim\limits_{x \to 1} (3 - 2x + x^2)$
2. $\lim\limits_{x \to 2} (3x^2 - 2x + 1)$
3. $\lim\limits_{x \to 2} (\sqrt{2x - 1} + 3)$
4. $\lim\limits_{x \to 1} (x - 1)^{10}$
5. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2 + x}$
7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2(x - 1)}{\sqrt{x} - 1}$
8. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(1 - x^2)}{2x^2 - 2}$
9. $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, dengan $f(x) = \begin{cases} 2x;\ x < 1 \\ 4x - 1;\ x \geq 1 \end{cases}$
10. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{f(x)}$, dengan $f(x) = \begin{cases} 4x + 1;\ x < 2 \\ 2x + 5;\ x \geq 2 \end{cases}$

D. Limit Fungsi yang Mengarah ke Konsep Turunan

Limit merupakan konsep utama dalam kalkulus turunan (diferensial) maupun integral (invers turunan). Sebelum mempelajari turunan, kalian harus memahami bentuk limit yang mengarah pada materi-materi itu. Untuk dapat memahaminya, perhatikan gambar berikut.



Gambar 4.6

Misalkan titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ digambarkan pada **Gambar 4.6** (a). Garis g berpotongan dengan fungsi $f(x)$ di titik P dan Q. Jika gradien garis g adalah m, nilai m adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Pada **Gambar 4.6** (a) tampak bahwa $y_2 = f(x_2)$ dan $y_1 = f(x_1)$. Oleh karena itu,

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Jika $\Delta x = x_2 - x_1$ dan $\Delta y = y_2 - y_1$ (Δ dibaca: *delta*), persamaan gradien menjadi

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Sekarang perhatikan **Gambar 4.6** (b). Jika titik P sebagai titik tetap dan titik potong Q bergerak mendekati titik P maka $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ (dibaca: *delta x mendekati nol*). Artinya, garis g berubah menjadi garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P sehingga nilai m menjadi berikut.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Bentuk limit semacam ini akan dikembangkan ke arah konsep turunan (diferensial). Materi ini akan kalian pelajari pada bab selanjutnya.
Secara umum, gradien (kemiringan suatu garis) menyinggung kurva $f(x)$ dapat ditentukan dengan limit berikut.

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Δx biasanya juga dituliskan dengan h.
Agar kalian lebih mahir dalam penggunaannya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan limit fungsi $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ jika

a. $f(x) = 4x - 3$;
b. $f(x) = 4x^2$.

Jawab:

a. $$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(4(x+h) - 3) - (4x - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x + 4h - 3 - 4x + 3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4h}{h} \\ &= \lim_{x \to 0} 4 = 4 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{4(x+h)^2 - 4x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{4x^2 + 8xh + 4h^2 - 4x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (8x + 4h) \\ &= 8x \end{aligned}$$

Problem Solving

Tentukan gradien garis singgung kurva $y = 1 - x^2$ di titik $A(1, 0)$ dan di titik $B(-1, 0)$.

Jawab:

Untuk menentukan gradien garis singgung kurva $y = 1 - x^2$ di titik A dan B, dapat kalian lakukan dengan menentukan nilai m.

Nilai m ditentukan dengan $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk $f(x) = 1 - x^2$.

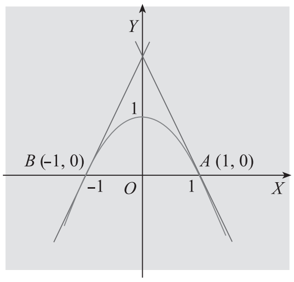
Dengan demikian, diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1-(x+h)^2) - (1-x^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (-2x - h) \\ &= -2x\end{aligned}$$

Jadi, $m = -2x$. Untuk $A(1, 0)$ maka $m = -2(1) = -2$.

Untuk $B(-1, 0)$ maka $m = -2\ (-1) = 2$.

Secara geometris, hal ini dapat digambarkan seperti gambar di samping.



Gambar 4.7

Soal Kompetensi 5

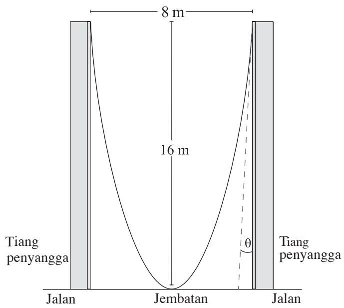
• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan fungsi $m(x)$ jika $m(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk fungsi-fungsi f berikut.
   a. $f(x) = 5$
   b. $f(x) = 1 - x$
   c. $f(x) = 10x^2 - 1$
   d. $f(x) = (5x - 1)^2$
   e. $f(x) = 2x^2 - x + 1$
   f. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$
   g. $f(x) = (x + 1)(2x - 1)$
   h. $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)$
2. Tentukan nilai m di titik $P(0, 2)$ jika $m = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk fungsi-fungsi f berikut.
   a. $f(x) = 10$
   b. $f(x) = 2x - 5$
   c. $f(x) = 2x^2 + 1$
   d. $f(x) = x^2 - 7x + 12$
   e. $f(x) = (x + 2)(2x + 1)$
   f. $f(x) = 2x^3$
   g. $f(x) = (x - 1)^3$
   h. $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)$
3. Misalkan m adalah gradien garis g yang menyinggung kurva y di titik A. Tentukan m jika diketahui kurva y dan

titik A sebagai berikut. Kemudian, berikan gambaran geometrisnya.

a. $y = 1 - 9x^2$; $A(0, 1)$
b. $y = x^2 - 9$; $A(-3, 1)$
c. $y = (x - 1)(x + 2)$; $A(1, 0)$
d. $y = x^3$; $A(0, 0)$

4. Sebuah benda bergerak menurut persamaan $s(t) = 3t^2 - 2t + 1$. Jika kecepatan benda dinyatakan sebagai perubahan jarak yang ditempuh setiap perubahan waktu, tentukan
   a. kecepatan benda pada saat $t = 5$ detik;
   b. kecepatan benda pada saat $t = 10$ detik.
5. Kawat suatu jembatan gantung diikatkan pada tiang penyangga yang terpisah pada jarak 8 m. Kawat menggantung dengan bentuk parabola dan titik terendah berada 16 m di bawah titik gantung, tentukan besar sudut antara kawat gantung dan tiang penyangga (θ). (Ingat gradien suatu garis biasanya menyatakan nilai tangen suatu sudut). Lihat ilustrasi di samping.



Gambar 4.8

6. Sebuah kota dijangkiti oleh epidemi flu burung. Petugas menaksir bahwa setelah t hari mulainya epidemi, banyaknya orang yang sakit dinyatakan dengan $p(t) = 120t^2 - 2\,t^3$, untuk $0 \le t \le 40$. Tentukan laju penularan flu burung pada saat $t = 10$, 20, dan 40.
7. Sebuah kapal tanker pengangkut minyak mengalami kebocoran di laut lepas sehingga menyebabkan tumpahan minyak berbentuk lingkaran. Jari-jari lingkaran tumpahan minyak tersebut bertambah besar pada laju tetap, yaitu 2 km/hari. Tentukan laju pertambahan luas daerah tumpahan minyak setelah 3 hari.
8. Berat suatu tumor membahayakan pada saat t (dalam minggu) adalah $w(t) = 0{,}2t^2 - 0{,}09t$ gram. Carilah laju pertumbuhan tumor ketika $t = 120$ jam.
9. Tentukan laju perubahan luas suatu lingkaran terhadap kelilingnya pada saat kelilingnya 6 cm.
10. Zat cair mengalir dengan debit 3.600 cm^3/s ke dalam tangki silinder vertikal bejari-jari alas 2 m. Tentukan kecepatan naiknya permukaan zat cair itu.

Tugas: Informasi Lanjut

• Kerjakan di buku tugas

Carilah wawasan dari internet atau buku referensi lain tentang contoh-contoh fungsi yang tidak memiliki limit di titik tertentu, serta contoh limit fungsi $f(x)$ yang memenuhi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, a suatu konstanta. Untuk memperkaya wawasanmu, carilah informasi tentang kontinuitas dan pelajarilah. Buat kesimpulannya.

Rangkuman

1. Limit $\lim_{x\to a} f(x) = L$ secara intuitif diartikan untuk x mendekati a, tetapi $x \neq a$ maka $f(x)$ mendekati L.
2. Misalkan $f(x)$ memiliki nilai limit untuk $x \to a$, nilai limitnya dapat ditentukan dengan cara susbtitusi, pemfaktoran, dan mengalikan faktor sekawan.
3. Jika $f(x) = ax^m + bx^{m-1} + \ldots + a_0$ dan $g(x) = px^n + qx^{n-1} + \ldots + b_0$, berlaku:
   a. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{p}$ jika $m = n$
   b. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ jika $m > n$ dan $a > 0$
   c. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ jika $m > n$ dan $a < 0$
   d. $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ jika $m < n$
4. Sifat-sifat limit
   a. $\lim_{x\to a} c = c$
   b. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
   c. $\lim_{x\to a} c\, f(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$
   d. $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x))$
   $= \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
   e. $\lim_{x\to a} f(x)\, g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$
   f. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$
   g. $\lim_{x\to a} f(x)^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$
   h. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$
5. Konsep dasar turunan dari fungsi $f(x)$ ditentukan dengan

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Refleksi

Coba *review* kembali konsep limit yang baru saja kalian pelajari. Dari konsep itu, mampukah kalian memberi gambaran (dengan bahasamu sendiri) tentang makna limit fungsi? Berikan sebuah kasus yang penyelesaiannya dapat diarahkan ke bentuk limit fungsi.

Tes Kemampuan Bab IV

• Kerjakan di buku tugas

A. Pilihlah jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 + 2x} = ...$
   a. $\dfrac{-3}{2}$
   b. $\dfrac{-2}{3}$
   c. 0
   d. $\dfrac{2}{3}$
   e. $\dfrac{3}{2}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x - 18}{x^2 - 3x} = ...$
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 3
   e. ∞

3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{4 - x}{2 - \sqrt{x}} = ...$
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. 4
   e. ∞

4. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} = ...$
   a. 0
   b. 3
   c. 6
   d. $\dfrac{1}{6}$
   e. ∞

5. Nilai $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sqrt{x}} = ...$
   a. –3
   b. 1
   c. 2
   d. 3
   e. ∞

6. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 9} = ...$
   a. $\dfrac{-4}{3}$
   b. $\dfrac{-2}{3}$
   c. 0
   d. $\dfrac{2}{3}$
   e. $\dfrac{4}{3}$

7. Jika $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + a}{x - 2} = 1$ maka nilai a adalah ....
   a. –2
   b. –1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x} + x} = ...$
   a. 0
   b. $\dfrac{1}{2}$
   c. 1
   d. 2
   e. ∞

9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x^3 - 1} = ...$
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. $\dfrac{1}{3}$
   e. ∞

10. Nilai $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; x < 2 \\ 7 - 2x; x \geq 2 \end{cases}$ adalah ....
   a. 2
   b. 3
   c. 4
   d. 7
   e. tidak ada

11. Nilai $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-2}}{x-2} = ...$
   a. $-\dfrac{1}{2}$
   b. 0
   c. $\dfrac{1}{2}$
   d. 1
   e. ∞

12. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}} = ...$
   a. 3
   b. 6
   c. 9
   d. 12
   e. 15

13. Nilai dari $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x - \sqrt{2x^2+3}}{9-x^2}$ adalah ....
   a. $-\dfrac{1}{9}$
   b. $-\dfrac{1}{8}$
   c. $\dfrac{1}{3}$
   d. $\dfrac{1}{2}$
   e. $\dfrac{2}{3}$

14. Nilai $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x+8} - \sqrt{2x-3}\right)$ adalah ....
   a. 0
   b. 2
   c. 5
   d. 11
   e. ∞

15. Nilai $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$ adalah ....
   a. 0
   b. $\dfrac{1}{3}$
   c. $\dfrac{1}{5}$
   d. $\dfrac{1}{7}$
   e. $\dfrac{1}{9}$

16. Nilai $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{1+t} - 1}{\sqrt[3]{1+t} - 1}$ adalah ....
   a. 0
   b. $\dfrac{1}{3}$
   c. $\dfrac{2}{3}$
   d. $\dfrac{3}{2}$
   e. 2

17. Nilai $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n - 1}{x-1}$ adalah ....
   a. $n^2 - 1$
   b. $n^2 - n$
   c. n
   d. 1
   e. ∞

18. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^5 - 7x^2 + 1}{2x^4 + x - 1} = ...$
   a. 3
   b. 2
   c. 1
   d. 0
   e. ∞

19. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 3x + 4}{3x^2 + 2x + 3} = ...$
   a. 0
   b. $\dfrac{1}{3}$
   c. ∞
   d. 3
   e. $\dfrac{4}{3}$

20. Jika diketahui $f(x)=\dfrac{2}{5\sqrt[3]{x}}$ maka nilai $\lim\limits_{p\to 0}\dfrac{f(x-p)-f(x)}{p}$ adalah ....

a. $-\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x}}$
b. $-\dfrac{2}{5\sqrt[3]{x}}$
c. $-\dfrac{2}{15\sqrt[3]{x^4}}$
d. $\dfrac{2}{15\sqrt[3]{x^2}}$
e. $\dfrac{2}{15\sqrt[3]{x}}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{9x^2+x+1}=$ ....

a. 0
b. $\dfrac{1}{3}$
c. 1
d. 3
e. ∞

22. Nilai $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}}$ adalah ....

a. 8
b. 4
c. $\dfrac{9}{4}$
d. 1
e. 0

23. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5+2x+3x^2}{6-2x}=$ ....

a. $\dfrac{-3}{2}$
b. ∞
c. $\dfrac{1}{2}$
d. $\dfrac{5}{6}$
e. 0

24. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=$ ....

a. 0
b. $2h$
c. $2x$
d. $2x+h$
e. ∞

25. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, untuk $f(x)=3x^2-6x+1$ adalah ....

a. $6x$
b. $6x-6$
c. $3x-6$
d. $3x^2-6$
e. $-6x$

26. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)+hf(x)}{h}$, untuk $f(x)=3x-1$ adalah ....

a. 3
b. $3x+2$
c. $-3x+4$
d. $-3x+1$
e. $3x-2$

27. Diketahui $f(x)=3x^2-2$ dan $(g\circ f)(x)=15x^2-7$. Nilai $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(2+h)-g(2)}{h}=$ ....

a. 5
b. 10
c. 13
d. $5x$
e. $5x+3$

28. Persamaan garis singgung kurva $y=\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$ di titik (2, 1) adalah ....

a. $y=x-1$
b. $y=5-2x$
c. $y=5-x$
d. $y=x+1$
e. $y=1-x$

29. Gradien garis singgung kurva $y=\dfrac{x}{(1-x)}$ di $x=k$ adalah ....

a. $\dfrac{k}{(1-k)}$
b. $\dfrac{1}{(1-k)^2}$
c. $\dfrac{k^2}{(1-k)}$
d. $1-k$
e. $\dfrac{1}{(1-k)}$

30. Gradien garis singgung parabola $y=1-2x-3x^2$ di titik $(-2,-7)$ adalah ....

a. 3
b. 6
c. 9
d. 10
e. 14

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Tentukan nilai limit fungsi berikut.
   a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}\right)$
   b $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t^2+1}$
   c. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^2+1}}$
   d. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x+2)}-\sqrt{x^2-2}\right)$
   e. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ untuk $f(x)=\begin{cases} x^3-\sqrt{x};\ x<0 \\ 2x^2-x;\ x\geq 0\end{cases}$
2. Carilah kemiringan/gradien garis singgung kurva $y = 9 - 2x^2$ di titik (2, 1). Tentukan persamaan garis singgung tersebut.
3. Biaya total produksi (dalam dolar) x unit komoditas tertentu adalah $C(x) = 5.000 + 0{,}05x^2$. Tentukan biaya marjinal karena peningkatan produksi sebesar 10 unit.
4. Apabila diberikan fungsi biaya total $C(x)$ dengan x adalah jumlah barang yang diproduksi maka fungsi biaya marjinalnya adalah

   $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(x+\Delta x)-C(x)}{\Delta x}.$$

   a. Misalkan biaya (dalam dolar US) suatu perusahaan untuk menghasilkan x pasang sepatu adalah
   $C(x) = 5 + 3x + x^2$.
   Carilah fungsi biayanya.
   b. Analog dengan soal a, lakukan hal yang sama untuk $C(x) = 10 - 3x + x^2$.
5. Ingat kembali pelajaran Ekonomi tentang biaya rata-rata dan biaya total. Misalnya biaya rata-rata yang dikeluarkan produsen untuk memproduksi Q unit barang dinyatakan dengan

   $$C_R(Q) = \frac{C(Q)}{Q}$$

   $C_R(Q)$ = fungsi biaya rata-rata
   $C(Q)$ = fungsi biaya total
   Q = unit barang

   Jika diberikan fungsi biaya totalnya $C(Q) = 10.000 + 8Q$ (dalam ratusan ribu rupiah), tunjukkan bahwa biaya rata-rata akan stabil (atau mendekati stabil) jika produsen secara berlanjut (terus-menerus) meningkatkan jumlah produksinya. Bagaimana nilai batas dari biaya rata-rata ini? Tunjukkan dengan visualisasi grafik. (**Petunjuk**: Gunakan konsep limit mendekati tak berhingga).

Kata Bijak

Keberhasilan terbesar dalam hidup adalah dapat bangkit kembali dari kegagalan.

Bab V

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat
1. menjelaskan arti fisis dan geometris turunan di satu titik;
2. menentukan laju perubahan nilai fungsi terhadap variabel bebasnya;
3. menggunakan aturan turunan untuk menghitung turunan fungsi aljabar;
4. menentukan persamaan garis singgung pada suatu kurva;
5. menentukan selang di mana suatu fungsi naik atau turun;
6. menentukan titik stasioner fungsi dan jenis ekstremnya;
7. menentukan titik belok suatu fungsi;
8. menggambarkan grafik fungsi.
9. memudahkan masalah yang berkaitan dengan turunan fungsi;
10. menyelesaikan dan menafsirkan model matematika yang berkaitan dengan turunan fungsi.

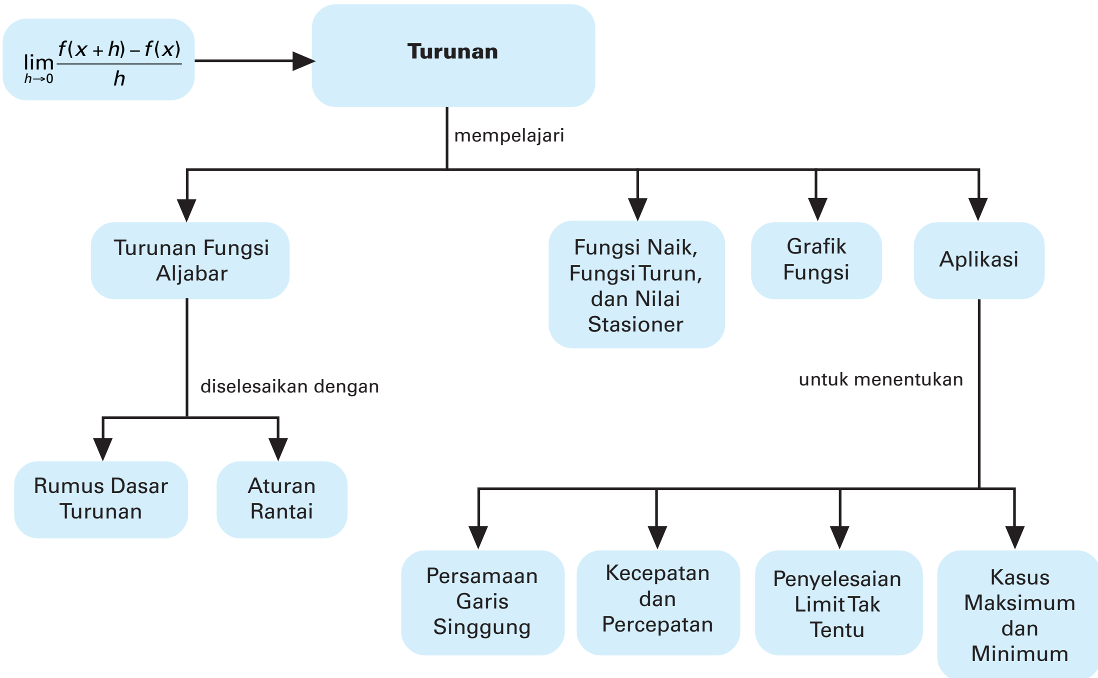
Sumber: *CD Corel Boat 3*

Turunan

Motivasi

Kecepatan dan percepatan merupakan dua buah besaran turunan yang sering dibicarakan dalam ilmu fisika. Konsep kecepatan diperoleh dari perubahan jarak terhadap waktu, sedangkan percepatan diperoleh dari perubahan kecepatan terhadap waktu. Contoh percepatan adalah dalam sebuah lomba balap *speed boat*. Pada saat berangkat dari *start*, *speed boat* mulai melaju, kemudian mempercepat kelajuannya. Dapatkah kecepatan sesaat pada waktu tertentu ditentukan? Kasus-kasus seperti ini akan mudah ditentukan dengan menggunakan ilmu hitung turunan.

Peta Konsep



Kata Kunci

- aturan rantai
- dalil L'Hopital
- diferensiabel
- fungsi naik
- fungsi turun
- garis singgung
- gradien
- kecepatan
- maksimum
- minimum
- nilai stasioner
- percepatan
- titik kritis
- turunan

Pada bab sebelumnya, kalian telah mempelajari tentang limit fungsi. Limit fungsi merupakan materi prasyarat untuk mempelajari turunan. Di akhir bab limit fungsi, kalian telah mempelajari limit fungsi yang mengarah pada konsep turunan. Pada bagian itu, kalian telah memperoleh bentuk limit yang menjadi dasar turunan. Di samping itu, ketika di SMP kalian pernah mempelajari kemiringan (gradien) suatu garis. Kemiringan ini akan membantu kita dalam mempelajari konsep turunan.

Sebelum mempelajari bab ini, jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.

Prasyarat

Kerjakan di buku tugas

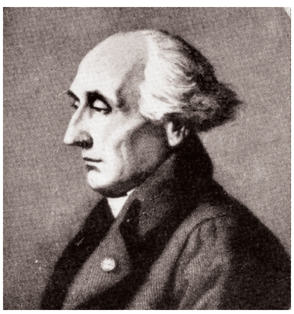
1. Tentukan gradien dari garis $y = 2x + 2$.
2. Diketahui $f(x) = 2x + 2$. Tentukan
   $\lim\limits_{h \to 0} = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.
3. Samakah hasil 1 dan 2? Apa sebenarnya hubungan antara soal 1 dan 2?

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari lanjutkan mempelajari materi berikut.

A. Turunan dan Tinjauan Geometrinya

1. Pengertian Turunan

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah mempelajari limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan (diferensial). Perhatikan kembali bentuk limit fungsi berikut.



Lagrange (1736–1813)

Sumber: *www.cygo.com*

Gambar 5.1

Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$. Jika $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ada, fungsi $y = f(x)$ dikatakan mempunyai turunan (*diferensiabel*) di titik x.

Turunan fungsi $f(x)$ dinotasikan dengan $f'(x)$ atau $\dfrac{dy}{dx}$.

Jadi, turunan suatu fungsi $f(x)$ didefinisikan sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notasi $\dfrac{dy}{dx}$ dibaca "*dy dx*" artinya "turunan dari y ke x", pertama kali diperkenalkan oleh **Gottfried Wilhelm Leibniz** (**1646–1716**), sedangkan $f'(x)$ diperkenalkan oleh **Joseph Louis Lagrange** (**1736–1813**).

Agar kalian ingat kembali materi tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1:

Dengan menggunakan definisi

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

tentukan turunan pertama fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x
\end{aligned}$$

Contoh 2:

Tentukan turunan pertama dari fungsi $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$.

Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{(x+h)^2} - \dfrac{3}{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{3}{x^2 + 2xh + h^2} - \dfrac{3}{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 - 3(x^2 + 2xh + h^2)}{h(x^2 + 2xh + h^2)x^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-6xh - 3h^2}{h(x^2 + 2xh + h^2)x^2} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{-6x - 3h^2}{(x^2 + 2xh + h^2)x^2} \\
&= \frac{-6x}{x^4} = -\frac{6}{x^3}
\end{aligned}$$

Jendela Informasi

Informasi lebih lanjut

Leibniz (1646–1716)

Sumber: *www.cygo.com*

Gottfried Wilhelm Leibniz

Pada akhir abad XVII, ahli matematika mengenal penjungkirbalikan pendapat yang luar biasa. Bilangan kecil yang nilainya tidak berhingga kecilnya sangat mencolok dan mulai saat itu menggelitik para ahli. Tokoh Jerman, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) menyumbangkan karyanya dalam membangun hitung diferensial (turunan) dan infinitesimal. Leibniz adalah pencipta notasi turunan $\frac{dy}{dx}$. Dia juga pencipta notasi integral $\int$. Carilah informasi tentang tokoh ini dan karya-karyanya di perpustakaan atau internet.

Sumber: *www.noisefactory.co.uk*

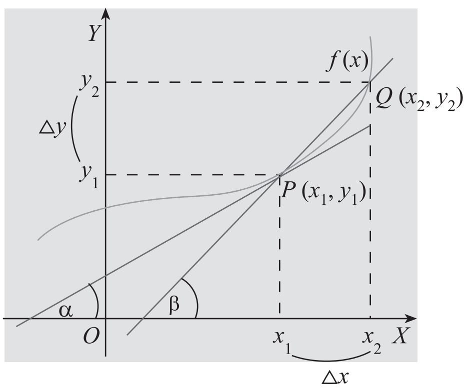
Soal Kompetensi 1

• Kerjakan di buku tugas

Dengan menggunakan definisi turunan suatu fungsi, tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = 3x + 5$
2. $f(x) = 3x^2 + 1$
3. $f(x) = x^2 + 3x + 4$
4. $f(x) = \frac{5}{2x}$
5. $f(x) = -\frac{3}{x^2}$
6. $f(x) = \sqrt{x}$
7. $f(x) = x\sqrt{x}$
8. $f(x) = (3x - 2)^2$
9. $f(x) = \frac{1}{x+1}$
10. $f(x) = (1 - x)^3$

2. Turunan Ditinjau dari Sudut Pandang Geometri



Gambar 5.2

Seperti telah dibahas pada bab sebelumnya, limit yang mengarah pada konsep turunan dapat digambarkan sebagai kemiringan atau gradien suatu kurva di titik tertentu. Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$, titik $P(x, y)$, serta $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ seperti tampak pada gambar samping.

Pada gambar di samping, sudut α adalah besar sudut yang dibentuk antara garis g yang menyinggung fungsi $f(x)$ di titik P dengan sumbu X, sedangkan sudut β adalah besar sudut yang dibentuk antara garis penghubung titik P dan Q dengan sumbu X. Seperti yang kalian ketahui bahwa nilai tangen merupakan koefisien kemiringan suatu garis. Koefisien arah suatu garis sama dengan nilai tangen sudut garis terhadap sumbu mendatar. Oleh karena itu, dari gambar tersebut, diperoleh

$$\tan \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Nilai $\tan \alpha$, yaitu gradien persamaan garis singgung g terhadap $f(x)$ di titik P dapat ditentukan dengan cara pendekatan berikut ini.

Misalkan titik Q bergerak sepanjang $f(x)$ mendekati titik P. Akibatnya, $\Delta x \to 0$. Dengan demikian, besar sudut β mendekati besar sudut α. Dengan kata lain,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tan \beta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \tan \alpha .$$

Besar perubahan x yang dinyatakan dengan Δx biasanya juga dinyatakan dengan h.

Dari bentuk limit terakhir, tampak bahwa kemiringan (gradien) suatu garis g merupakan nilai tangen sudut garis itu, yaitu $\tan \alpha$. Dengan demikian, $f'(x)$ merupakan gradien garis singgung fungsi $f(x)$ di titik (x, y). Selain diartikan sebagai gradien garis singgung, $f'(x)$ juga diartikan sebagai laju perubahan suatu fungsi.

Misalkan diketahui fungsi $y = f(x)$. Gradien garis singgung di titik $P(a, b)$ yang terletak pada fungsi $y = f(x)$ adalah sebagai berikut.

$$m = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Contoh:

Tentukan gradien garis singgung kurva yang memiliki persamaan $f(x) = \frac{4}{x}$, untuk $x \neq 0$ di $x = 2$.

Jawab:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{4}{x+h} - \frac{4}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4x - 4x - 4h}{xh(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-4}{x(x+h)}$$

$$= -\frac{4}{x^2}$$

Dengan demikian, gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ untuk $x = 2$ adalah $m = f'(2) = -\frac{4}{x^2} = -1$.

Dengan kata lain, laju perubahan fungsi $f(x)$ di $x = 2$ adalah -1.

Soal Kompetensi 2

• Kerjakan di buku tugas

Untuk soal nomor 1 – 5, tentukan gradien garis singgung fungsi berikut di titik yang diberikan.

1. $f(x) = 4x$, di $x = 2$
2. $f(x) = x^2 - x$, di $x = 1$
3. $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$, di $x = 3$
4. $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$, di $x = 2$
5. $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x + 1$, di $x = 1$

Untuk soal nomor 6–8, tentukan laju perubahan fungsi di titik yang diberikan.

6. $f(x) = -\frac{3}{x}$, untuk $x \neq 0$ di $x = 4$
7. $f(x) = \frac{3}{2x}$, untuk $x \neq 0$ di $x = 2$
8. $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, di $x = 1$
9. Biaya total yang dikeluarkan oleh suatu perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = 8Q^2 - 400Q + 10.000$ (C dalam ratusan ribu rupiah Q jumlah unit barang). Fungsi biaya marginal (M_C) dirumuskan sebagai $M_C = \frac{dC}{dQ}$. Tentukan fungsi biaya marginalnya.
10. Suatu fungsi permintaan suatu barang ditaksir dengan rumus $Q = 16 - \frac{1}{4}P$, dengan Q jumlah barang yang diminta dan P harga per unit (P dalam ribuan rupiah).
    a. Bagaimana bentuk grafiknya?
    b. Apakah jumlah barang maksimum bergantung pada harga per unitnya? Mengapa jawaban kalian demikian? Jelaskan melalui konsep turunan.

B. Turunan Fungsi Aljabar

Misalkan terdapat fungsi $f(x) = c, f(x) = x, f(x) = x^2, f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, dan seterusnya hingga $f(x) = x^n$. Dengan menggunakan rumus $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, kalian akan memperoleh turunan fungsi $f(x) = c$ adalah $f'(x) = 0$, turunan fungsi $f(x) = x$ adalah $f'(x) = 1$, turunan fungsi $f(x) = x^2$ adalah $f'(x) = 2x$, turunan fungsi $f(x) = x^3$ adalah $f'(x) = 3x^2$, dan seterusnya.

Perhatian

C_n^m adalah kombinasi n unsur dari m unsur yang tersedia yang dirumuskan dengan $C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.

Notasi faktorial telah kalian pelajari di Bab II.

Secara umum, fungsi $f(x) = x^n$, dengan n bilangan bulat, turunannya dapat ditentukan dengan $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$.

Menurut teorema binomial, untuk x dan y bilangan real dan n bilangan asli, berlaku

$$(x + y)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} y + C_2^n x^{n-2} y^2 + \ldots + C_n^n y^n$$

Dengan teorema tersebut, diperoleh sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1} h + \ldots + C_n^n h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + C_1^n x^{n-1} h + \ldots + h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{C_1^n x^{n-1} h + \ldots + h^n}{h} \\
&= C_1^n x^{n-1} \\
&= n x^{n-1}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, apabila $f(x) = x^n$ dengan n bilangan asli maka telah terbukti $f'(x) = nx^{n-1}$. Dengan cara yang sama, jika $f(x) = ax^n$ maka dapat dibuktikan bahwa turunan $f(x)$ adalah $f'(x) = anx^{n-1}$. Rumus ini juga berlaku untuk n bilangan rasional (bukti tidak diberikan). Coba kalian tunjukkan dengan salah satu atau beberapa contoh bilangan rasional. Oleh karena itu, secara umum dapat dikatakan sebagai berikut.

Jika n bilangan rasional, a dan c konstanta, sedangkan $f'(x)$ turunan dari $f(x)$ maka berlaku rumus turunan sebagai berikut.

Jika $f(x) = c$ maka turunannya adalah $f'(x) = 0$.
Jika $f(x) = x^n$ maka turunannya adalah $f'(x) = nx^{n-1}$.
Jika $f(x) = ax^n$ maka turunannya adalah $f'(x) = anx^{n-1}$.

Contoh 1:

Tentukan turunan dari

a. $f(x) = 6x^4$; b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Jawab:

a. Karena $f(x) = 6x^4$ maka dalam hal ini $a = 6$ dan $n = 4$.
Jadi, $f'(x) = 6(4x^{4-1}) = 24x^3$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Dalam hal ini, $n = -1$.

Jadi, $f'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2}$ atau $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$.

Contoh 2:

Tentukan turunan dari $f(x) = \sqrt{x}$.

Jawab:

Dengan menggunakan definisi turunan, diperoleh

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Jika kalian menggunakan rumus turunan fungsi untuk $f(x) = x^n$ di atas, dalam hal ini $n = \dfrac{1}{2}$, kalian akan memperoleh hasil

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Tugas: Investigasi

• Kerjakan di buku tugas

Buatlah fungsi dengan pangkat variabelnya berupa bilangan pecahan, misalnya $x^{\frac{3}{5}}, x^{\frac{2}{7}}$, atau $x^{\frac{1}{3}}$. Tentukan turunan fungsi-fungsi yang telah kamu buat dengan memakai definisi fungsi turunan seperti di atas. Perhatikan hasil yang diperoleh. Samakah hasilnya jika dikerjakan memakai rumus turunan fungsi $f(x) = ax^n$ di atas?

Mari Berdiskusi
Kreativitas

Apabila diketahui $f(x) = k$, dengan k sembarang konstanta, bagaimanakah fungsi turunannya? Jelaskan dengan gambar jika ditinjau dari sudut pandang geometris.

Soal Kompetensi 3

• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = x^5$
   b. $f(x) = x^2$
   c. $f(x) = -5x^{-3}$
   d. $f(x) = 1 - 2x + 3x^2$
   e. $f(x) = -\dfrac{5}{x^5}$
   f. $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$
   g. $f(x) = -\dfrac{2\sqrt{x}}{x}$
   h. $f(x) = \dfrac{2}{x\sqrt{x}} + 2x$
   i. $f(x) = -\dfrac{5}{2x\sqrt[4]{x}} - 1$
   j. $f(x) = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}}$
2. Diketahui $f(x) = 2x^2 - 6mx + 2$. Jika $f'(5) = 8$, tentukan nilai m.
3. Misalkan $g(x) = ax^2 + bx + c$, dengan $a = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{6x^2 + 5x - 1}{x + 1}$

   dan $b = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, untuk $f(x) = 4x$.

   Jika $g'(1) = 0$, tentukan nilai c dan rumus fungsi $g(x)$.

C. Sifat-Sifat Turunan Suatu Fungsi

Misalkan n bilangan rasional, c konstanta, $u(x)$ dan $v(x)$ fungsi-fungsi diferensiabel dengan turunannya masing-masing $u'(x)$ dan $v'(x)$. Jika $f'(x)$ turunan dari $f(x)$, berlaku sifat-sifat sebagai berikut.

a. $f(x) = c\,u(x)$, turunannya $f'(x) = c\,u'(x)$.
b. $f(x) = u(x) \pm v(x)$, turunannya $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.
c. $f(x) = u(x)\,v(x)$, turunannya $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)\,v'(x)$.
d. $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$; $v(x) \neq 0$, turunannya

   $$f'(x)) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2}.$$
e. $f(x) = u(x)^n$, turunannya $f'(x) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$.

Untuk membuktikan sifat a dan b, dapat kalian gunakan limit yang mengarah ke konsep turunan. Hal ini sangat mudah dilakukan. Coba kalian buktikan.

Berikut ini akan kita buktikan sifat c dan d, sedangkan e dapat kalian buktikan setelah mempelajari aturan rantai.

Jika $f(x) = u(x)v(x)$, turunannya adalah $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\,v(x+h) - u(x)\,v(x)}{h}$$

Dengan menambahkan $-u(x + h)v(x) + u(x + h)v(x)$ pada pembilang maka diperoleh

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\{v(x+h) - v(x)\} + v(x)\{u(x+h) - u(x)\}}{h}$$

$$= u(x+h)\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + v(x)\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ .... (terbukti)

Untuk membuktikan turunan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, terlebih dahulu ubahlah persamaan itu menjadi $u(x) = f(x)v(x)$. Dengan menggunakan sifat yang telah terbukti di atas, diperoleh

$$u'(x) = f'(x)v(x) + f(x)\,v'(x) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{u'(x) - f(x)\,v'(x)}{v(x)}$$

Karena $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ maka kalian akan memperoleh

$f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$ .... (terbukti)

Coba perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan $f'(x)$ jika diketahui

a. $f(x) = x^3 + 2x$;   b. $f(x)= 2x - x^4 + 4$.

Jawab:

a. Misalkan $u(x) = x^3$ dan $v(x) = 2x$. Dengan demikian, $u'(x) = 3x^2$ dan $v'(x) = 2$.
   Jadi, $f'(x) = 3x^2 + 2$.

b. Misalkan $u(x) = 2x$, $v(x) = x^4$, dan $w(x) = 4$. Dengan demikian, $u'(x) = 2$, $v'(x) = 4x^3$, dan $w'(x) = 0$.
   Jadi, $f'(x) = 2 - 4x^3 + 0 = 2 - 4x^3$.

Soal Kompetensi 4

• Kerjakan di buku tugas

Tentukan turunan pertama dari fungsi-fungsi berikut ini.

1. $f(x) = (x^2 + 2x) + (x^2 - 5x)$
2. $f(x) = x^4 + \frac{5}{6}x^2 + 2x + 6$
3. $f(x) = (\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{2}{x^2}) + (5x^{-3} - 2x^2)$
4. $f(x) = 2x^2 + \sqrt[3]{\sqrt{x}}$
5. $f(x) = (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + x) - (\frac{3}{5}x^4 - 2x^2)$
6. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{\sqrt{x}} - \frac{4}{5}x^4$
7. $f(x) = (3x + 2)(x - 1)$
8. $f(x) = (x^4 - 2x^2 + 4x)(3x^2 - 9x - 5)$
9. $f(x) = \dfrac{2}{x^2 - 3x}$
10. $f(x) = \dfrac{2x + 4}{5x^3 + 3x - 1}$

D. Menentukan Turunan dengan Aturan Rantai (Pengayaan)

Misalkan diketahui fungsi $f(x) = (3x - 2)^2$. Tentu soal ini tidak terlalu sulit bagi kalian untuk menentukan turunannya, yaitu dengan menguraikannya terlebih dahulu, kemudian menurunkannya. Namun, bagaimana jika kalian dihadapkan pada persoalan $f(x) = (3x - 2)^{10}$? Apakah kalian juga akan menguraikannya terlebih dahulu, kemudian menurunkannya? Persoalan seperti ini akan lebih mudah jika dikerjakan dengan menggunakan aturan rantai. Prinsip menentukan turunan dengan menggunakan aturan rantai adalah mengubah fungsi yang akan diturunkan ke dalam fungsi bentuk dasar, seperti x^n. Selanjutnya, fungsi dalam bentuk dasar itu diturunkan seperti halnya aturan yang telah dijelaskan sebelumnya.

Misalkan terdapat fungsi $y = f(u(x))$. Turunan fungsi y dapat ditentukan dengan

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \times \frac{\Delta u}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x},\ \Delta u \neq 0.$$

Jadi, diperoleh $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$.

Dengan cara serupa, misalkan terdapat fungsi $y = f(u(v(x)))$, turunan fungsinya dapat ditentukan dengan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}.$$

Untuk dapat memahami aturan rantai dengan baik, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

a. $y = (3x - 2)^2$

b. $y = ((1 - x^2)^6 - 1)^3$

Jawab:

a. Misalkan $u = 3x - 2$. Dengan demikian,

$y = u^2$ $\qquad$ $u = 3x - 2$

$\frac{dy}{du} = 2u$ $\qquad$ $\frac{du}{dx} = 3$

Jadi, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 2u \times 3 = 2(3x - 2)(3) = 18x - 12.$

b. Misalkan $u = (1 - x^2)^6 - 1$ dan $v = 1 - x^2$. Dengan demikian,

$y = u^3$ $\qquad$ $u = v^6 - 1$ $\qquad$ $v = 1 - x^2$

$\frac{dy}{du} = 3u^2$ $\qquad$ $\frac{du}{dv} = 6v^5$ $\qquad$ $\frac{dv}{dx} = -2x$

Dengan demikian,
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}\\ &= 3u^2(6v^5)(-2x)\\ &= 3(v^6 - 1)^2(6v^5)(-2x)\\ &= 3((1 - x^2)^6 - 1)^2(6(1 - x^2)^5)(-2x)\\ &= -36x((1 - x^2)^6 - 1)^2(1 - x^2)^5\end{aligned}$$

Jadi, turunan $y = ((1 - x^2)^6 - 1)^3$ adalah
$y' = -36x((1 - x^2)^6 - 1)^2(1 - x^2)^5$.

Soal Kompetensi 5

• Kerjakan di buku tugas

Tentukan turunan fungsi-fungsi $y = f(x)$ berikut ini.

1. $y = (2x + 3)^3$
2. $y = (3 - 4x)^{-4}$
3. $y = (x^3 - 7x^2 - x + 10)^{-2}$
4. $y = (x^4 + 12x^3 - \frac{1}{2}x^2)^{-5}$

5. $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 3x}} + 5$

6. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(7x - 2)}}$

7. $y = ((3 - x)^5 - 2)^3$

8. $y = (((2 - 3x^2)^4 - 1)^2 - 1)^2$

9. $y = \dfrac{2}{3\sqrt{x} - 2} + 3$

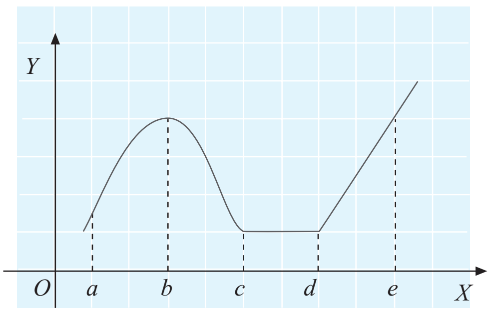
10. $y = \dfrac{x}{(1-x)\sqrt{x^2-1}+1} + 1$

11. $y = \dfrac{(3x^2+4)^4}{x-1}$

12. $y = \left(1-3x^2\right)^3 (2x+5)$

E. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Nilai Stasioner

1. Pengertian Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Nilai Stasioner

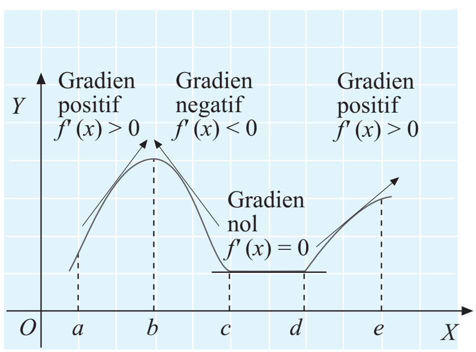


Gambar 5.3

Untuk mengetahui ilustrasi suatu fungsi naik atau turun pada suatu interval, perhatikan gambar berikut.

Pada gambar di samping, grafik fungsi $f(x)$ naik pada interval $a < x < b$ dan interval $d < x < e$, sedangkan pada interval $b < x < c$ grafik fungsi tersebut turun, dan pada interval $c < x < d$ grafik $f(x)$ tidak naik dan tidak turun (stasioner).

Sekarang perhatikan cara menentukan interval suatu fungsi naik atau turun. Misalkan diberikan fungsi $y = f(x)$.



Gambar 5.4

a. Apabila suatu interval nilai x mengakibatkan $f'(x) > 0$ maka $f(x)$ *fungsi naik* pada interval tersebut. Hal ini disebabkan gradien persamaan garis singgung pada titik-titik tersebut adalah positif, yaitu garis-garis singgungnya condong ke kanan. Dalam hal ini, dikatakan bahwa fungsi $f(x)$ naik.

b. Apabila suatu interval nilai x mengakibatkan $f'(x) < 0$ maka $f(x)$ fungsi turun pada interval tersebut. Hal ini disebabkan gradien persamaan garis singgung pada titik-titik tersebut adalah negatif (garis-garis singgungnya condong ke kiri). Dalam hal ini, dikatakan bahwa fungsi $f(x)$ turun.

c. Apabila suatu nilai x mengakibatkan $f'(x) = 0$ maka $f(x)$ stasioner (tidak naik atau turun) pada titik tersebut. Hal ini disebabkan gradien persamaan garis singgung pada titik-titik tersebut adalah nol (garis singgungnya mendatar).

Contoh 1:

Tentukan interval yang menyebabkan fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 1$ naik atau turun, kemudian tentukan pula nilai stasionernya.

Jawab:

Diketahui $f(x) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow f'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$.

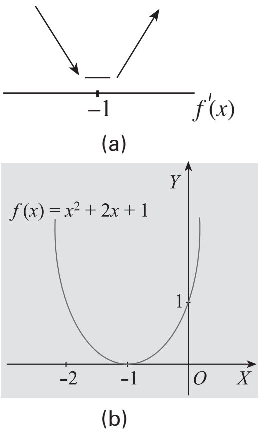
Fungsi naik jika $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Fungsi turun jika $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2(x + 1) < 0 \Leftrightarrow x < -1$.

Titik stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sehingga nilai stasionernya $f(-1) = 0$. Jadi, titik stasionernya $(-1, 0)$.

Jadi, $f(x)$ akan naik pada $x > -1$, turun pada $x < -1$, dan stasioner di $x = -1$ (lihat **Gambar 5.5** (a)).

Perhatikan grafik $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Dari gambar di samping, dapat dilihat bahwa $f(x)$ naik pada interval $x > -1$, turun pada interval $x < -1$, dan stasioner di $x = -1$.



Gambar 5.5

Contoh 2:

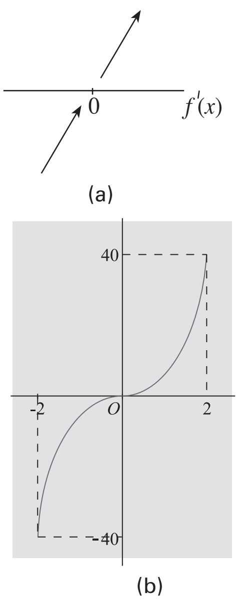
Tentukan interval yang menyebabkan fungsi $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x$ naik, turun, atau stasioner.

Jawab:

Diketahui $f(x) = x^5 + 2x^3 + 3x$ sehingga diperoleh $f'(x) = 5x^4 + 6x^2 + 3$.

Untuk setiap x, nilai $x^4 \geq 0$ dan nilai $x^2 \geq 0$. Akibatnya, nilai $5x^4 + 6x^2 + 3 > 0$. Nilai $f'(x)$ tidak akan pernah bernilai nol karena tidak ada nilai x yang memenuhi $5x^4 + 6x^2 = -3$. Dengan demikian, fungsi $f(x)$ adalah fungsi yang naik untuk setiap x bilangan. Perhatikan grafik fungsi $f(x)$ di samping.

Gambar grafik fungsi di samping hanya diambil untuk domain $-2 \leq x \leq 2$. Dari gambar terlihat bahwa $f(x)$ akan terus naik pada interval tersebut dan juga terus naik untuk $x < -2$ dan $x > 2$.



Gambar 5.6

Contoh 3:

Tentukan interval di mana fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ naik.

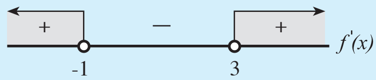
Jawab:

Fungsi naik jika $f'(x) > 0$.

$f'(x) = x^2 - 2x - 3$

$\quad = x^2 - 2x - 3 > 0$

$\quad = (x + 1)(x - 3) > 0$



Gambar 5.7

Jadi, fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$ akan naik untuk $x < -1$ atau $x > 3$.

Soal Kompetensi 6

• Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan pada interval manakah fungsi-fungsi berikut ini naik atau turun. Kemudian, tentukan nilai stasionernya.

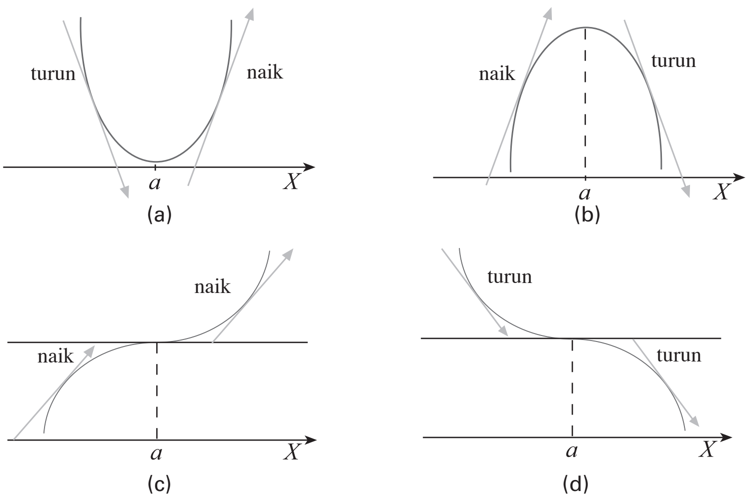
   a. $f(x) = x^2 - 4x$
   b. $f(x) = x^2 - 8x + 10$
   c. $f(x) = 1 - x - 2x^3$
   d. $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 4x^2 + x - 2$
   e. $f(x) = -5 - 7x^2 - x^3$

2. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x}, x \neq 0$ adalah fungsi yang selalu naik untuk $x > 0$.
3. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3$ adalah fungsi yang selalu turun untuk $x > 0$.
4. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = -x^3 + 8x^2 - 5x - 5$ adalah fungsi yang selalu turun untuk setiap x.
5. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^{101} + x^{51} + x + 1$ merupakan fungsi yang selalu turun pada $x < 0$.
6. Tunjukkan bahwa fungsi $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ selalu naik untuk $x > 0$.
7. Turun atau naikkah fungsi $f(x) = \frac{3}{(1 + x^2)}$ untuk $x > 0$?
8. Turun atau naikkah fungsi $f(x) = x^2\sqrt{x + 5}$ untuk $x < 0$?
9. Misalkan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang selalu naik untuk setiap x, sedangkan $g(x)$ adalah fungsi konstan. Bagaimanakah bentuk fungsi $f(x) + g(x)$? Naik atau turunkah fungsi tersebut? Bagaimana dengan bentuk fungsi $f(x) - g(x)$, $f(x) \times g(x)$, dan $\frac{f(x)}{g(x)}$?

10. Misalkan $K(t)$ merupakan fungsi yang menunjukkan ukuran pengetahuan yang dicapai seorang manusia untuk belajar selama t jam ketika menghadapi ujian. Kira-kira bagaimana grafik fungsi K-nya? Cekung ke atas atau ke bawah? Mengapa?

2. Jenis-Jenis Nilai Stasioner

Kalian telah mengetahui titik stasioner dan nilai stasioner suatu fungsi. Terdapat 3 jenis nilai stasioner suatu fungsi, yaitu titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik belok. Adapun ilustrasinya dapat kalian perhatikan pada gambar berikut.



Gambar 5.8

Perhatian

Titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik belok sering juga disebut titik-titik ekstrem.

Misalkan $x = a$ adalah absis titik stasioner.

a. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x < a$ menyebabkan $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ naik maka $x = a$ adalah *titik balik minimum*.

b. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x < a$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ turun maka $x = a$ adalah *titik balik maksimum*.

c. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x < a$ menyebabkan $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ juga turun maka $x = a$ adalah *titik belok*.

d. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a atau $x < a$ menyebabkan $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a atau $x > a$ menyebabkan $f(x)$ juga naik maka $x = a$ adalah *titik belok*.

Contoh 1:

Tentukan nilai-nilai stasioner fungsi $f(x) = x^2 - 3x + 2$ dan jenisnya.

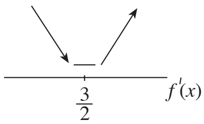
Jawab:

Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 3x + 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x - 3$. Dengan demikian, dapat kita tentukan sebagai berikut. Nilai stasioner dicapai jika $f'(x) = 0$, yaitu di titik $x = \frac{3}{2}$.

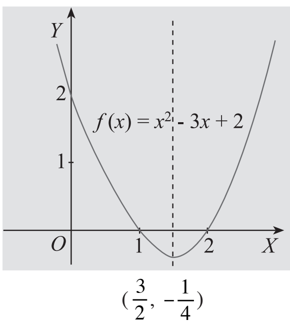
Untuk $x < \frac{3}{2}$ maka $f'(x) < 0$. Jadi, nilai-nilai x di sebelah kiri titik $x = \frac{3}{2}$, fungsinya turun. Untuk $x > \frac{3}{2}$ maka $f'(x) > 0$. Jadi, nilai-nilai x di sebelah kanan titik $x = \frac{3}{2}$, fungsinya naik. Arah grafik dapat dilihat pada **Gambar 5.9** (a).

Dengan demikian, nilai stasioner di $x = \frac{3}{2}$, yaitu $f(\frac{3}{2}) = -\frac{1}{4}$ adalah titik balik minimum, tepatnya titik $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$.

Pada gambar di samping, terlihat bahwa titik $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ adalah titik balik minimum.



(a)



(b)

Gambar 5.9

Contoh 2:

Tentukan nilai-nilai stasioner fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$ dan jenisnya.

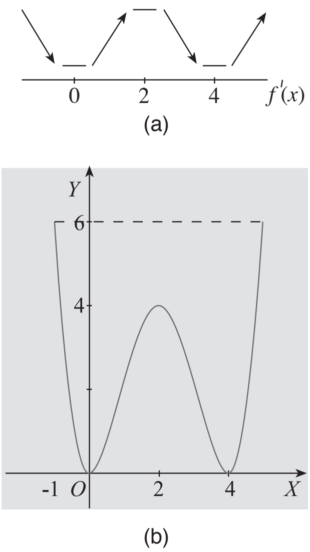
Jawab:

Diketahui $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 \Leftrightarrow f'(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

$= x(x - 2)(x - 4)$.

Nilai $f'(x) = 0$ untuk $x = 0$, $x = 2$, dan $x = 4$. Oleh karena itu, nilai-nilai stasionernya adalah $f(0)$, $f(2)$, dan $f(4)$. Selanjutnya, akan kita tentukan jenis ketiga nilai stasioner itu.

1) *Untuk $x = 0$*
   Jika $x < 0$ maka $f'(x) < 0$. Akibatnya, untuk $x < 0$, fungsi $f(x)$ turun.
   Jika $0 < x < 2$ maka $f'(x) > 0$. Akibatnya, untuk $0 < x < 2$, fungsi $f(x)$ naik.
   Dengan demikian, $x = 0$ adalah titik balik minimum, tepatnya adalah titik $(0, f(0))$ atau $(0, 0)$.
2) *Untuk $x = 2$*
   Jika $0 < x < 2$ maka $f'(x) > 0$. Akibatnya, untuk $0 < x < 2$, fungsi $f(x)$ naik.
   Jika $2 < x < 4$ maka $f'(x) < 0$ sehingga untuk $2 < x < 4$, fungsi $f(x)$ turun.
   Dengan demikian, $x = 2$ adalah titik balik maksimum, tepatnya adalah titik $(2, f(2))$ atau $(2, 4)$.
3) *Untuk $x = 4$*
   Jika $2 < x < 4$ maka $f'(x) < 0$. Akibatnya, untuk $2 < x < 4$, fungsi $f(x)$ turun.
   Jika $x > 4$ maka $f'(x) > 0$. Akibatnya, untuk $x > 4$, fungsi $f(x)$ naik.
   Dengan demikian, $x = 4$ adalah titik balik minimum, tepatnya titik $(0, f(4))$ atau $(0, 0)$. Arah grafik dapat dilihat pada **Gambar 5.10** (a).
   Perhatikan gambar di samping.
   Pada grafik fungsi di samping, tampak bahwa untuk $x = 0$ dan $x = 4$ merupakan titik balik minimum, sedangkan untuk $x = 2$ merupakan titik balik maksimum.



Gambar 5.10

Soal Kompetensi 7

• Kerjakan di buku tugas

Tentukan nilai stasioner dan jenisnya dari fungsi-fungsi berikut ini (nomor 1–7).

1. $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$
2. $f(x) = 9 - 4x - x^2$
3. $f(x) = x^3 - 27x$
4. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12$
5. $f(x) = 2 - 4x + 6x^2 - 2x^3$
6. $f(x) = -x^6 - 4x^5$
7. $f(x) = x(x - 2)^2$
8. Fungsi permintaan dari seorang pedagang baju di suatu pasar mengikuti pola $Q = 21 - \frac{2}{3}P$, dengan Q jumlah unit barang yang diminta dan P harga barang dalam ribuan rupiah per unit.

a. Gambarlah grafiknya.
b. Tentukan jumlah baju yang diminta seandainya baju itu diberikan secara gratis. (**Petunjuk:** Barang diberikan gratis, berarti harga sama dengan nol)
c. Tentukan harga maksimum sedemikian rupa sehingga konsumen masih mampu membayarnya.

9. Fungsi permintaan suatu barang ditunjukkan dengan $Q = f(P) = 72 - 2P^2$, untuk Q barang yang diminta dan P harga per unit. Jika elastisitas permintaan pada tingkat harga tertentu (E) dinyatakan dengan $E = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$, tentukan elastisitas permintaan pada tingkat harga 3 (harga dalam ribuan rupiah).
10. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh persamaan $C = 4Q^2 - 200Q + 2.500$, dengan C biaya (dalam ribuan rupiah) dan Q unit barang. Jika biaya marjinal dinyatakan dengan $M_C = \frac{dC}{dQ}$, tentukan biaya total sedemikian rupa sehingga biaya marjinalnya maksimum.

F. Menggambar Grafik Fungsi

Setelah kalian mengenal bagaimana cara mencari titik-titik ekstrem dengan menggunakan turunan, selanjutnya kalian diajak untuk mempelajari cara menggambar sketsa grafik suatu fungsi.

Dalam menggambar grafik suatu fungsi $f(x)$, langkah-langkah yang perlu kalian perhatikan adalah sebagai berikut.

1. Menentukan titik potong fungsi $f(x)$ dengan sumbu-sumbu koordinat (sumbu X dan sumbu Y).
2. Menentukan titik-titik stasioner atau titik ekstrem dan jenisnya.
3. Menentukan titik-titik sembarang dalam fungsi untuk memperhalus grafik.

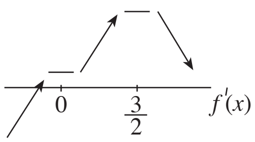
Contoh:

Sketsalah grafik fungsi $f(x) = 2x^3 - x^4$.

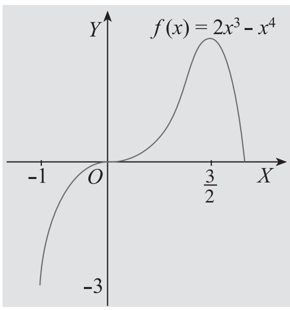
Jawab:

Langkah 1:

Titik potong dengan sumbu X, syaratnya $f(x) = 0$.
$f(x) = 2x^3 - x^4 = x^3(2 - x) = 0$ sehingga diperoleh $x = 0$ atau $x = 2$.
Dengan demikian, titik potong dengan sumbu X adalah (0, 0) dan (2, 0).



(a)



(b)

Gambar 5.11

Titik potong grafik dengan sumbu Y, syaratnya $x = 0$ sehingga $f(0) = 0$. Dengan demikian, titik potong dengan sumbu Y adalah $(0, 0)$.

Langkah 2:

Setelah menentukan titik-titik potong grafik dengan sumbu-sumbu koordinat, kita tentukan titik-titik ekstremnya.

Diketahui $f(x) = 2x^3 - x^4 \Leftrightarrow f'(x) = 6x^2 - 4x^3 = 2x^2(3 - 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = \frac{3}{2}.$$

a) *Untuk $x = 0$*

Untuk $x < 0$ maka $f'(x) > 0$. Akibatnya, untuk $x < 0$, fungsi $f(x)$ naik.

Untuk $0 < x < \frac{3}{2}$ maka $f'(x) > 0$. Akibatnya, untuk $0 < x < \frac{3}{2}$, fungsi $f(x)$ naik.

Dengan demikian, $x = 0$ merupakan nilai di mana terdapat titik belok.

b) *Untuk $x = \frac{3}{2}$*

Untuk $0 < x < \frac{3}{2}$ maka $f'(x) > 0$. Akibatnya, untuk $0 < x < \frac{3}{2}$, fungsi $f(x)$ naik.

Untuk $x > \frac{3}{2}$, maka $f'(x) < 0$. Akibatnya, untuk $x > \frac{3}{2}$, fungsi $f(x)$ turun.

Dengan demikian, $x = \frac{3}{2}$ merupakan nilai x di mana terdapat titik balik maksimum. Arah grafik tampak pada **Gambar 5.11** (a). Jadi, sketsa grafiknya seperti **Gambar 5.11** (b).

Soal Kompetensi 8

• Kerjakan di buku tugas

Buatlah sketsa grafik untuk fungsi-fungsi berikut ini.

1. $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$
2. $f(x) = 9 - x^2$
3. $f(x) = (3 - x)^2$
4. $f(x) = x^3$
5. $f(x) = x^4$
6. $f(x) = x(1 - x)^2$
7. $f(x) = x^4 - 4x^3$
8. $f(x) = 3x^5$
9. $f(x) = x^2(x^3 - 8)$
10. $f(x) = (x - 2)^4$

G. Aplikasi Turunan

Ilmu hitung diferensial (turunan fungsi) sangat banyak digunakan dalam berbagai ilmu, seperti fisika, kimia, ekonomi, dan berbagai ilmu terapan. Berikut ini akan dibahas dan dicontohkan aplikasi ilmu hitung turunan, seperti penentuan persamaan garis singgung, penentuan limit tak tentu, dan penyelesaian kasus-kasus maksimum/minimum, termasuk di dalamnya kasus-kasus yang sering dijumpai dalam bidang ekonomi.

1. Menentukan Persamaan Garis Singgung Kurva

Seperti yang telah kalian pelajari sebelumnya, turunan pertama suatu fungsi merupakan gradien persamaan garis singgung pada suatu titik tertentu. Apabila suatu gradien persamaan garis singgung $f(x)$ di titik (a, b) diketahui, kita dapat mencari persamaan garis singgungnya. Kalian tahu bahwa jika persamaan garis di titik (a, b) dan bergradien m adalah $y - b = m(x - a)$. Karena gradien garis singgung $f(x)$ di titik (a, b) adalah $y' = f'(a)$, persamaannya dapat dirumuskan dengan

$$y - b = f'(a)(x - a)$$

Contoh:

Tentukan persamaan garis singgung fungsi $f(x) = x^2$ di titik (2, 4).

Jawab:

Diketahui $f(x) = x^2$ maka $f'(x) = 2x$. Jadi, gradien garis singgungnya adalah $f'(2) = 2(2) = 4$.

Oleh karena itu, persamaan garis singgungnya adalah

$$\begin{aligned} y - 4 &= 4(x - 2) \\ \Leftrightarrow \quad y &= 4x - 4 \end{aligned}$$

Soal Kompetensi 9

• Kerjakan di buku tugas

Untuk soal nomor 1– 6, tentukan persamaan garis singgung fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = 2x^2 - 3x$, di titik $(\frac{3}{2}, 0)$
2. $f(x) = x^3 - x^2 + 4x - 3$, di titik (1, 4)
3. $g(x) = \dfrac{4}{(x^2 - 10)}$, di titik (3, –1)
4. $g(x) = x^2(2 - x)$, di titik (2, 0)

5. $h(x) = \dfrac{x-1}{x}$, di titik (1, –1)
6. $f(x) = \dfrac{3}{(x-4)^3}$, di titik $(2, \dfrac{-3}{8})$
7. Tentukan persamaan garis singgung yang menyinggung grafik
   $y = x^2 - 4x - 5$ dan sejajar garis $y = 2x - 5$.
8. Tentukan persamaan garis singgung grafik $y = x^2 - 2x - 3$ dan tegak lurus dengan garis $2y + x - 6 = 0$.
9. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 8x + 7$ di titik (1, 2) yang gradiennya $\dfrac{1}{2}$ dari gradien garis $y = \dfrac{1}{3}x + 9$.
10. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x - 8$ di titik $(3, \dfrac{-5}{2})$ yang gradiennya berkebalikan dengan gradien garis $4x + 2y + 5 = 0$.

2. Menentukan Limit Tak Tentu

Kalian telah mempelajari berbagai macam bentuk limit tak tentu pada bab sebelumnya. Limit-limit yang mempunyai bentuk tak tentu, selain dapat dikerjakan dengan cara-cara yang sudah dibahas di bab sebelumnya, juga dapat dikerjakan dengan aturan L'Hopital, dibaca *Loupital*. Dalam pembahasan kali ini, bentuk-bentuk tak tentu yang dimaksud adalah $\dfrac{0}{0}$ dan $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Apabila $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki turunan di $x = a$ dan $f(a) = g(a) = 0$, sedangkan $f'(a)$ dan $g'(a)$ tidak nol, berlaku

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Aturan inilah yang disebut dengan aturan L'Hopital. Apabila setelah kalian gunakan aturan L'Hopital dengan menentukan turunan pertama fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ ternyata masih dijumpai bentuk $\dfrac{0}{0}$ atau $\dfrac{\infty}{\infty}$, lanjutkan aturan L'Hopital itu dengan menentukan turunan kedua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Apabila untuk turunan kedua masih dijumpai bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$, lanjutkan aturan L'Hopital dengan menentukan turunan ketiga fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, demikian seterusnya sehingga tidak lagi dijumpai bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$. Agar lebih paham, perhatikan contoh berikut.

Contoh 1:

Tentukan $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$.

Jawab:

Misalkan $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = x^2 - 4$. Dengan demikian, nilai $f(2) = 0$ dan $g(2) = 0$. Akibatnya, $\frac{f(2)}{g(2)} = \frac{0}{0}$. Limit ini memiliki bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$.

Dengan menggunakan aturan L'Hopital, kita tentukan $f'(x)$ dan $g'(x)$, yaitu $f'(x) = 1$ dan $g'(x) = 2x$.

Jadi, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{2x} = \frac{1}{4}$.

Contoh 2:

Tentukan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+2x^2}{x^4-4x^3}$.

Jawab:

Misalkan $f(x) = x^3 + 2x^2$ dan $g(x) = x^4 - 4x^3$. Dengan demikian, $f(0) = 0$ dan $g(0) = 0$. Bentuk ini juga merupakan limit bentuk $\frac{0}{0}$. Karena $f'(x) = 3x^2 + 4x$ dan $g'(x) = 4x^3 - 12x^2$, nilai $f'(0) = 0$ dan $g'(0) = 0$.

Ternyata masih dijumpai bentuk tak tentu. Oleh karena itu, $f'(x)$ dan $g'(x)$ kita turunkan lagi (turunan kedua dari $f(x)$ dan $g(x)$) menjadi $f''(x) = 6x + 4$ dan $g''(x) = 12x^2 - 24x$.

Nilai $f''(0) = 4$ dan $g''(0) = 0$. Bentuk ini bukan bentuk tak tentu.

Jadi, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^3+2x^2}{x^4-4x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{6x+4}{12x^2-24x} = \frac{4}{0} = \infty$.

Contoh 3:

Tentukan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$.

Jawab:

Misalkan $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = x^2 + 2x - 3$. Dengan demikian,

$f(\infty) = \infty$ dan $g(\infty) = \infty$. Jadi, $\dfrac{f(\infty)}{g(\infty)} = \dfrac{\infty}{\infty}$.

Karena bentuk limit ini merupakan bentuk tak tentu, untuk menyelesaikannya, kita gunakan aturan L'Hopital.
Karena $f'(x) = 1$ dan $g'(x) = 2x + 2$, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x^2+2x-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x+2} \\ &= \frac{1}{2(\infty)+2} \\ &= \frac{1}{\infty} = 0\end{aligned}$$

Contoh 4:

Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2}{x^3+5x-3}$.

Jawab:

Misalkan $f(x) = 2x^3 + 3x^2$ dan $g(x) = x^3 + 5x - 3$. Dengan demikian, $f(\infty) = \infty$ dan $g(\infty) = \infty$.

Bentuk ini adalah bentuk limit tak tentu $\dfrac{\infty}{\infty}$ sehingga kita kerjakan dengan aturan L'Hopital. Karena $f'(x) = 6x^2 + 6x$ dan $g'(x) = 3x^2 + 5$, akibatnya $f'(\infty) = \infty$ dan $g'(\infty) = \infty$ (masih dalam bentuk tak tentu). Selanjutnya, diteruskan dengan menentukan turunan kedua, yaitu $f''(x) = 12x + 6$ dan $g''(x) = 6x$. Nilai $f''(\infty) = \infty$ dan $g''(\infty) = \infty$ (masih dalam bentuk tak tentu). Kita lanjutkan lagi dengan menentukan turunan ketiga, yaitu $f'''(x) = 12$ dan $g'''(x) = 6$. Nilai $f'''(\infty) = 12$ dan $g'''(\infty) = 6$.

Jadi, diperoleh
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2}{x^3+5x-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2+6x}{3x^2+5} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{12x+6}{6x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{12}{6} = 2.\end{aligned}$$

Soal Kompetensi 10

• Kerjakan di buku tugas

Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi berikut dengan aturan L'Hopital.

1. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x - x^2}{x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - x^2 - x}{x^2 + 3x}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5 - x^3}{x^3}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 5x^2 - 2x - 3}{4x^3 - 13x^2 + 4x - 3}$
6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + a^2}{x^3 + a^3}$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + 2x - 6}{2x^4 - 7}$
8. $\lim\limits_{x \to 15} \dfrac{(x^2 - 225)^3}{(15 - x)^{10}}$
9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^5}{(1 - x^5)}$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 - x^2)^5}{x^{10} - 1}$

3. Menyelesaikan Kasus Maksimum atau Minimum

Selain dapat digunakan untuk menentukan kecepatan, percepatan, dan menentukan nilai limit bentuk tak tentu, turunan juga dapat digunakan untuk mencari titik-titik ekstrem (maksimum atau minimum) dari suatu fungsi. Konsep mencari maksimum dan minimum ini secara umum dapat diterapkan pada kasus-kasus yang sering dijumpai dalam kehidupan sekitar kita, di antaranya kasus-kasus dalam ekonomi. Untuk dapat menyelesaikannya, ubahlah kasus-kasus tersebut ke dalam model matematika. Kemudian, selesaikan model itu. Agar kalian paham, pelajari contoh-contoh berikut.

Contoh 1:

Jumlah dua bilangan adalah 75. Tentukan kedua bilangan itu agar hasil perkaliannya maksimum dan hasil perkalian maksimum itu.

Jawab:

Misalkan kedua bilangan adalah x dan y dan hasil kalinya P. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} x + y = 75 \quad &\Leftrightarrow \quad x = 75 - y \text{ dan} \\ P = xy \quad &\Leftrightarrow \quad P = (75 - y)y \\ &\Leftrightarrow \quad P = 75y - y^2. \end{aligned}$$

Kemudian, akan kita cari nilai ekstremnya dengan menyamakan turunan fungsi P dengan nol.

$$\frac{dP}{dy} = 75 - 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = 75 \Leftrightarrow y = 37{,}5$$

Jadi, diperoleh nilai $x = 75 - y = 75 - 37{,}5 = 37{,}5$.
Dengan demikian, untuk $x = 37{,}5$ dan $y = 37{,}5$, diperoleh hasil perkalian yang maksimum, yaitu $P = 37{,}5 \times 37{,}5 = 1.406{,}25$.

Contoh 2:

Diketahui suatu persegi panjang dengan keliling 200 cm. Tentukan berapa ukuran panjang dan lebarnya agar luasnya maksimum. Tentukan pula luas maksimum yang dimaksud.

Jawab:

Misalkan panjang persegi panjang adalah p cm dan lebarnya l cm.
Kelilingnya adalah

$$\begin{aligned} K &= 2p + 2l \\ \Leftrightarrow \quad 200 &= 2p + 2l \\ \Leftrightarrow \quad p &= 100 - l \end{aligned}$$

Luasnya $L = pl = (100 - l)l = 100l - l^2$
Selanjutnya, dicari nilai ekstrem. Agar diperoleh nilai ekstrem, turunan fungsi L harus bernilai nol.

$$\frac{dL}{dl} = 100 - 2l = 0 \Leftrightarrow l = 50 \Leftrightarrow p = 100 - l = 100 - 50 = 50$$

Dengan demikian, dengan lebar $l = 50$ cm dan panjang $p = 50$ cm, persegi panjang tersebut memiliki luas maksimum.
Luas maksimum yang dimaksud adalah $L = 50 \times 50 = 2.500$.
Jadi, luas maksimumnya 2.500 cm^2.

Contoh 3:

Biaya total untuk memproduksi x unit kursi adalah $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ (dalam ribuan rupiah), sedangkan harga jualnya $50 - \frac{1}{2}x$ (dalam ribuan rupiah) per kursi. Berapakah produksi tiap hari yang seharusnya agar diperoleh keuntungan maksimum? Berapakah keuntungan maksimum itu?

Jawab:

Diketahui biaya total untuk x unit kursi $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$.

Harga jual x unit kursi adalah $x(50 - \frac{1}{2}x) = 50x - \frac{1}{2}x^2$.

Keuntungan adalah $(50x - \frac{1}{2}x^2) - (\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$

Misalkan fungsi keuntungan $k(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$.

Agar diperoleh keuntungan maksimum maka $k'(x) = 0$.

Oleh karena itu, $k'(x) = \frac{-6}{4}x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \times \frac{4}{6} = 10$ kursi

Jadi, agar diperoleh keuntungan maksimum, seharusnya produksi kursi per hari adalah 10 kursi. Keuntungan maksimum adalah

$k(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 15x - 25$

$k(10) = -\frac{3}{4}(10)^2 = 15(10) - 25 = 50$

Dengan demikian, keuntungan maksimum per hari adalah 50 ribu rupiah.

Problem Solving

Fungsi permintaan yang dihadapi oleh seorang produsen untuk x unit barang ditunjukkan oleh $p = 500 - x$. Bagaimana fungsi penerimaan totalnya? Tentukan tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum, dan besarnya penerimaan total maksimum tersebut.

Jawab:

Dari soal diketahui $p = 500 - x$. Oleh karena itu, fungsi penerimaan totalnya $R = xp = x(500 - x) = 500x - x^2$.

Untuk mencari penerimaan total (R) maksimum maka $R' = 0$.

Karena $R = 500\,x - x^2$ maka $R' = 500 - 2x$.

$R' = 0 \Leftrightarrow 500 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 500$

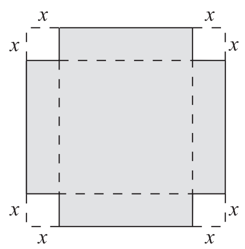
$\Leftrightarrow x = 250$

Biaya maksimum $R = 500x - x^2 = 500(250) - (250)^2 = 62.500$ rupiah.

Soal Kompetensi 11

• Kerjakan di buku tugas

1. Jumlah dua bilangan adalah 54. Tentukan kedua bilangan agar hasil kalinya maksimum.
2. Jika x dan y bilangan bulat positif sedemikian rupa sehingga jumlahnya 30, tentukan x dan y supaya xy^2 bernilai maksimum.



Gambar 5.12

3. **Gambar 5.12** adalah sebuah seng yang berbentuk persegi dengan panjang sisi 50 cm. Seng tersebut akan dibuat sebuah bak kecil terbuka dengan menggunting ujung-ujungnya yang berbentuk persegi kecil dengan ukuran x. Tentukan panjang x agar bak kecil tersebut mampu digunakan untuk menampung air sebanyak mungkin.
4. Luas permukaan sebuah kotak tanpa tutup dengan alas berbentuk persegi adalah 108 cm^2. Tentukan ukuran kotak tersebut agar volumenya maksimum.
5. Sebuah perusahaan minuman akan membuat kaleng yang berbentuk tabung tertutup dari bahan logam dengan volume 300 cc. Tentukan ukuran kaleng yang akan dibuat sedemikian rupa sehingga bahan logam yang dibutuhkan luasnya seminimal mungkin.
6. Diketahui suatu kurva memiliki persamaan $y = 2\sqrt{x}$. Tentukan jarak terdekat titik $A(2, 1)$ ke kurva tersebut.
7. Untuk memproduksi x unit barang per hari diperlukan biaya $C(x) = (x^3 - 2.000x^2 + 3.000.000x)$ rupiah. Tentukan jumlah unit yang diproduksi per hari agar biaya produksinya minimum.
8. Biaya total untuk memproduksi x kotak obat setiap hari $(\frac{1}{5}x^2 + 5x + 5)$ dan harga jual setiap kotak obat $(20 - \frac{1}{2}x)$ (dalam ribuan rupiah). Berapa kotak obat harus diproduksi setiap hari agar diperoleh keuntungan maksimum? Tentukan pula keuntungan maksimum itu.
9. Sebuah pabrik akan memproduksi kotak yang terbuat dari tripleks tanpa tutup atas dengan kapasitas 36.000 cm^3. Jika ukuran panjang kotak dua kali lebarnya, tentukanlah ukuran kotak agar bahan yang dibutuhkan seminimum mungkin.
10. Fungsi permintaan suatu barang dirumuskan dengan $p = 100 - 0{,}5x$.
    Tentukan
    a. persamaan penerimaan total;
    b. tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum;
    c. besar penerimaan total maksimum itu.
11. Misalkan $C(t)$ adalah banyaknya uang tunai per penduduk yang beredar pada tahun ke-t. Berikut ini adalah data dari Departemen Keuangan di Amerika Serikat terkait hal tersebut.

Tahun Ke-*t*	ke-1	ke-2	ke-3	ke-4
***C*(*t*)**	\$177	\$265	\$571	\$1.063

Tantangan

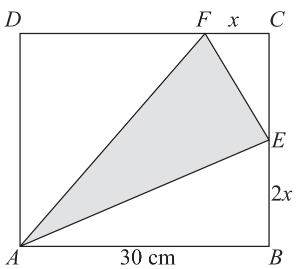
Penalaran

• Kerjakan di buku tugas

Tentukan volume maksimum sebuah tabung yang terletak di dalam suatu bola berjari-jari R jika sisi alas dan sisi atas tabung itu menyinggung sisi bagian dalam bola.

Perkirakan laju peredaran uang tunai pada tahun ke-3.
Petunjuk: Gunakan konsep turunan
$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t}$.

12. Jika $p(x)$ adalah nilai total produksi pada waktu terdapat x pekerja di pabrik maka produktivitas rata-rata tenaga kerja di pabrik tersebut dirumuskan dengan $A(x) = \frac{p(x)}{x}$.
    a. Carilah $A'(x)$? Apa maksud dari $A'(x)$?
    b. Perlihatkan bahwa jika $p'(x)$ lebih besar daripada produktivitas rata-rata maka $A'(x) > 0$.
13. Saat sebuah toko dibuka, jumlah pengunjung toko bertambah dari nol ke suatu bilangan maksimum, kemudian turun kembali ke nol pada waktu toko ditutup. Jika jumlah pengunjung (N) dalam toko tersebut dinyatakan sebagai fungsi waktu t oleh $N(t) = -15t^2 + 80t$ dengan $t = 0$ berhubungan dengan waktu ketika toko dibuka pada jam 10.00 pagi, pada pukul berapakah toko tersebut memiliki jumlah pengunjung maksimum? Berapakah jumlah maksimum pengunjung tersebut? Pada pukul berapakah toko tersebut ditutup?
14. Pada **Gambar 5.13** tampak bahwa persegi $ABCD$ mempunyai panjang sisi 30 cm. Apabila $BE = 2x$ cm dan $CF = x$ cm, tentukan luas maksimum segitiga AEF.



Gambar 5.13

15. Misalkan x adalah jumlah yang dihabiskan oleh suatu perusahaan (dalam ratusan dolar) untuk biaya iklan dan p adalah keuntungan yang diperolehnya. Dalam hal ini $p = 230 + 20x - 0{,}5x^2$. Berapa pengeluaran untuk iklan yang memberikan keuntungan maksimum? Berapa keuntungan maksimum itu?

Rangkuman

1. Diberikan fungsi $y = f(x)$. Apabila $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ada, fungsi $y = f(x)$ tersebut dikatakan mempunyai turunan pertama di titik x dan dinotasikan dengan $f'(x)$ atau $\frac{dy}{dx}$ atau y' atau $\frac{df}{dx}$.
2. $f'(x)$ dapat diartikan sebagai gradien persamaan garis singgung $f(x)$ di titik (x, y).
3. Apabila $f(x) = x^n$ maka $f'(x) = nx^{n-1}$. Nilai n dapat berupa bilangan bulat (kecuali nol) maupun bilangan rasional.
4. Rumus turunan suatu fungsi
    a. Jika $f(x) = u(x) + v(x)$, dengan $u'(x)$ dan $v'(x)$ ada, turunannya dirumuskan dengan $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

b. Jika $f(x) = u(x) - v(x)$, dengan $u'(x)$ dan $v'(x)$ ada, turunannya dirumuskan dengan $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

c. Jika $f(x) = u(x)\ v(x)$, dengan $u'(x)$ dan $v'(x)$ ada, turunannya dirumuskan $f'(x) = u'(x)\ v(x) + u(x)\ v'(x)$.

d. Jika $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ dengan $u'(x)$ dan $v'(x)$ ada, turunannya dirumuskan dengan

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

5. Diberikan suatu fungsi $f(x)$.
   a. Apabila suatu interval nilai x membuat $f'(x) > 0$ maka $f(x)$ fungsi yang naik pada interval tersebut.
   b. Apabila suatu interval nilai x membuat $f'(x) < 0$ maka $f(x)$ fungsi yang turun pada interval tersebut.
   c. Apabila suatu nilai x membuat $f'(x) = 0$ maka $f(x)$ fungsi yang stasioner (tidak naik atau turun) pada titik tersebut.
6. Misalkan $x = a$ adalah titik stasioner. Berikut ini adalah jenis-jenis titik stasioner.
   a. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a $(x < a)$ membuat $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a $(x > a)$ membuat $f(x)$ naik maka $x = a$ adalah titik balik minimum.
   b. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a $(x < a)$ membuat $f(x)$ naik dan nilai x yang lebih besar dari a $(x > a)$ membuat $f(x)$ turun maka $x = a$ adalah titik balik maksimum.
   c. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a $(x < a)$ membuat $f(x)$ turun dan nilai x yang lebih besar dari a $(x > a)$ membuat $f(x)$ juga turun maka $x = a$ adalah titik belok.
   d. Apabila nilai x yang lebih kecil dari a juga naik maka $x = a$ adalah titik belok.
7. Dalam menggambar grafik suatu fungsi $f(x)$, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.
   a. Menentukan titik potong fungsi $f(x)$ dengan sumbu-sumbu koordinat (sumbu X dan sumbu Y).
   b. Menentukan titik-titik stasioner atau ekstrem dan jenisnya.
   c. Menentukan titik-titik sembarang dalam fungsi untuk memperhalus grafik.

Refleksi

Perhatikan kembali materi limit fungsi. Adakah hubungan kedekatan antara materi limit fungsi dan diferensial? Menurutmu, apa yang menarik dari materi diferensial? Apakah materi ini cukup membantu kalian dalam menyelesaikan kasus-kasus matematika?

Tes Kemampuan Bab V

• Kerjakan di buku tugas

A. Pilihlah jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e.

1. Turunan fungsi $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x + 2$ adalah ....
   a. $15x^3 - 8x^2 + 6x$
   b. $15x^2 - 8x + 6$
   c. $15x^3 - 8x^2 + 6$
   d. $15x^2 - 4x + 6$
   e. $15x^2 - 4x + 2$

2. Turunan fungsi $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2x^2}$ adalah ....
   a. $\dfrac{6x^2 + 4x - 3}{(3x - 2x^2)^2}$
   b. $\dfrac{6x^2 - 4x - 3}{(3x - 2x^2)^2}$
   c. $\dfrac{6x^2 - 4x + 3}{(3x - 2x^2)^2}$
   d. $\dfrac{12x^2 - 4x + 6}{(3x - 2x^2)^2}$
   e. $\dfrac{6x^2 - 4x - 3}{(3 - 2x^2)^2}$

3. Turunan dari $y = ((2x^2 - 5)^3 + 5)^5 - 2$ adalah ....
   a. $60x(2x^2 - 5)^4(2x^2 - 5)^2$
   b. $60x((2x^2 - 5) + 5)^4(2x^2 - 5)^2$
   c. $60x((2x^2 - 5) + 5)^4((2x^2 - 5) - 5)^2$
   d. $60((2x^2 - 5) + 5)^4(2x^2 - 5)^2$
   e. $60(2x^2 - 5)^4(2x^2 - 5)^2$

4. Diketahui fungsi $f(x) = ax^2 - 6x + 2$. Jika $f'(x)$ turunan dari $f(x)$ dan nilai $f'(10) = 14$ maka $20a^2 + a + 1 = ...$
   a. 1
   b. 14
   c. 20
   d. 22
   e. 31

5. Misalkan suatu fungsi dituliskan dengan $f(x) = ax + b$.
   Jika $a = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(2+h) - g(2)}{h}$, untuk $g(x) = x^2 + 1$ dan $b = h'(2)$, untuk $h(x) = 4x^2 - 4x + 4$ maka rumus $f(x) = ...$
   a. $4x - 12$
   b. $-4x + 12$
   c. $-4x - 12$
   d. $4x + 12$
   e. $12x - 4$

6. Grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ turun untuk nilai-nilai ....
   a. $x < -2$ atau $x > 0$
   b. $0 < x < 2$
   c. $-2 < x < 0$
   d. $x < 0$
   e. tidak ada yang memenuhi

7. Gradien garis singgung kurva $y = px^2 + q$ di titik $(-1, 2)$ adalah 6. Nilai p dan q berturut-turut adalah ....
   a. 3 dan 1
   b. –3 dan –1
   c. –3 dan 5
   d. 3 dan –5
   e. –1 dan 3

8. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 2$ yang melalui titik $(2, 6)$ akan memotong sumbu X di titik ....
   a. $(\frac{1}{2}, 0)$
   b. $(2, 0)$
   c. $(3, 0)$
   d. $(1, 0)$
   e. $(1\frac{1}{2}, 0)$

9. Grafik fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ akan naik pada interval ....
   a. $1 < x < 2$
   b. $x < -2$ atau $x > -1$
   c. $-1 < x < 2$
   d. $-2 < x < -1$
   e. $x < 1$ atau $x > 2$
10. Nilai stasioner fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ adalah ...
    a. –2 dan 4
    b. –35
    c. 1
    d. 21 dan –87
    e. 1, 21, dan –77
11. Koordinat titik pada parabola $y = x^2 - 4x + 1$ yang garis singgungnya sejajar dengan sumbu X adalah ....
    a. (3, –2)
    b. (3, 2)
    c. (–2, 3)
    d. (2, 3)
    e. (2, –3)
12. Fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ akan stasioner di $x =$ ....
    a. 2
    b. 3
    c. 2 dan 3
    d. 1 dan 5
    e. –3
13. Selembar karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 cm dan panjang 8 cm, dipotong pada keempat sudutnya berbentuk persegi dengan sisi x cm. Kemudian, dibentuk sebuah bangun berbentuk kotak tanpa tutup. Volume maksimum kotak yang terbentuk adalah ....
    a. 36 cm^3
    b. 30 cm^3
    c. 28 cm^3
    d. 18 cm^3
    e. 16 cm^3
14. Koordinat titik pada parabola $y = x^2 - 4x + 1$ yang garis singgungnya sejajar dengan sumbu X adalah ....
    a. (3, –2)
    b. (2, –3)
    c. (3, 2)
    d. (2, 3)
    e. (–2, 3)
15. Sebuah benda berbentuk tabung tertutup mempunyai volume 128π m^3. Jika tabung itu dibuat sedemikian rupa sehingga luas seluruh permukaannya sekecil mungkin, panjang jari-jari tabung adalah ....
    a. 6 m
    b. 7 m
    c. 8 m
    d. 9 m
    e. 10 m
16. Jika $a + b = 6$, nilai maksimum dari ab^2 adalah ....
    a. 16
    b. 32
    c. 48
    d. 60
    e. 64
17. Diketahui fungsi $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$. Grafik fungsi ini akan mempunyai
    1) ekstrem maksimum di $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{27}\right)$;
    2) ekstrem minimum di (1, –5);
    3) titik potong dengan sumbu X di (–3, 0);
    4) titik potong dengan sumbu Y di (0, –3).

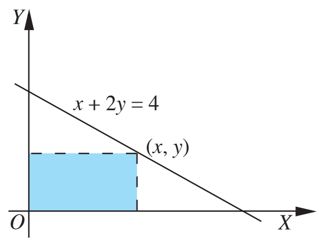
    Pernyataan yang benar adalah ....
    a. 1, 2, 3, dan 4
    b. 1, 2, dan 3
    c. 1 dan 3
    d. 2 dan 4
    e. 4

18. Nilai minimum dan maksimum fungsi $f(x) = 8 + 3x^2 - 3x^3$ pada interval $1 \leq x \leq 4$ berturut-turut adalah ....
    a. 8 dan $8\frac{4}{9}$
    b. –8 dan 20
    c. 10 dan 12
    d. –8 dan 10
    e. –8 dan 12
19. Persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - x^2 + 6$ di titik dengan absis –2 adalah ....
    a. $16x - y + 26 = 0$
    b. $16x + y + 26 = 0$
    c. $16x - y - 26 = 0$
    d. $16x - y + 28 = 0$
    e. $16x + y + 28 = 0$
20. Misalkan fungsi $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3$. Grafik fungsi $f(x)$ turun pada interval ....
    a. $x < 0$ atau $x > 3$
    b. $0 < x < 3$
    c. $-3 < x < 0$
    d. $x < 0$
    e. $x > 3$
21. Panjang suatu persegi panjang adalah x dan lebarnya y dengan hubungan $x + 2y = 2a$. Luas persegi panjang itu akan maksimum jika ....
    a. $x = \frac{1}{2}y = a$
    b. $y = 2a$
    c. $x = 2a$
    d. $y = \frac{1}{2}a$
    e. $x = \frac{1}{2}a$
22. Nilai minimum fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2$ pada interval tertutup $-1 \leq x \leq 5$ adalah ....
    a. $f(-1)$
    b. $f(0)$
    c. (2)
    d. $f(4)$
    e. $f(5)$
23. Pernyataan berikut yang benar untuk grafik fungsi $f(x) = x^4 - 32x$ adalah ....
    a. mempunyai titik tertinggi (0, 0)
    b. mempunyai titik terendah (2, –40)
    c. mempunyai titik belok di $x = 2$
    d. fungsi naik pada $x < 2$
    e. fungsi turun pada $x > 2$
24. Suatu pabrik mampu memproduksi x unit barang dengan biaya total $(80 + 2x + 0{,}2x^2)$ ribu rupiah. Semua produk terjual dengan harga Rp1.500,00 untuk setiap unitnya. Agar diperoleh keuntungan maksimum, jumlah unit yang harus diproduksi per harinya adalah ....
    a. 3.745
    b. 3.848
    c. 3.920
    d. 4.120
    e. 4.980
25. Di suatu titik pada kurva $y = 2\sqrt{2 - x}$, garis singgungnya sejajar dengan garis $x = -y$. Jika koordinat titik singgungnya (p, q) maka nilai $2p + 2q + 1 = ...$
    a. –1
    b. 3
    c. 5
    d. 7
    e. 9
26. Perusahaan *home industry* pembuat mainan anak-anak mampu memproduksi x unit barang dengan biaya total $60 + 4x + 0{,}5x^2$ (dalam ribuan rupiah). Jika semua produk terjual dengan harga 85 (dalam ribuan rupiah) untuk setiap unitnya, keuntungan maksimum yang diperoleh *home industry* itu adalah ....
    a. Rp3.544.500,00
    b. Rp3.546.800,00
    c. Rp3.584.900,00
    d. Rp3.622.500,00
    e. Rp3.870.600,00

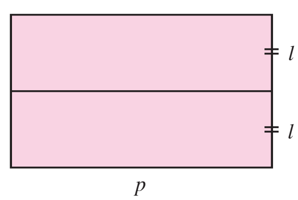
27. Sebuah bak air tanpa tutup dibuat dengan alas berbentuk persegi. Jumlah luas keempat dinding dan alasnya 27 m^2. Volume maksimum diperoleh jika luas alasnya ....
    a. 1 m^2
    b. 4 m^2
    c. 9 m^2
    d. 16 m^2
    e. 25 dm^2
28. Fungsi f ditentukan oleh $y = f(x) = x + \sqrt{p-2x}$. Jika fungsi f mempunyai nilai maksimum 4 maka nilai p = ...
    a. 3
    b. 5
    c. 7
    d. 9
    e. 11
29. Kurva fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 12$ bersifat naik untuk nilai-nilai x yang berada pada interval ....
    a. $-4 < x < 2$
    b. $-2 < x < 4$
    c. $x < -4$ atau $x > 2$
    d. $x < -2$ atau $x > 4$
    e. $x < -2$ atau $x > 2$
30. Volume sebuah kotak yang alasnya berbentuk persegi adalah 2 dm^3. Biaya pembuatan per satuan luas bidang alas dan atas kotak itu adalah dua kali biaya pembuatan bidang sisinya. Biaya pembuatan akan minimum jika luas permukaan kotak itu adalah ....
    a. 4 dm^2
    b. 6 dm^2
    c. 8 dm^2
    d. $6\sqrt[3]{4}$ dm^2
    e. $8\sqrt[3]{4}$ dm^2

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Tentukan $f'(x)$ dari $f(x)$ berikut ini.
    a. $f(x) = (6x - 3)(2x - 1)$
    b. $f(x) = (1 + (2 + (3 + x)^2)^2)^2$
2. Diketahui kurva $y = x^3 + px^2 + qx$ turun pada interval $\frac{1}{4} < x < 1$. Tentukan nilai p dan q.
3. Tentukan titik pada kurva $y = x^3 + 5$ sehingga garis singgung kurva di titik itu
    a. sejajar dengan garis $12x - y = 7$;
    b. tegak lurus dengan garis $x + 3y = 2$.
4. Misalkan diketahui fungsi permintaan $P = 300 - 2Q$. Tentukan
    a. persamaan fungsi penerimaan total;
    b. tingkat penjualan yang menghasilkan penerimaan total maksimum;
    c. tentukan besar penerimaan total maksimum.
5. Sebuah segitiga dibatasi oleh garis $x + 2y = 4$, sumbu X, dan sumbu Y. Dari sebuah titik M pada garis itu dibuat garis-garis tegak lurus pada sumbu X dan sumbu Y sehingga membentuk sebuah persegi panjang. Tentukan ukuran persegi panjang tersebut agar luasnya maksimum.



6. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar. Tentukan panjang kerangka (p) dan lebar (l) agar luas penampang kerangka menjadi maksimum.



7. Suatu perusahaan menghasilkan produk dalam x jam dengan biaya per jam $4x + \frac{120}{x} - 800$ (dalam ratusan ribu rupiah). Tentukan waktu yang diperlukan untuk memproduksi agar biaya produksi minimum.
8. Misalkan x adalah jumlah barang yang terjual tiap minggu pada suatu perusahaan, $h(x)$ adalah harga satuan dari barang (dalam \$), dan $R(x)$ adalah pendapatan tiap minggu (dalam \$) maka hubungan ketiganya adalah $R(x) = xh(x)$. Diketahui $h(x) = 4 - 0{,}001x$.
   a. Tentukan $R(x)$ dan kapan pendapatan tiap minggu akan naik? Kapan akan turun?
   b. Tentukan harga satuan barang untuk memaksimumkan pendapatan tiap minggu.
   c. Tentukan pendapatan maksimum tiap minggu.
9. Dari sehelai karton, akan dibuat sebuah kotak tanpa tutup dengan alas berbentuk persegi. Jika luas sisinya 432 cm^2, tentukan volume kotak maksimum yang mungkin dibuat.
10. Seorang sales setiap hari mampu menjual x unit barang dagangannya dengan harga $H(x) = 300 - 0{,}02x$ per unit. Beban biaya x unit barang dinyatakan dengan $B(x) = 60x + 300.000$. Tentukan jumlah barang yang harus terjual agar keuntungannya maksimum. Tentukan pula besar keuntungan maksimumnya.

Kata Bijak

Keunggulan adalah pengembangan dari suatu kelebihan, kegagalan adalah akumulasi dari segala kekurangan.

Latihan Ulangan Umum Semester 2

• Kerjakan di buku tugas

A. Pilihlah jawaban yang tepat dengan memberi tanda silang (x) pada huruf a, b, c, d, atau e.

1. Jika $g(x) = 2x + 1$ dan $f(x) = x^2$ maka $(f \circ g)(x)$ adalah ....
   a. $2x^2 + 4x + 1$
   b. $2x^2 - 4x + 2$
   c. $4x^2 + 4x + 1$
   d. $4x^2 - 4x + 1$
   e. $4x^2 - 4x - 1$

2. Diketahui fungsi $g(x) = 2x - 5$ dan $(f \circ g)(x) = 6x - 13$ maka $f(3)$ sama dengan ....
   a. -2
   b. -1
   c. 1
   d. 2
   e. 11

3. Diketahui fungsi $f(x) = 6x - 3$, $g(x) = 5x + 4$, dan $(f \circ g)(a) = 81$. Nilai a adalah ....
   a. -2
   b. -1
   c. 1
   d. 2
   e. 3

4. Fungsi $f : R \to R$ didefinisikan sebagai $f(x) = \dfrac{2x-1}{3x+4}, x \neq \dfrac{-4}{3}$.
   Invers dari fungsi f adalah $f^{-1}(x) =$ ....
   a. $\dfrac{4x-1}{3x+2}, x \neq \dfrac{-2}{3}$
   b. $\dfrac{4x+1}{3x-2}, x \neq \dfrac{2}{3}$
   c. $\dfrac{4x+1}{2-3x}, x \neq \dfrac{2}{3}$
   d. $\dfrac{4x-1}{3x-2}, x \neq \dfrac{2}{3}$
   e. $\dfrac{4x+1}{3x+2}, x \neq \dfrac{-2}{3}$

5. Diketahui fungsi f dengan rumus $f(x) = 2x - 3$ dan f^{-1} adalah fungsi invers dari f. Nilai dari $f^{-1}(-1)$ adalah ....
   a. -2
   b. -1
   c. 1
   d. 2
   e. 3

6. Diketahui $f : R \to R$ dan $g : R \to R$; dengan $g(x) = 3x + 7$ dan $(g \circ f)(x) = 15x^2 - 6x + 19$. Rumus untuk $f(x) =$ .... (UAN 2003)
   a. $5x^2 - 6x + 12$
   b. $5x^2 - 6x + 4$
   c. $5x^2 - 3x + 4$
   d. $5x^2 - 2x + 4$
   e. $5x^2 - 2x + 3$

7. Nilai dari $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ adalah ....
   a. -2
   b. -1
   c. 0
   d. 1
   e. 2

8. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - \sqrt{2x + 3}}{9 - x^2}$ adalah ....
   a. $-\dfrac{1}{9}$
   b. $-\dfrac{1}{8}$
   b. $\dfrac{1}{3}$
   d. $\dfrac{1}{2}$
   e. $\dfrac{2}{3}$

9. Nilai $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - x - 6}{x + 2}$ adalah ....
   a. –6
   b. –5
   c. 5
   d. –1
   e. 1

10. Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 3x + 4}{3x^2 + 2x + 3} = ...$
    a. 1
    b. $-\dfrac{1}{3}$
    c. $\dfrac{1}{3}$
    d. ∞
    e. 3

11. Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}) = ...$
    a. 0
    b. ∞
    c. 1
    d. –1
    e. $\dfrac{1}{2}$

12. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - x - 6}{4 - \sqrt{5x + 1}} = ...$ (UN 2007)
    a. –8
    b. –6
    c. 6
    d. 8
    e. ∞

13. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1 - 2x} - \sqrt{1 + 2x}}$ adalah ....
    (UN 2004)
    a. –2
    b. 0
    c. 1
    d. 2
    e. 4

14. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x(x + 5)} - 2x + 1 = ...$
    a. 0
    b. $\dfrac{1}{4}$
    c. $\dfrac{1}{2}$
    d. $\dfrac{9}{4}$
    e. ∞

15. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2 - x}{x^2 - 4} - \dfrac{1}{x - 2} \right)$ adalah .... (UN 2004)
    a. $-\dfrac{1}{2}$
    b. $-\dfrac{1}{4}$
    c. 0
    d. $\dfrac{1}{4}$
    e. $\dfrac{1}{2}$

16. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{9 + x} - \sqrt{9 - x}}$ adalah ....
    (UAN 2003)
    a. 3
    b. 6
    c. 9
    d. 12
    e. 15

17. Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x + 5} - \sqrt{2x - 1} = ...$ (UAN 2001)
    a. –1
    b. 0
    c. 1
    d. 2
    e. ∞

18. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \sqrt{1 + x^2}} = ...$ (UAN 2000)
    a. 2
    b. 0
    c. –1
    d. –2
    e. –3

19. Nilai $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)(x + 5)(6x + 1)}{3x^3 + x^2 + 6x + 1} = ...$
    a. 1
    b. 2
    c. 3
    d. 4
    e. 5

20. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = ...$
    a. 0
    b. 4
    c. 5
    d. 6
    e. 12

21. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}} = ...$
    a. 3
    b. 4
    c. 5
    d. 6
    e. 7

22. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x}{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-2x}} = ...$
    a. 0
    b. 1
    c. 2
    d. 4
    e. ∞

23. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \frac{2}{3x^2}$ adalah $f^{-1}(x) = ...$
    a. $\frac{2}{6x}$
    b. $\frac{-4}{3x}$
    c. $\frac{2}{x^3}$
    d. $\frac{-4}{3x^3}$
    e. $-\frac{6}{3x^3}$

24. Fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ mempunyai ....
    a. nilai maksimum di $x = -3$ dan minimum di $x = 0$
    b. nilai minimum di $x = 1$ dan maksimum di $x = 0$
    c. nilai maksimum di $x = 1$ dan minimum di $x = 1$
    d. nilai minimum di $x = 3$ dan minimum di $x = -3$
    e. nilai maksimum di $x = -3$ dan minimum di $x = 1$

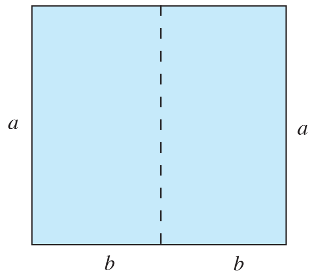
25. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = \frac{3x^2}{2-2x^3}$ adalah $f'(x) = ...$
    a. $\frac{6x(1+x^3)}{2-2x^2}$
    b. $\frac{\frac{3}{2}x(1+x^3)}{(1-x^3)^2}$
    c. $\frac{\frac{3}{2}x(1+x^3)}{(1-x^2)^3}$
    d. $\frac{3x(1+x^3)}{2(1+x^3)^2}$
    e. $\frac{3x(1-x^3)}{2(1+x^3)^2}$

26. Nilai minimum fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3$ dalam interval $-2 \leq x \leq 1$ adalah ....
    a. –6
    b. –1
    c. 3
    d. 6
    e. 8

27. Fungsi f yang dirumuskan dengan $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9 + 5$, turun pada interval ....
    a. $-1 < x < 3$
    b. $-3 < x < 3$
    c. $1 < x < 3$
    d. $x < -1$ atau $x > 3$
    e, $x < -3$ atau $x > 3$

28. Fungsi $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$ naik dalam interval ....
    a. $-3 < x < 2$
    b. $-2 < x < 3$
    c. $2 < x < 3$
    d. $x < -2$ atau $x > 2$
    e. $x < -3$ atau $x > 2$

29. Sebuah tabung tanpa tutup terbuat dari seng tipis dapat memuat zat cair sebanyak 64 cm^3. Luas seluruh permukaan tabung itu akan minimum jika jari-jari tabung sama dengan ....
    a. $\frac{4}{\pi\sqrt[3]{\pi}}$ cm
    b. $\frac{4}{\sqrt{\pi^3}}$ cm
    c. $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ cm
    d. $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi^2}}$ cm
    e. $\frac{4}{\pi^2\sqrt{\pi}}$ cm

30. 

Dua kandang berdampingan masing-masing berukuran panjang a meter dan lebar b meter dengan luas masing-masing adalah 12 m^2. Agar pagar yang diperlukan untuk membatasi kedua kandang tersebut (garis putus-putus) panjangnya minimum maka panjang a dan b berturut-turut adalah .... (UMPTN 1993)

a. 2 m dan 6 m
b. 6 m dan 2 m
c. 4 m dan 3 m
d. 3 m dan 4 m
e. $2\sqrt{3}$ m dan $2\sqrt{3}$ m

31. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 2x^2 - x + 3$ yang tegak lurus garis $x + 3y + 5 = 0$ adalah ....
a. $y = 3x + 1$
b. $y = 3x - 1$
c. $y = -3x + 1$
d. $y = -3x + 3$
e. $y = -x + 5$

32. Biaya total untuk memproduksi n unit barang per hari ditunjukkan oleh $\frac{1}{4}x^2 + 60x + 15$, sedangkan harga jual tiap unit barang adalah $140 - \frac{1}{4}x$. Baik biaya total maupun penjualan dinyatakan dalam ribuan rupiah. Agar diperoleh keuntungan maksimum, banyak barang yang harus diproduksi per hari adalah ....
a. 48 unit
b. 50 unit
c. 54 unit
d. 69 unit
e. 80 unit

33. Dari soal nomor 32, keuntungan yang dimaksud adalah ....
a. Rp1.428.000,00
b. Rp1.892.000,00
c. Rp2.020.000,00
d. Rp3.185.000,00
e. Rp3.482.000,00

34. Sebuah proyek bangunan dapat diselesaikan dalam tempo x hari dengan biaya per hari $(3x + 950x^{-1} - 36)$ juta rupiah. Biaya total proyek minimum adalah ....
a. 792 juta rupiah
b. 802 juta rupiah
c. 842 juta rupiah
d. 893 juta rupiah
e. 922 juta rupiah

35. Persamaan garis singgung kurva $f(x) = x^2 - 4x + 1$ yang tegak lurus dengan garis $2x - 4y + 1 = 0$ adalah ....
a. $2x + 4y + 4 = 0$
b. $2x + y = 0$
c. $2x + y + 4 = 0$
d. $2x - y = 0$
e. $2x - y + 4 = 0$

36. Suatu proyek pengaspalan jalan dapat diselesai-kan dalam tempo x hari dengan biaya proyek per hari $3x + \frac{3.000}{x} - 48$ (dalam jutaan rupiah). Agar biaya seminimum mungkin, proyek itu sebaiknya dikerjakan dalam ... hari.
a. 7
b. 8
c. 12
d. 15
e. 16

37. Berdasarkan soal nomor 36, biaya total minimumnya adalah ....
a. 908,5 juta rupiah
b. 1.452 juta rupiah
c. 2.085 juta rupiah
d. 2.808 juta rupiah
e. 3.912 juta rupiah

38. Seorang petani akan memagari tanahnya yang berbentuk persegi panjang dan berlokasi di tepi sungai (di sepanjang tepi sungai tidak perlu dipagari). Tanah tersebut akan dibagi menjadi dua bagian dengan cara membangun pagar yang tegak lurus dengan tepi sungai tersebut. Petani tersebut memiliki bahan untuk membuat pagar sepanjang 600 m dan ia menginginkan daerah yang seluas mungkin. Bagian pagar yang sejajar sungai terhadap sungai itu berjarak ....
    a. $10\sqrt{6}$ m
    b. 75 m
    c. 100 m
    d. 150 m
    e. 200 m

39. Diketahui fungsi penerimaan total adalah $R = 10Q - Q^2$ dan fungsi biaya totalnya $C = Q^3 - 3Q^2 + 4Q$. Besar keuntungan maksimumnya adalah ....
    (R dan C dalam jutaan rupiah)
    a. 2,7 juta rupiah
    b. 7,2 juta rupiah
    c. 10 juta rupiah
    d. 27 juta rupiah
    e. 72 juta rupiah

40. Suatu proyek pembangunan diselesaikan dalam t hari memerlukan biaya per hari $3t + \frac{1.200}{t} - 50$ juta rupiah. Biaya total minimum yang diperlukan adalah ....
    a. 600 juta rupiah
    b. 700 juta rupiah
    c. 800 juta rupiah
    d. 900 juta rupiah
    e. 1 miliar rupiah

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Diketahui $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \frac{3x}{x-7}$, dan $h(x) = -x - 4$. Tentukan
    a. $(f \circ g)(x)$;
    b. $(g \circ f)(x)$;
    c. $(f \circ g \circ h)(x)$;
    d. $(g \circ f)^{-1}(x)$;
    e. $(g \circ f \circ h)^{-1}(x)$.

2. Sebuah perusahaan menggunakan dua buah mesin untuk mengubah bahan mentah menjadi bahan jadi. Mesin A mengubah bahan mentah menjadi bahan setengah jadi dan mesin B meng-ubah bahan setengah jadi menjadi bahan jadi. Mesin A mengikuti aturan fungsi $f(x) = 2(x - 1) - 1$ dan mesin B mengikuti aturan fungsi $g(x) = x(2x + 1)$.
    a. Jika bahan mentah yang digunakan sebanyak x, tentukan persamaan hasilnya.
    b. Jika bahan mentah yang digunakan sebanyak 100 kg, berapakah banyaknya hasil produksi?

3. Tentukan nilai limit berikut ini.
    a. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{(x^2-9)^3 - 9x + 27}{x^2 - 9}$
    b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x(x^2-2)(2x^3+1)}{-x^5}$
    c $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-2x^7}{2x^3(x^4+1)-1}$
    d $\lim\limits_{x \to \infty} (x-4) - \sqrt{x^2+5x+1}$
    e. $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{x^2-9} - \sqrt{(x+2)^2+1}$

4. Tentukan titik pada kurva $y = 2x^3 + 5$ sehingga garis singgung kurva di titik itu
    a. sejajar garis $12x - y = 9$;
    b. tegak lurus pada garis $2x + 5y = 3$.

5. Sebuah kotak dibuat dari karton. Kotak itu tidak mempunyai tutup atas, tetapi mempunyai sisi alas. Tinggi kotak dibuat dua kali dari panjang salah satu sisi alas. Kotak itu diharapkan memiliki volume 400 cm³. Agar bahan yang digunakan seminimum mungkin, tentukan ukuran kotak itu.

6. Suatu model mewakili bidang miring. Model itu dirumuskan dengan fungsi

   $f(x) = 3 - 8x - 4x^2 - \frac{2}{3}x^3$, dengan x menyatakan jarak mendatar dan $f(x)$ menyatakan ketinggian bidang miring dari posisi horizontal. Tunjukkan bahwa bidang miring itu seluruhnya turun.

7. Suatu proyek pembangunan gedung sekolah diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari dinyatakan dengan $(3x - 900 + \frac{120}{x})$ juta rupiah. Berapa harikah proyek itu harus diselesaikan agar biaya yang dikeluarkan seminimal mungkin?

8. Diketahui fungsi

   $f(x) = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$ dalam domain $D_f = \{x|x \geq -1, x \in R\}$.

   a. Tentukan turunan pertama dan turunan kedua dari $f(x)$.
   b. Pada interval manakah grafik fungsi $f(x)$ akan cekung ke atas?
   c. Pada interval manakah grafik fungsi $f(x)$ akan cekung ke bawah?
   d. Jika ada, tentukan koordinat titik belok dari fungsi $f(x)$.

Daftar Pustaka

Ayres, Frank. 1974. *Theory and Problems of Matrics*. New York: McGraw-Hill.

____. 1998. *Terjemahan Kalkulus*. Jakarta: Erlangga.

Bartle, Robert G. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Willey and Sons.

Howard, R.D. 1993. *Mathematics in Actions*. London: Nelson Blackie, Ltd.

Isabelle van Welleghem. 2007. *Ensiklopedia Pengetahuan*. Solo: Tiga Serangkai.

Junaedi, Dedi, dkk. 1998. *Intisari Matematika Dasar SMU*. Bandung: Pustaka Setia.

Kerami, Djati dkk. 2002. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Koesmartono dkk. 1977. *Modul Matematika*. Bandung: Penerbit ITB.

Koesmartono dkk. 1983. *Pendahuluan Matematika*. Bandung: Penerbit ITB.

Kreyszig, E. 1988. *Advanced Enginering Mathematics*. New York: John Willey and Sons.

Negoro, S.T. dkk. 1982. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Neswan, Oki dan Setya Budi, W. 2003. *Matematika 1–3 untuk SMA*. Bandung: Penerbit ITB.

Pimentall, Ric and Wall, T. 2002. *IGCSE Mathematics*. London: John Murray.

Purcell, Edwin J. 1987. *Calculus with Analitic Geometry*. London: Prentice-Hall International, Inc.

Sembiring, Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika*. Bandung: YRama Widya.

Setya Budi, Wono. 2003. *Model Buku Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Siswanto. 1997. *Geometri I*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Siswanto. 1997. *Geometri II*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Spiegel, Murray R. 2000. *Probability and Statistics* (*Second edition*). New York: McGraw-Hill.

Spiegel, Murray. 1972. *Theory and Problems of Statistics*. New York: McGraw-Hill.

Spiegel, Murray R. 1959. *Theory and Problems of Vector Analysis*. New York: McGraw-Hill.

Spiegel, Murray R. 1986. *Matematika Dasar (Terjemahan)*. Jakarta: Erlangga.

Steffenson dan Johnson. 1992. *Essential Mathematics for Colledge Students*. New York: Harper Collins Publishers.

Susianto, Bambang. 2004. *Olimpiade Matematika dengan Proses Berpikir*. Jakarta: Grasindo.

Glosarium

Data : kumpulan dari datum, 3

Datum : keterangan yang diperoleh dari suatu pengamatan, 3

Desil : sembilan nilai yang membagi data menjadi sepuluh bagian sama banyak, 12

Diferensiabel : dapat diturunkan, 197

Diferensial : turunan suatu fungsi, 197

Dispersi : penyebaran, 14

Domain : daerah asal suatu fungsi, 129

Frekuensi harapan : harapan banyaknya kemunculan suatu kejadian dari beberapa percobaan, 103

Fungsi bijektif : fungsi yang berkorespondensi satu-satu, 132

Fungsi identitas : fungsi yang memetakan pada dirinya sendiri, 144

Fungsi invers : fungsi balikan dari suatu fungsi, 147

Fungsi naik : fungsi yang jika nilai variabelnya makin besar maka nilainya juga makin besar, 208

Fungsi turun : fungsi yang jika nilai variabelnya makin besar maka nilainya makin kecil, 208

Gradien : kemiringan suatu kurva, 216

Interseksi : irisan, 104

Jangkauan : selisih antara statistik maksimum dan statistik minimum, 14

Kejadian bersyarat : kejadian munculnya suatu kejadian dengan syarat kejadian lain telah terjadi terlebih dahulu, 111

Kejadian saling lepas : dua atau lebih kejadian yang tidak terdapat irisan di antara kejadian-kejadian itu, 107

Kejadian : himpunan bagian dari ruang sampel, 91

Kodomain	:	daerah kawan dari suatu fungsi, 129
Kombinasi	:	suatu susunan unsur-unsur dari sekumpulan unsur tanpa memerhatikan urutannya, 85
Kuartil	:	tiga nilai yang membagi data menjadi empat bagian sama banyak, 8
Limit tak tentu	:	suatu bentuk limit yang jika diselesaikan dengan cara substitusi akan memiliki bentuk khusus (bentuk tak tentu), 217
Limit	:	nilai pendekatan (bukan nilai tepat), 168
Mean	:	nilai rata-rata; rerata; jumlah semua datum dibagi banyak datum, 5, 35
Median	:	nilai tengah; nilai yang membagi suatu data menjadi dua bagian sama banyak, 5
Modus	:	nilai yang sering muncul (frekuensinya tertinggi), 6
Nilai stasioner	:	nilai suatu fungsi di titik tertentu yang mengakibatkan fungsi itu tidak naik dan tidak turun (stasioner), 208
Peluang	:	suatu nilai yang menyatakan kemungkinan terjadinya suatu kejadian dan diperoleh dari banyaknya anggota suatu kejadian dibagi dengan banyaknya anggota dari ruang sampel, 91
Percobaan	:	suatu tindakan yang dapat diulang dengan keadaan yang sama untuk memperoleh hasil tertentu,91
Permutasi	:	suatu susunan unsur-unsur dari sekumpulan unsur dengan memerhatikan urutannya, 79
Peta	:	bayangan, 132
Populasi	:	keseluruhan objek yang akan diteliti (diamati), 91
Range	:	daerah hasil dari suatu fungsi, 129
Ruang sampel	:	himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan, 91

Saling bebas stokastik : terjadi atau tidaknya suatu kejadian tidak dipengaruhi oleh terjadi atau tidaknya kejadian lain, 107

Sampel : sebagian atau keseluruhan yang dianggap mewakili populasi, 91

Sigma : notasi yang digunakan dalam operasi penjumlahan, 5

Simpangan rata-rata : ukuran penyebaran data yang mencerminkan penyebaran data terhadap nilai meannya, 46

Standar deviasi : salah satu ukuran penyebaran yang nilainya adalah akar kuadrat dari varians, 51

Statistik : kumpulan informasi berupa angka-angka yang disusun, ditabulasi, dikelompok-kelompokkan sehingga dapat memberikan informasi mengenai suatu masalah, 4

Statistika : ilmu yang mempelajari tentang statistik, 4

Tak berhingga : suatu nilai yang sangat besar, 176

Titik sampel : anggota-anggota ruang sampel, 91

Union : gabungan, 104

Indeks Subjek

Kunci Soal-Soal Terpilih

Bab I

Soal Kompetensi 1

3. 38

5. $\dfrac{m_1n_1 + m_2n_2 + m_3n_3}{n_1 + n_2 + n_3}$

7. a. $x_{\text{min}} = 3$
   $x_{\text{maks}} = 9$
   $Q_1 = 4$
   $Q_2 = 6$
   $Q_3 = 8$

   c. $J_D = 6$
   $Q_d = 2$
   $L = 3$
   $P_D = 1$
   $P_L = 11$

9. 11 tahun

Soal Kompetensi 3

3. a. $x_{\text{min}} = 1.010$
   $x_{\text{maks}} = 3.500$
   $Q_1 = 1100$
   $Q_2 = 1.210$
   $Q_3 = 2.132,5$

   c. tidak ada data pencilan

Bab II

Soal Kompetensi 1

1. a. 60
   b. 14
3. 24
5. $P_4^{26} \times P_3^{10}$

Soal Kompetensi 2

1. a. 120
   b. 120
   c. 576
   d. 90
2. a. $4!$
   b. $\dfrac{4!}{2!}$
   c. $(4!)^2$
   d. $\dfrac{(4!)^2}{(2!)^2}$
   e. $\dfrac{n!}{(n-2)!}$
   f. $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)(n-1)!}$
3. a. 10
   b. $108\dfrac{1}{3}$
   c. 3.024.000
4. a. 60
   b. 2.520
   c. 1.680
   d. 30.240
   e. 3.628.800
   f. 210

Soal Kompetensi 3

1. a. 21
   c. 45
   e. 1
   g. n

5. 495
7. a. 1.800
   c. 252

Soal Kompetensi 6

1. 10
3. a. 0,25
   b. 30
5. a. 16
   b. 64

Soal Kompetensi 7

1. $\frac{4}{13}$
5. c. 0,4
   e. 0,2

Bab III

Soal Kompetensi 3

7. a. $3x^2 - 5$
   c. $9x^2 - 60x + 99$
   e. 2
9. $3x - 4$; $3x - 7$

Soal Kompetensi 5

1. a. $\frac{25 - x}{10}$; $\frac{5 - x}{10}$
   c. $\frac{3}{3 - x}$; $\frac{2x - 1}{x + 1}$
3. $\frac{x - 1}{3}$; $3x + 7$

Bab IV

Soal Kompetensi 3

1. 1
3. ∞
5. 0
7. 4

Soal Kompetensi 4

1. 2
3. $3 + \sqrt{3}$
5. 4
7. 0

Soal Kompetensi 5

1. a. 0
   c. $20x$
   e. $4x - 1$
   g. $4x + 1$
3. a. 0
   c. 3

Bab V

Soal Kompetensi 2

1. 4
3. 20
5. -1
7. $-\frac{3}{8}$

Soal Kompetensi 5

1. $6(2x + 3)^2$
3. $\frac{2 + 14x - 16x^2}{(x^3 - 7x^2 - x + 10)^3}$
7. $-15(3 - x)^4 ((3 - x)^5 - 2)^2$

Soal Kompetensi 6

1. a. naik untuk $x > 2$
      turun untuk $x < 2$
      stasioner di $x = 2$
   c. untuk $x \in R$, grafik selalu turun
   e. naik untuk $-4\frac{2}{3} < x < 0$
      turun untuk $x < -4\frac{2}{3}$ atau $x > 0$
      stasioner di $x = -4\frac{2}{3}$ dan $x = 0$

Soal Kompetensi 9

1. $y = 3x - \frac{9}{2}$
3. $y = -24x + 68$
5. $y = x - 2$
7. $y = 2x - 14$

Khazanah Matematika 2

Buku Khazanah Matematika diperuntukkan bagi siswa SMA dan MA yang ingin mengembangkan kemampuan bernalar dan berlogika secara cermat. Buku ini disusun secara sistematis dan terstruktur dengan menggunakan pendekatan pembelajaran kontekstual (*Contextual Teaching and Learning*). Metode penyajian yang digunakan dalam buku ini sangat menarik tetapi sederhana, baik dari segi materi, kebahasaan, maupun kegrafikaannya. Dalam pembelajarannya, siswa dituntut untuk bertindak aktif sebagai subjek pembelajaran, bukan sekadar objek yang hanya menerima konsep-konsep atau rumus-rumus matematika melainkan siswa diharapkan mampu mengonstruksi sendiri konsep matematika. Dengan demikian, diharapkan buku ini dapat memandu siswa untuk lebih akrab dengan matematika dan mampu mengaplikasikannya dalam kehidupan sehari-hari.

Inilah Komponen Pelengkap dalam Buku

- Peta Konsep membantu kalian untuk mengetahui alur pembahasan materi pada bab bersangkutan.
- Kata Kunci berisi kata-kata penting yang dapat digunakan untuk memahami konsep yang disajikan dalam bab yang bersangkutan.
- Aktivitas berupa kegiatan yang dapat digunakan untuk meningkatkan pemahaman konsep yang kalian dipelajari.
- Mari Berdiskusi berisi tugas yang harus kalian kerjakan secara berkelompok sehingga terbentuk sikap saling membantu, saling menghargai, dan saling melengkapi.
- Soal Kompetensi berisi soal sebagai penerapan konsep yang kalian pelajari.
- Tes Kemampuan Bab berupa soal yang dapat digunakan untuk mengevaluasi ketercapaian pembelajaran setelah mempelajari satu bab.
- Jendela Informasi berisi informasi tambahan yang dapat menambah wawasan kalian.
- Tantangan berisi soal-soal yang relatif sulit dan biasanya memiliki tipikal khusus dalam pengerjaannya.
- Kuis berisi soal-soal yang disarikan dari soal-soal yang sering diujikan, seperti UN, SPMB, ujian masuk perguruan tinggi ternama, dan soal-soal kompetisi daerah maupun nasional.
- Glosarium berisi kata-kata penting yang disertai artinya.
- Indeks membantu kalian dalam mencari kata-kata penting yang ada dalam buku ini.

ISBN : 978-979-068-858-2 (No. jil lengkap)
ISBN : 978-979-068-860-5

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi: Rp13.649,-