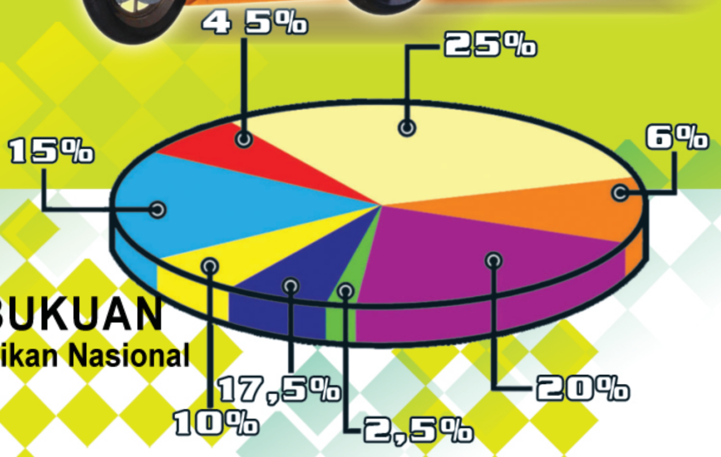
Sri Retnaningsih
Dewi Retno Sari S
Sumadi

BUKU SEKOLAH bse ELEKTRONIK

Matematika XI IPS

Untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah

$ax^2 + bx + c = 0$



PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Sri Retnaningsih
Dewi Retno Sari S - Sumadi
Matematika XI IPS Untuk SMA & MA

Sri Retnaningsih
Dewi Retno Sari S
Sumadi

Matematika

Untuk SMA dan MA Kelas XI IPS

Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika

Untuk SMA dan MA Kelas XI Program IPS

- **Penyusun**: *Sri Retnaningsih, Dewi Retno Sari S, Sumadi*
- **Editor** : *Enik Yuliatin*
- **Penata Letak Isi**: *Ika Widyaningsih E*
- **Desainer Sampul** : *Ady Wahyono*
- **Ilustrator** : *Susanto*
- **Ukuran Buku** : *17,5 x 25 cm*

510.07
SRI
m

SRI Retnaningsih
Matematika XI : untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah penyusun, Sri Retnaningsih, Dewi Retno, Sari S Sumadi; editor, Enik Yuliatin ; illustrator, Susanto. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
ix, 228 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 224
Indeks
ISBN 978-979-068-846-9 (nomor jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-848-3

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Dewi Retno III. Sari S Sumadi IV. Enik Yuliatin V. Susanto

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional Tahun 2009

Diperbanyak oleh ....

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Buku Matematika ini dirancang untuk mengembangkan kemampuan kalian dalam menghitung, mengukur, menurunkan, dan menggunakan rumus matematika yang diperlukan dalam kehidupan sehari-hari. Buku ini juga mengembangkan kemampuan kalian dalam mengomunikasikan gagasan melalui model matematika.

Pada awal bab terdapat penjelasan yang dapat membantu mengingat kembali materi yang pernah kalian pelajari. Dengan demikian, kalian akan lebih mudah mempelajari materi yang akan dibahas. Materi dalam buku ini disajikan secara runtut dan bahasa yang digunakan komunikatif sehingga mudah kalian pahami. Dalam penyajiannya, kalian akan dilibatkan secara aktif sehingga termotivasi untuk mengembangkan kemampuan berpikir kritis dalam mempelajari buku ini.

Penyampaian konsep-konsep materi diperjelas dengan gambar, tabel, rumus, grafik. Contoh soal yang bervariasi beserta jawabannya dan strategi-strategi yang diberikan akan membantu kalian menyelesaikan soal-soal serta bertujuan memunculkan berbagai strategi penyelesaian. Strategi-strategi tersebut dapat kalian gunakan untuk menjawab soal latihan.

Materi dalam setiap bab dilengkapi latihan sehingga kalian dapat mengomunikasikan ide dan memperoleh informasi melalui gagasan lisan dan tulisan, serta mengetahui dengan jelas aplikasi matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Kami berharap dengan membaca buku ini kalian dapat melatih cara berpikir dan bernalar, mengembangkan aktivitas kreatif, kemampuan memecahkan masalah, serta kemampuan menyampaikan informasi atau mengomunikasikan gagasan dengan logis dan mudah dipahami.

Surakarta, April 2008

Penyusun

Sajian Isi Buku

Buku Matematika XI SMA dan MA Program IPS ini terdiri atas lima bab meliputi Bab 1 Statistika, Bab 2 Peluang, Bab 3 Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers, Bab 4 Limit Fungsi, dan Bab 5 Diferensial.

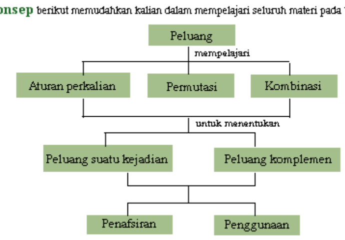
Untuk mempermudah mempelajari buku ini, buku ini memuat sajian sebagai berikut.

Penjurusan merupakan salah satu proses penempatan atau penyaluran dalam program pengajaran pada siswa SMA. Dalam penjurusan ini, siswa diberi kesempatan memilih jurusan yang paling cocok dengan karakteristik dirinya. Ketepatan memilih jurusan dapat menentukan keberhasilan belajar siswa.

Namun, selama proses penjurusan bisa timbul berbagai permasalahan. Ada siswa yang mempunyai persepsi salah mengenai jurusan. Siswa merasa bangga bila masuk jurusan IPA, sebaliknya masuk jurusan IPS atau Bahasa merasa kecewa. Hal ini kadang memberi peluang siswa pindah jurusan dari jurusan yang dipilih sebelumnya. Akibatnya, perlu dilakukan penelitian untuk evaluasi dan perencanaan proses penjurusan. Sehingga probabilitas perpindahan jurusan di tengah proses belajar mengajar dapat ditekan seminimal mungkin. **Sumber:** *www.berbagi.net*

Apersepsi berisi gambaran awal berupa masalah kontekstual sesuai materi yang dibahas beserta tujuan yang akan dicapai pada bab terkait.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.



Peta Konsep memudahkan alur siswa mempelajari materi pada setiap bab.

Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Peluang
2. Aturan perkalian
3. Permutasi
4. Kombinasi
5. Permutasi siklis
6. Binominum Newton

Kata Kunci merupakan kata-kata penting pada pembahasan materi untuk memudahkan siswa.

Sudut Matematika

Badan Pusat Statistik (BPS), dahulu Biro Pusat statistik) adalah lembaga pemerintah yang berkenaan dengan statistik nasional. Setiap sepuluh tahun sekali, BPS menyelenggarakan sensus penduduk.

Sudut Matematika disajikan untuk menambah wawasan siswa karena memberikan informasi tambahan tentang materi yang disajikan.

Dimensi Matematika

Ingat Definisi Median bayangkan bagian tengah jalan, yang merupakan bagian paling tengah. Apakah hubungan kuartil dengan Median?

Dimensi Matematika merangsang tumbuhnya berpikir kritis siswa sesuai materi yang disajikan.

Latihan 2.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Seseorang bepergian dari kota A ke kota B, ada 4 jalan dan dari kota B ke kota C ada 5 jalan. Ada berapa cara orang tersebut bepergian dari kota A ke kota C kemudian kembali lagi dari kota C ke kota A tanpa melewati jalan yang sama?
2. Kasuba mempunyai 5 pasang kaos olahraga dan 3 pasang celana olahraga. Ada berapa cara Kasuba dapat memakai pasangan kaos dan celana tersebut?

Latihan disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi pada setiap subbabnya.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, menurut kalian apakah manfaat mempelajari statistika yang dapat kalian rasakan dalam kegiatan kalian sehari-hari? Jelaskan.

Refleksi merupakan pertanyaan-pertanyaan umum sekitar pengalaman siswa setelah mempelajari materi.

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d,* atau *e*.

1. Bila D_f menyatakan daerah asal dan R_f daerah hasil fungsi $y = \sqrt{x-1}$, maka . . . .
   a. $D_f = \{x \mid x \in R\}, R_f = \{y \mid y \in R\}$
   b. $D_f = \{x \mid x \in R, x > 0\}, R_f = \{y \mid y \in R, y > 0\}$
   c. $D_f = \{x \mid x \in R, x > 1\}, R_f = \{y \mid y \in R\}$
   d. $D_f = \{x \mid x \in R, x \geq 1\}, R_f = \{y \mid y \in R, y \geq 0\}$
   e. $D_f = \{x \mid x \in R, \geq 0\}, R_f = \{y \mid y \in R, y \geq 0\}$

Uji Kompetensi disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi dalam satu bab.

Sebaiknya Anda Coba

Tentukan rumus untuk $(1 \times 1!) + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \ldots + (n \times n!)$

Petunjuk

1. $1 \times 1! = [\,(1+1!) \times 1!\,] - (1 \times 1!) = (2 \times 1!) - (1 \times 1!) = 2! - 1!$
   $2 \times 2! = [\,(2+1!) \times 2!\,] - (1 \times 2!) = (3 \times 2!) - (1 \times 2!) = 3! - 2!$
   $3 \times 3! = [\,(3+1!) \times 3!\,] - (1 \times 3!) = (4 \times 3!) - (1 \times 3!) = 4! - 3!$
   $4 \times 4! = K$
   $5 \times 5! = K$
2. Lanjutkan proses bagian (a) dan jumlahkan maka akan diperoleh rumus yang diinginkan.

Catatan:

Soal di atas bisa ditulis dalam notasi sigma $\sum_{k=1}^{n}(k \times k!)$ dapat diubah menjadi $\sum_{k=1}^{n}(\ldots)$

Sebaiknya Anda Coba berisi latihan yang ada hubungannya dengan materi pada bab terkait dengan tingkat kesulitan yang cukup tinggi untuk siswa.

Rangkuman

1. Data yang telah diurutkan menurut besar atau kecilnya disebut statistik peringkat.
2. Statistik minimum adalah ukuran yang terkecil dari statistik peringkat. Statistik maksimum adalah ukuran yang terbesar dari statistik peringkat.
3. Kuartil bawah adalah nilai data yang membagi statistik peringkat (dari kecil ke besar) menjadi $\frac{1}{4}$ bagian bawah. Kuartil tengah (median) adalah nilai data yang membagi statistik peringkat menjadi dua bagian.

Rangkuman merupakan intisari dari materi yang disajikan.

Tugas Kelompok

Dapatkan data melalui internet atau koran atau majalah, selanjutnya hitung ukuran pemusatannya dan tariklah kesimpulan.

Tugas kelompok menguji kemampuan siswa secara kelompok. Sehingga siswa juga bersosialisasi dengan siswa lain

Latihan Semester 1

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d,* atau *e*.

1.

0	6
1	45
2	0256
3	12
4	
5	0

Data yang diperoleh dari diagram batang daun di atas adalah ....
   a. 6, 15, 20, 22, 24, 25, 26, 31, 32, 50
   b. 6, 14, 15, 20, 22, 25, 26, 31, 42, 50
   c. 6, 14, 15, 20, 22, 25, 26, 32, 41, 50
   d. 6, 14, 15, 20, 22, 25, 26, 31, 32, 50
   e. 6, 14, 15, 20, 22, 25, 26, 31, 32, 40

2. Banyaknya interval kelas dari data di bawah adalah ....

Nilai	f
30 – 34	6
35 – 39	10
40 – 44	8
45 – 49	6

   a. 10
   b. 8
   c. 6
   d. 5
   e. 4

Latihan Semester disajikan untuk menguji kemampuan siswa dalam memahami materi dalam satu semester.

Daftar Isi

Daftar Simbol

Notasi	Keterangan	Halaman
$^\circ$	Derajat, satuan besar sudut	8, 9
$\sum$	Sigma, penjumlahan	10, 11, 12, 22, 24, 25, 41, 42, 43, 44, 76
%	Persen, perseratus	12
$\bar{x}$	Rata-rata hitung	22, 24, 25, 41, 42, 43
$\| \ \|$	Nilai mutlak	41, 42
$\sqrt{\ }$	Akar kuadrat	43, 44
$\geq$	Lebih dari atau sama dengan	44
!	Faktorial hasil perkalian bilangan asli 1 sampai n	60, 62, 64, 68, 69, 74
${}_nP_r, P_r^n$	Permutasi r elemen dari n elemen	64
$\leq$	Kurang dari atau sama dengan	73
${}_nK_r, K_r^n$	Kombinasi r elemen dari n elemen	73, 74
$\cup$	Gabungan himpunan	88, 89
$\cap$	Irisan himpunan	88, 89, 90, 110, 111
$\{\}$	Himpunan kosong	88
$\neq$	Tidak sama dengan	111, 150, 161, 207
$f \circ g$	Komposisi f dan g	115, 116, 117, 121, 130, 133, 135, 136
$\in$	Elemen, anggota himpunan	115, 127, 159, 160, 161, 163, 174, 183
$\subset$	Himpunan bagian	115,
$f^{1}(x)$	Invers fungsi $f(x)$	124, 127, 130, 133, 135
$\lim\limits_{x \to a}$	Limit fungsi untuk x mendekati a	149, 154, 159, 160, 163, 174, 176, 195
$f'(x), \dfrac{dy}{dx}$	Turunan pertama $f(x)$	163, 164, 174, 176, 186, 187, 188, 195
$>$	Lebih dari	201, 207
$<$	Kurang dari	201, 207
$f''(x)$	Turunan kedua $f(x)$	207

Bab

1

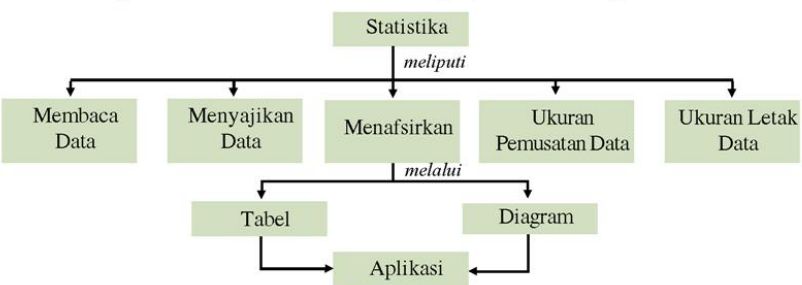
Statistika

Seorang peneliti pertanian di Sumbar, Mesra menciptakan formula cairan dari bahan alami (tumbuhan dan buah) yang disebut bisa membebaskan bahan makanan seperti daging sapi, hati sapi dan daging ayam dari kandungan lemak jenuh yang menjadi penyebab penyakit kolesterol pada manusia. “Formula diberi nama Super 2000 diciptakan dari hasil penelitian dan pengujian sejak tahun 1997 serta dari uji coba bisa membebaskan kandungan zat lemak jenuh dari daging dan hati sapi serta daging ayam,” kata Mesra kepada Antara News di Padang Riau.

Ia menyebutkan, untuk melakukan penelitian dan pengujian pembuatan formula tersebut dirinya mengantongi izin pengolahan bahan hasil pertanian dari Dinas Kesehatan dengan No. 443.52/1500/PL/1996. Setelah sepuluh tahun penelitian dan pengujian, berhasil diciptakan formula Super 2000 yang bisa melarutkan zat lemak jenuh penyebab kolesterol pada daging sapi dan ayam. Data-data seperti uraian di atas diperoleh dengan penelitian-penelitian yang menggunakan statistika. Dalam pembahasan materi ini kalian akan mempelajari berbagai hal tentang statistika.

Setelah mempelajari bab ini diharapkan kalian dapat membaca data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, lingkaran, dan ogive, menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram batang, garis, lingkaran, dan ogive serta penafsirannnya serta menghitung ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran data, serta menafsirkannya.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Statistika
2. Statistik
3. Data
4. Sampel
5. Diagram
6. Frekuensi
7. Mean
8. Modus
9. Median
10. Kuartil
11. Ogive

Statistika adalah ilmu yang mempelajari dan mengusahakan agar data mempunyai makna, meliputi pengumpulan data, penyajian data, pengolahan data, analisis data, dan pengambilan kesimpulan. Statistika dibedakan menjadi statistika deskriptif dan statistika inferensi. Statistika deskriptif, yakni metode/ilmu yang berkaitan dengan pengumpulan, penyajian dan pengaturan data (yang akan dipelajari dalam bab ini). Pada perkembangan berikutnya, sejalan dengan berkembangnya teori peluang dikenal statistika inferensi, yakni ilmu yang berkaitan dengan penarikan kesimpulan (orang tidak akan dipelajari pada bab ini, akan kalian pelajari di perguruan tinggi).

Beberapa materi statistika telah kalian pelajari di kelas IX, pada bab ini akan diuraikan lebih terperinci dan lebih luas. Dalam materi ini, kalian juga akan mengenal perbedaan istilah statistika dan statistik.

A. Populasi, Sampel, dan Data

1. Populasi dan Sampel

Sebelum kalian memahami tentang data, sebaiknya kalian pahami lebih dahulu tentang populasi dan sampel.

Perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh 1.1

1. Jika kalian pergi ke pasar, membeli buah jeruk. Sebelum memutuskan membeli jeruk, kalian pasti akan mencicipi lebih dahulu satu buah dari satu keranjang buah jeruk yang dijual pedagang.

2. Jika kalian ingin mengetahui rasa sup yang dibuat ibu. Kalian tentu akan mencicipi hanya dengan mengambil satu sendok sup dari satu panci sup.

Mencicipi 1 jeruk dan mencicipi 1 sendok sup, berarti kalian mengambil sampel dari satu keranjang jeruk dan dari satu panci sup. kalian tidak mungkin mencicipi satu keranjang jeruk dan satu panci sup bukan?

Satu jeruk dan satu sendok sup inilah yang disebut **sampel**, sedangkan 1 keranjang jeruk dan 1 panci sup disebut sebagai **populasi**. Kalian pasti mengharapkan dengan mengambil sampel tersebut rasa jeruk dalam satu keranjang dapat dipastikan manis dan rasa sup dalam satu panci dapat dipastikan enak. Rasa manis pada jeruk dan rasa enak pada sup mencerminkan nilai yang mencirikan karakteristik sampel. Nilai yang mencerminkan karakteristik sampel disebut sebagai **statistik**, sedangkan nilai yang mencerminkan karakteristik populasi disebut sebagai **parameter**. Sekarang kalian mengerti perbedaan statistik dan statistika dan parameter.

Simbol statistik yang akan kalian sering temua dalam bab ini adalah $\bar{x}$, yang merupakan rata-rata sampel, sedangkan dalam populasi disimbolkan dengan μ. Jadi, jika niai rata-rata ujian nasional (UN) matematika di sekolah kalian adalah disimbolan dengan $\bar{x}$. Nilai parameter dan statistik selengkapnya dapat dilihat pada Tabel 1.1.

Tabel 1.1 Contoh-contoh Besaran Populasi dan Sampel

Ukuran/besaran	Populasi	Sampel
Rata-rata	μ	x
Simpangan baku	σ	S
Jumlah anggota	N	n

2. Data

Membicarakan statistika berarti tidak terlepas dari data. Data diharapkan dapat memberikan gambar yang lebih umum mengenai keadaan populasinya. Tahukan kalian, apakah yang dimaksud data? untuk dapat mendefinisikan data, coba kalian lakukan kegiatan pada contoh berikut.

Contoh 1.2

1. Perhatikan tinggi badan teman-teman kalian dalam satu kelas.
2. Perhatikan nilai ulangan matematika dalam satu kelas.
3. Perhatikan hasil praktik bahasa yang kalian lakukan dalam laboratorium bahasa di sekolah.

Apakah yang kalian peroleh?

Jawab

Kalian akan memperoleh hasil pengamatan dan hasil pengukuran (percobaan). Hasil ini dapat berupa angka (kuantitatif), misalnya nilai matematika dinyatakan dengan 78 atau bukan angka (kualitatif), misalnya nilai matematika dengan angka 78.

Sekarang, kalian dapat mendefinisikan bahwa data adalah hasil pengamatan atau pengukuran yang menjadi fokus perhatian kita.

Bagaimana kita dapat memperoleh data?

Data dapat kita peroleh atau kita kumpulkan dari:

a. mengambil data yang telah dipublikasikan oleh pemerintah, nonpemerintah atau sumber-sumber yang individual.
b. mencari data melalui pengamtan terhadap objek yang diteliti.
c. melakukan eksperimen.
d. melakukan survei.

Data dapat dinyatakan dengan data tunggal maupun data yang dikelompokkan. Data yang dikelompokkan, pada umumnya merupakan data dalam jumlah besar dan bertujuan untuk menyederhanakan atau meringkas data. Bagaimana menglompokkan data, akan kalian pelajari dalam tabel distribusi kumulatif. Data yang dinyatakan dengan angka disebut sebagai **data kuantitatif** (yang kalian pelajari dalam bab ini) dan yang dinyatakan dengan bukan angka disebut sebagai **data kualitatif**.

Sekarang kalian perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.3

Berikut ini adalah nilai matematika dari 50 siswa.

89	90	56	48	48	66	85	47	68	89
70	75	78	84	75	87	60	82	55	56
80	45	66	48	75	86	79	89	54	53
76	62	89	68	86	67	89	55	79	79
98	58	78	79	75	78	48	86	85	65

Berdasarkan data tersebut,

a. berapakah banyak siswa yang memperoleh nilai lebih besar dari 70?
b. berapakah nilai terbesar dan nilai terkecilnya?

Jawab

Data yang belum diolah disebut sebagai data mentah (*raw data*). Dengan hanyak melihat data, apakah kalian dapat menjawab beberapa pertanyaan tersebut?

Tidak, data mentah tidak dapat memberikan informasi kepada kita. Pengolahan tersebut meliputi: menyajikan data menghitung ukuran permusatan, menghitung ukuran dan menghitung ukuran penyebarannya.

B. Menyajikan Data dalam Bentuk Tabel dan Diagram Batang, Garis, dan Lingkaran

Sudut Matematika

Badan Pusat Statistik (BPS), (dahulu Biro Pusat statistik) adalah lembaga pemerintah yang berkenaan dengan statistik nasional. Setiap sepuluh tahun sekali, BPS menyelenggarakan sensus penduduk.

Banyak contoh di sekitar kita yang secara langsung menggunakan metode statistika dalam kehidupan sehari-hari. Seorang karyawan/karyawati sebuah bank, setiap hari memasang tabel nilai kurs mata uang asing terhadap nilai mata uang rupiah. Apabila daftar tersebut ditulis setiap hari selama dua bulan misalnya, kita dapat mengetahui naik turunnya nilai kurs mata uang asing terhadap rupiah selama dua bulan. Kumpulan angka atau bilangan dalam daftar atau tabel tersebut disebut *statistik*.

1. Statistik Lima Serangkai (*5-Number Summaries*)

Perhatikan penjelasan berikut. Di bawah ini adalah sekelompok data mengenai nilai yang diperoleh dari 30 siswa dalam ulangan matematika.

44	54	85	62	73	57	99	91	66	74
83	49	57	52	64	67	73	82	90	70
48	58	65	76	88	90	75	68	77	62

Data di atas belum dapat disimpulkan. Namun apabila data tersebut diurutkan maka banyak hal yang dapat disimpulkan.

Adapun cara mengurutkannya dapat dari ukuran terkecil ke ukuran yang terbesar atau sebaliknya. Data yang telah diurutkan dari ukuran terkecil ke ukuran terbesar dinamakan *statistik peringkat*. Banyaknya data yang diamati untuk data di atas adalah 30, dinamakan *ukuran* kumpulan data tersebut.

Data di atas setelah diurutkan dari terkecil ke terbesar menjadi sebagai berikut.

44	48	49	52	54	57	57	58	62	62
64	65	66	67	68	70	73	73	74	75
76	77	82	83	85	88	90	90	91	99

a. Statistik Ekstrim

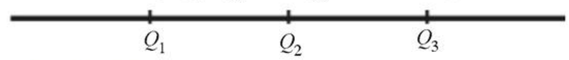
Ukuran yang terkecil dari statistik peringkat tersebut dinamakan ***statistik minimum*** atau statistik peringkat pertama $Y_{(1)}$, pada kumpulan data di atas statistik minimumnya adalah 44. Sedangkan ukuran yang terbesar dinamakan ***statistik maksimum*** $Y_{(n)}$, pada kumpulan data di atas statistik maksimumnya adalah 99. Statistik maksimum dan statistik minimum dinamakan ***statistik ekstrim***. Statistik maksimum disebut $Y_{(30)}$ sebab banyaknya data (n) ada 30 buah.

b. Kuartil

Data yang telah diurutkan di atas berguna juga untuk menentukan besarnya kuartil yang terdiri dari Q_1 (kuartil bawah/kuartil pertama), kuartil kedua atau median, yang dilambangkan dengan Q_2, dan Q_3 (kuartil atas/kuartil ketiga). Median atau kuartil kedua (Q_2) adalah nilai data yang terletak di tengah, setelah data itu disusun menurut urutan nilainya sehingga membagi dua sama besar.

Kuartil pertama (Q_1) adalah median dari semua nilai pengamatan yang kurang dari Q_2. Kuartil ketiga (Q_3) adalah median dari semua nilai pengamatan yang lebih dari Q_2.

Ilustrasi tentang Q_1, Q_2, dan Q_3 adalah sebagai berikut.



Gambar 1.1 *Kuartil bawah (Q_1), tengah (Q_2), atas (Q_3)*

Kuartil pada contoh di atas diperoleh:

$$Q_2 = \frac{\text{nilai ke-15} + \text{nilai ke-16}}{2} = \frac{68+70}{2} = 69$$

Q_1 = nilai ke-8 = 58

Q_3 = nilai ke-23 = 82

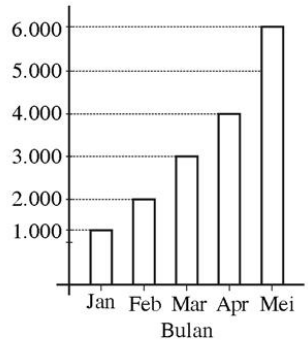
Statistik yang terdiri dari statistik minimum, kuartil pertama, kuartil kedua, kuartil ketiga, dan statistik maksimum dinamakan statistik lima serangkai (*5-number summaries*). Kelima hal tersebut dirangkum dalam bentuk berikut.

$$Q_2 = 69$$

$Q_1 = 58$ $Y_{(1)} = 44$	$Q_3 = 82$ $Y_{(30)} = 99$

2. Diagram Batang

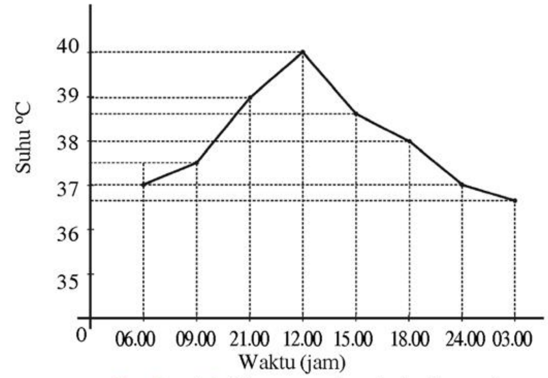
Penyajian data statistik dengan menggunakan gambar balok atau batang disebut **diagram batang**. Batang-batang itu dapat dilukiskan secara tegak (diagram batang tegak) atau mendatar (diagram batang mendatar), tetapi antara batang satu dengan batang lainnya diberi jarak sehingga letak tiap batang tadi tampak terpisah. Pada diagram batang dilengkapi skala sehingga nilai datanya dapat dibaca dari diagram tersebut. Sebagai contoh, data banyak penggemar sinetron x di suatu wilayah pada bulan Januari sampai dengan bulan Mei tahun 2007 disajikan dengan diagram batang seperti diperlihatkan pada Gambar 1.2 berikut. Diagram batang pada gambar di samping disebut *diagram batang tunggal*.



Gambar 1.1 *Diagram batang banyaknya penggemar sinetron pada bulan Januari - Mei 2007*

3. Diagram Garis

Diagram garis merupakan salah satu cara untuk menyajikan data. Diagram garis akan memudahkan orang membaca data tersebut. Andaikan seorang pasien yang sedang opname di suatu rumah sakit dicatat suhu badannya setiap 3 jam selama 21 jam diperoleh data sebagai berikut.



Gambar 1.2 *Diagram garis suhu badan pasien*

Grafik yang disajikan di atas dapat dibaca bahwa keadaan pasien setiap 3 jam sebagai berikut.

x	06.00	09.00	12.00	15.00	18.00	21.00	24.00	03.00
y	37	37,5	39	40	38,5	38	37	36,5

4. Diagram Lingkaran

Diagram lingkaran merupakan cara lain untuk menyajikan data. Lingkaran dibagi-bagi menjadi juring-juring. Luas juring menunjukkan banyaknya data. Jika kita pergi ke kantor-kantor pemerintah, sering kita melihat diagram lingkaran tersebut. Andaikan dalam satu kelurahan dengan jumlah kepala keluarga (KK) sebanyak 1.200. Dari sejumlah 1.200 KK tersebut setelah diadakan sensus tentang mata pencaharian, diperoleh data sebagai berikut.

Pekerjaan	Jumlah KK
TNI	150
Pegawai Negeri	100
Karyawan Swasta	200
Pedagang	250
Petani/Peternak	300
Lain-lain	200
Jumlah	1.200

Karena luas juring lingkaran sebanding dengan sudut pusatnya sehingga besar sudut pusat untuk:

ABRI = $\frac{150}{1.200} \times 360^o = 45^o$

Pegawai negeri

= $\frac{100}{1.200} \times 360^o = 30^o$

Karyawan swasta

= $\frac{200}{1.200} \times 360^o = 60^o$

Gambar 1.3 *Diagram lingkaran mata pencaharian di suatu kelurahan*

Pedagang = $\frac{250}{1.200} \times 360^o = 75^o$

Petani/peternak = $\frac{300}{1.200} \times 360^o = 90^o$

Lain-lain = $\frac{200}{1.200} \times 360^o = 60^o$

Dengan demikian, diagram lingkarannya tampak seperti Gambar 1.4 di atas.

C. Membaca Sajian Data

1. Daftar Distribusi Frekuensi

Daftar distribusi frekuensi adalah suatu daftar yang berisi susunan data yang dikelompokkan dalam kelas-kelas beserta frekuensi kelasnya. Berikut ini adalah daftar (tabel) peserta ujian dan banyaknya mata pelajaran yang ditempuh dengan hasil cukup atau lebih.

Tabel 1.2 Banyak Peserta Ujian dan Hasilnya

Banyaknya Mata Pelajaran yang Ditempuh dengan Hasil Cukup atau Lebih (x)	Banyaknya Peserta Ujian yaitu Frekuensi (f)	Jumlah Keseluruhan yang Berhasil (fx)
0	18	0
1	33	33
2	43	86
3	47	141
4	40	160
5	47	235
6	52	312
7	61	427
8	33	264
9	6	54
	$\sum f = 380$	$\sum fx = 1.712$

Dari Tabel 1.2 dapat diartikan bahwa:

18	siswa	tidak	lulus	semua mata pelajaran
33	siswa	lulus	1	mata pelajaran
43	siswa	lulus	2	mata pelajaran
47	siswa	lulus	3	mata pelajaran
40	siswa	lulus	4	mata pelajaran
47	siswa	lulus	5	mata pelajaran
52	siswa	lulus	6	mata pelajaran
61	siswa	lulus	7	mata pelajaran
33	siswa	lulus	8	mata pelajaran
6	siswa	lulus	9	mata pelajaran

Apabila ukuran yang diperoleh dalam jumlah yang besar maka ukuran-ukuran tersebut biasanya dikelompokkan ke dalam interval-interval kelas.

Daftar berikut ini menampilkan ukuran diameter pipa yang dibuat oleh mesin yang diukur dengan ketelitian sampai milimeter terdekat.

72	73	73	72	75	74	74	74	77	72
66	75	74	73	74	72	79	71	70	75
78	69	71	70	79	80	75	76	73	68

Data tersebut dapat dikelompokkan ke dalam interval kelas yang sama panjang yaitu 3 mm. Selanjutnya data yang seperti ini disebut sebagai data kelompok

Tabel 1.3 Tabel Distribusi Frekuensi Ukuran Diameter Pipa

Diameter (mm)	x	Turus	f	$f \cdot x$
65 – 67	66	III	3	198
68 – 70	69	~~IIII~~	5	345
71 – 73	72	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	864
74 – 76	75	~~IIII~~ ~~IIII~~ III	13	975
77 – 79	78	~~IIII~~	5	390
80 – 82	81	II	2	162
			$\sum f = 40$	$\sum f \cdot x = 2.934$

Selanjutnya perhatikan pula daftar nilai yang dicapai oleh siswa dalam satu kelas pada ulangan statistik.

Tabel 1.4 Nilai Ulangan Statistik

Nilai (x)	Banyaknya Siswa (f)	$f\ x$
4	3	12
5	8	40
6	12	72
7	15	105
8	7	56
9	3	27
10	2	20
	$\sum f = 50$	$\sum f\ x = 332$

Tabel 1.4 dapat diartikan bahwa:

3	siswa	mendapat	nilai	4
8	siswa	mendapat	nilai	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2	siswa	mendapat	nilai	10

Tabel 1.2, Tabel 1.3, dan Tabel 1.4 dinamakan daftar distribusi frekuensi. Dengan menggunakan daftar distribusi frekuensi seperti di atas, data semakin mudah untuk dibaca dan berikutnya sangat membantu dalam perhitungan statistik lebih lanjut. Misalnya untuk mencari rata-rata.

2. Daftar Frekuensi Relatif

Daftar frekuensi relatif yang dapat dibuat dari daftar distribusi frekuensi, dirumuskan sebagai berikut.

$$\text{Daftar frekuensi relatif kelas ke-}x = \frac{\text{banyaknya frekuensi kelas ke-}x}{\text{jumlah seluruh frekuensi}} \times 100\%$$

$$FR_i = \frac{f_i}{\sum f_i} \times 100\%$$

dengan FR_i adalah daftar frekuensi relatif kelas ke-i
f_i adalah banyaknya frekuensi kelas ke-i
$\sum f_i$ adalah jumlah seluruh frekuensi

Perhatikan tabel frekuensi relatif berikut yang merupakan hasil ulangan matematika dalam satu kelas yang terdiri dari 50 siswa.

Tabel 1.5 Frekuensi Relatif Hasil Ulangan Matematika

Nilai	Frekuensi	Frekuensi Relatif (dalam Persentase)
21 – 30	2	4
31 – 40	3	6
41 – 50	6	12
51 – 60	10	20
61 – 70	12	24
71 – 80	10	20
81 – 90	4	8
91 – 100	3	6
Jumlah	**50**	**100**

Frekuensi relatif pada kelas pertama = $\frac{2}{50} \times 100\% = 4\%$

Frekuensi relatif kelas ke-2 = $\frac{3}{50} \times 100\% = 6\%$

Frekuensi relatif kelas ke-3 = $\frac{6}{50} \times 100\% = 12\%$, dan seterusnya.

Jika kita perhatikan daftar tersebut diperoleh pengertian bahwa daftar frekuensi relatif adalah banyaknya data (frekuensi) yang dihitung dalam persen, tetapi datanya tidak ditulis dalam persen.

3. Daftar Frekuensi Kumulatif

Frekuensi kumulatif adalah jumlah frekuensi pada kelas yang dimaksud dengan frekuensi-frekuensi kelas sebelumnya. Perhatikan contoh daftar frekuensi kumulatif berikut.

Tabel 1.6 Frekuensi Kumulatif Hasil Ulangan Matematika

Nilai	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif
21 – 30	2	2
31 – 40	3	5
41 – 50	6	11
51 – 60	10	21
61 – 70	12	33
71 – 80	10	43
81 – 90	4	47
91 – 100	3	50

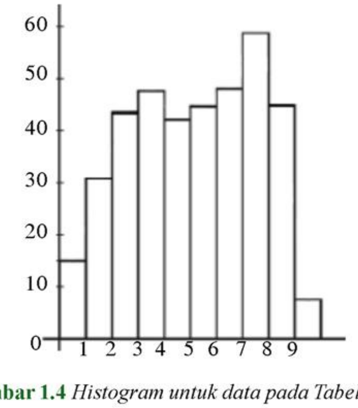
Frekuensi kumulatif pada kolom ke-3 dapat diartikan sebagai berikut.

Sebanyak 2 siswa mendapat nilai 30 atau kurang; 5 siswa mendapat nilai 40 atau kurang; 11 siswa mendapat nilai 50 atau kurang; dan seterusnya, seluruhnya ada 50 siswa.

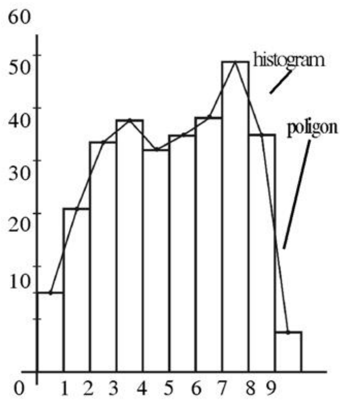
Interval kelas yaitu pertama pada interval 21 – 30, nilai 21 disebut batas bawah kelas pertama dan nilai 30 disebut batas atas kelas pertama.

4. Histogram dan Poligon Frekuensi

Histogram adalah salah satu cara untuk menyajikan data statistik dalam bentuk gambar yang berupa persegi panjang. Histogram ini merupakan gambar dari distribusi frekuensi data tersusun dalam kelas-kelas interval. Histogram yang baik, mempermudah kita dalam membaca data statistik. Panjang atau tinggi dari persegi panjang sebanding dengan frekuensi. Jika Tabel 1.2 dibuat histogram maka hasilnya dapat dilihat pada Gambar 1.4.



Gambar 1.4 *Histogram untuk data pada Tabel 1.2*



Gambar 1.5 *Histogram dan poligon untuk data pada Tabel 1.2*

Apabila titik-titik tengah sisi atas persegi panjang dihubungkan, terjadilah poligon frekuensi. Agar diperoleh poligon tertutup, harus dibuat dua kelas baru dengan panjang kelas yang sama dan frekuensinya nol pada kedua ujungnya. Gambar 1.5 merupakan poligon dari tabel 1.2 yang tidak tertutup.

5. Ogive (Ozaiv)

Ogive adalah kurva frekuensi kumulatif. Misalnya kita mempunyai sekumpulan data yang sudah disusun dalam tabel distribusi kumulatif, dari daftar tersebut kita dapat menggambarkan grafik ogive atau ozaiv. Karena tabel distribusi kumulatif ada dua macam, yaitu tabel distribusi frekuensi kumulatif ”kurang dari” atau tabel distribusi frekuensi kumulatif ”lebih dari” maka grafiknya ada dua macam yaitu ”ogive positif” atau ”ogive negatif”.

Contoh 1.4

Tabel 1.7 Distribusi Frekuensi

Nilai Data	Tabulasi (Turus)	Frekuensi
45 - 52	||||| ||	7
53 - 60	||||| |||	8
61 - 68	||||| ||	7
69 - 76	|||||		6
77 - 84	||||| |||||	10
85 - 92	||||| |||||		11
92 - 99			1
	Jumlah	50

Dari daftar distribusi frekuensi pada tabel 1.7, dapat dibuat daftar distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari seperti berikut.

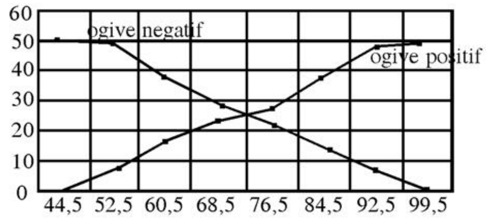
Tabel 1.8 Distribusi Frekuensi Kumulatif Kurang dari

Nilai Data	Frekuensi
44,5	0
52,2	7
60,5	15
68,5	22
76,5	28
84,5	38
94,5	49
99,5	50

Tabel 1.9 Distribusi Frekuensi Kumulatif Lebih dari

Nilai Data	Frekuensi
44,5	50
52,5	49
60,5	38
68,5	28
76,5	22
84,5	15
92,5	7
99,5	0

Dari daftar distribusi kumulatif kurang dari, kalian buat noktah untuk pasangan-pasangan terurut (44,5;0), (52,5; 7), . . . (99,5;50), selanjutnya kalian hubungkan noktah-noktah tersebut sehingga membentuk suatu kurva yang tidak patah-patah (*smooth*) yang disebut sebagai kurva ogive positif. Dengan cara yang sama, kalian lakukan untuk daftar distribusi kumulatif lebih dari. Kurva yang kalian kerjakan ini disebut sebagai kurva ogive negatif dan berikut adalah gambar kurva tersebut.



Gambar 1.6 *Ogive negatif dan ogive positif*

Latihan 1.1

Kerjakan soal-soal di bawah dengan tepat.

1. Buatlah data berikut dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dengan mengelompokkan ke dalam interval 40 – 49; 50 – 59; dan seterusnya.

44	54	85	62	73	57	99	91	66	74
83	49	57	52	64	67	73	82	90	70
48	58	65	76	88	90	75	68	77	62

2. Buatlah data berikut dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dengan mengelompokkan ke dalam interval 3 – 5; 6 – 8; dan seterusnya.

8	12	15	10	11	11	16	9	5	8	11	3
2	12	20	10	9	15	5	17	17	6	14	8
18	8	13	16	19	5	7	20	19	8	91	12

3. Buatlah data berikut dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dengan mengelompokkan ke dalam interval 65 – 67; 68 – 70; dan seterusnya.

66	75	74	73	74	72	79	71	70	75
78	72	74	74	79	71	75	74	72	68
80	69	71	70	70	80	75	76	77	67

4. Buatlah diagram garis, lingkaran, batang, histogram, poligon, dan ogive dari data berikut.
   a. Ukuran sepatu dari 72 siswa putra kelas XI.

x	21	31	41	51	61	71	81	91
f	50	48	45	39	29	17	7	3

   x adalah ukuran sepatu b adalah banyak siswa

   b. Data penghasilan karyawan di sebuah perusahaan swasta nasional.

p	350 - 399	400-449	450-499	500-549	550-599	600 - 649	650-ke atas
b	225	100	75	75	50	50	25

   p adalah penghasilan per bulan (dalam ribuan rupiah)
   b adalah banyaknya karyawan

5. Buatlah diagram garis, lingkaran, batang, histogram, poligon, dan ogive dari data berikut.
   a. Berat badan dari 50 anak dalam kg.

Berat	Frekuensi
35 – 38	1
39 – 42	3
43 – 46	2
47 – 50	5
51 – 54	7
55 – 58	8
59 – 62	22
63 – 66	2
Jumlah	50

   b. Ukuran sepatu dari 30 anak.

Ukuran	Frekuensi
29 – 31	6
32 – 34	5
35 – 37	10
38 – 40	4
41 – 43	5
Jumlah	30

6. Nilai ujian dari 60 siswa seperti tabel berikut.
   Siswa dikatakan lulus jika nilai ujiannya minimal 0,25 lebih rendah dari nilai rata-rata. Berapakah siswa yang lulus?

Nilai	Frekuensi
3	3
4	5
5	10
6	16
8	11
9	5

D. Menafsirkan Kecenderungan Data dalam Bentuk Tabel dan Diagram

Kalian dapat menafsirkan kecenderungan data (menentukan tanpa menghitung) dari suatu ukuran pemusatan yang biasanya terletak pada kelas di mana data tersebut paling sering muncul.

Contoh 1.5

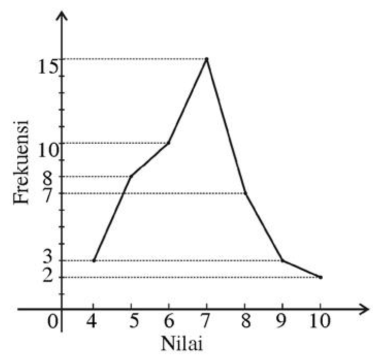
1. Perhatikan tabel berikut.

x	65 – 67	68 – 70	71 – 73	74 – 76	77 – 79	80 – 82
f	2	5	13	14	4	2

x adalah nilai
f adalah frekuensi

Tafsiran dari tabel di atas adalah frekuensi paling sedikit 2 yang terdapat pada interval 65 – 67 dan 80 – 82; sedangkan frekuensi paling banyak 14 yang terdapat pada interval 74 – 76.

2. Perhatikan diagram pada gambar di bawah ini.



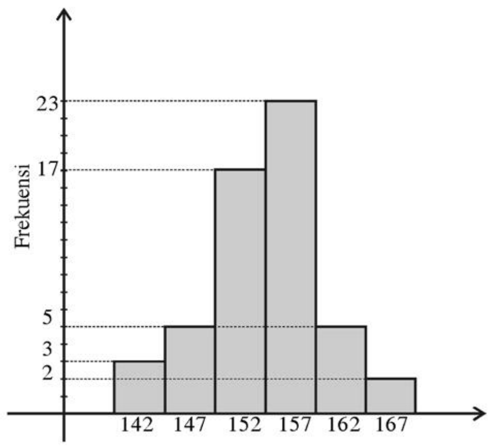
Tafsiran kecenderungan data dari diagram pada gambar di samping adalah frekuensi paling sedikit 2 terdapat pada nilai 10 dan frekuensi paling banyak 15 yaitu pada nilai 7.

3. Buatlah histogram dan tafsiran dari data berikut.

Tinggi Badan	142	147	152	157	162	167
Frekuensi	3	5	17	23	5	5

Jawab:

Histogram dari data diatas adalah.



Tafsiran dari diagram di atas adalah tinggi badan yang paling banyak adalah 157 cm dan paling sedikit 167 cm.

Latihan 1.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tafsirlah kecenderungan data di bawah ini.
   a. Daftar nilai matematika 60 anak di satu kelas.

x	4	5	6	7	8	9	10
f	5	10	15	17	7	4	2

x adalah nilai matematika
f adalah frekuensi

b. Daftar tinggi badan 50 anak dalam cm.

t	145 – 149	150 – 154	155 – 159	160 – 164	165 – 169
f	3	5	22	18	2

t adalah tinggi badan
f adalah frekuensi

c. Daftar berat badan 50 anak dalam kg.

b	35 – 39	40 – 44	45 – 49	50 – 59	55 – 59	60 – 64
f	1	4	5	16	15	9

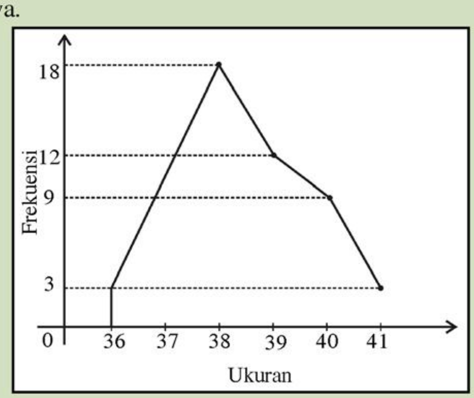
b adalah berat badan
f adalah frekuensi

d.

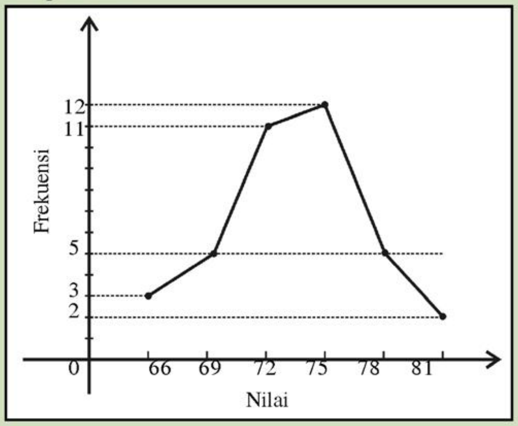
d	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25
f	4	7	15	3	1

d adalah data
f adalah frekuensi

2. Tafsirlah kecenderungan data yang digambarkan dalam diagram di bawah ini.
   a. Diagram berikut menunjukkan ukuran sepatu yang dipakai oleh siswa.



b. Diagram berikut menunjukkan nilai ulangan matematika pada sekelompok siswa.



E. Ukuran Pemusatan Data: Rataan, Median, dan Modus

Ukuran pemusatan data diberikan untuk memberikan deskripsi tentang keadaan populasi. Ukuran pemusatan data meliputi rataan, median, dan modus.

1. Rataan Hitung (Rata-rata Hitung)

a. Rataan Hitung Data Tunggal

Berikut ini akan dijelaskan mengenai cara mencari rataan dari data tak tersusun. Dalam statistika, kadang-kadang satu bilangan atau satu ukuran itu mewakili sekelompok bilangan. Misalnya jika rataan berat badan anak kelas XI adalah 48 kg, maka 48 kg ini mewakili berat badan anak kelas XI tersebut.

Rataan hitung dari sekelompok bilangan adalah jumlah bilangan-bilangan itu dibagi dengan banyaknya bilangan.

Jika bilangan-bilangan itu: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ (terdapat n buah ukuran) maka rataan hitung dari bilangan tersebut adalah:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \quad \text{atau} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

dengan $\bar{x}$ adalah rataan

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ adalah jumlah data

n adalah banyaknya data

Contoh 1.6

Tentukan rataan hitung dari: 6, 7, 8, 6, 6, 9, 4, 7, 9, 6.

Jawab:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{10}}{10}$$

$$= \frac{6 + 7 + ... + 6}{10} = \frac{68}{10} = 6{,}8$$

b. Rataan Hitung Data Kelompok

Jika data x_1 ada sebanyak f_1 ukuran
data x_2 ada sebanyak f_2 ukuran
data x_3 ada sebanyak f_3 ukuran
$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$
data x_n ada sebanyak f_n ukuran

Maka rataan hitungannya adalah:

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + ... + x_n f_n}{f_1 + f_2 + f_3 + ... + f_n} \quad \text{atau}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

Contoh 1.7

1.

Nilai	f	x
43 – 45	3	44
46 – 48	4	47
49 – 51	14	50
52 – 54	4	53
55 – 57	5	56

Jawab:

Nilai	f	x	$f\,x$
43 – 45	3	44	132
46 – 48	4	47	188
49 – 51	14	50	700
52 – 54	4	53	212
55 – 57	5	56	280
	$\sum = 30$		$\sum f \cdot x = 1.512$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1.512}{30} = 50,4$$

2. Tentukan rataan hitung hasil pengukuran pipa berikut setelah dikelompokkan dalam interval 65 – 67; 68 – 70; dan seterusnya.

78	72	74	74	79	71	75	74	72	68
72	73	73	72	75	74	74	74	73	72
66	75	74	73	74	72	79	71	70	75
80	69	71	70	70	80	75	76	77	67

Jawab:

Diameter (mm)	Titik Tengah (x)	Turus	Frekuensi (f)	fx
65 – 67	66	II	2	132
68 – 70	69	IIII	5	345
71 – 73	72	IIII IIII III	13	936
74 – 76	75	IIII IIII IIII	14	1.050
77 – 79	78	IIII	4	312
80 – 82	81	II	2	162
			$\sum f = 40$	$\sum fx = 2.937$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{2.937}{40} = 73,43$$

c. *Menghitung Rataan dengan Menggunakan Rataan Sementara*

Ada cara lain untuk menghitung besar rataan, yaitu dengan cara menentukan rataan sementara. Rataan sementara ini diambil dari titik tengah sembarang kelas interval. Rataan sementara dinyatakan dengan x_s. Kemudian, mencari besarnya simpangan rataan dari rataan sementara, yang selanjutnya untuk mengoreksi rataan sementara tadi atau menggunakan rumus berikut.

$$\bar{x} = \bar{x}_S + \frac{\sum fd}{\sum f}$$

$\bar{x}$ adalah rataan hitung
$\bar{x}_S$ adalah rataan sementara
d adalah simpangan
$\sum f$ adalah jumlah frekuensi
$\sum fd$ adalah jumlah simpangan

Contoh 1.8

Tentukan rataan tinggi badan dari 50 anak berikut ini.

Tinggi	145 – 149	150 – 154	155 – 159	160 – 164	165 – 169
Frekuensi	3	5	23	17	2

Jawab:

Tinggi	Titik Tengah	Frekuensi (f)	Simpangan (d) (Rataan Sementara = 157)	$f \cdot d$
145 – 149	147	3	– 10	-30
150 – 154	152	5	– 5	-25 +
155 – 159	157	23	0	-55
160 – 164	162	17	+ 5	+85
165 – 169	167	2	+ 10	+20 +
				+105
		$\sum f = 50$		$\sum fd = 50$

Rataan sementara = 57 (interval kelas ketiga).
Jumlah simpangan = + 105 – 55 = 50

Simpangan rataan $= \frac{50}{50} = 1$

Jadi, rataan tinggi anak = 158 cm.

Dengan menggunakan rumus diperoleh:

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum fd}{\sum f} = 157 + \frac{50}{50} = 158 \text{ cm}$$

d. Menghitung Rataan Gabungan

Rataan gabungan dirumuskan sebagai berikut.

$$\bar{x}_{\text{gab}} = \frac{f_1\bar{x}_1 + f_2\bar{x}_2 + ... + f_n\bar{x}_n}{f_1 + f_2 + ... + f_n}$$

dengan $\bar{x}_{\text{gab}}$ adalah rata-rata gabungan

f_n adalah frekuensi data ke-n

$\bar{x}_{\text{gab}}$ adalah rata-rata data ke-n

Contoh 1.9

Tiga kelas A, B, dan C berturut-turut terdiri dari 10 siswa, 20 siswa, dan 15 siswa. Rata-rata nilai gabungan dari ketiga kelas 55. Nilai rata-rata kelas A dan C berturut-turut 56 dan 65. Berapakah nilai rata-rata kelas B?

Jawab:

$$\bar{x}_{\text{gabungan}} = \frac{f_1\bar{x}_1 + f_2\bar{x}_2 + f_3\bar{x}_3}{f_1 + f_2 + f_3}$$

$$55 = \frac{10 \times 56 + 20 \times \bar{x}_B + 15 \times 5}{10 + 20 + 15}$$

$$55 \times 45 = 560 + 20 \times \bar{x}_B + 975$$

$$\bar{x}_B = 47$$

Jadi, nilai rata-rata kelas B adalah 47.

2. Median

Median adalah nilai pengamatan yang berada di pertengahan dari sekelompok data yang telah diurutkan berdasarkan besarnya.

a. Median Data Tunggal

Misalkan terdapat data yang telah diurutkan $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$. Median dari data tersebut dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$M_e = \begin{cases} \dfrac{(n+1)}{2}, n \text{ ganjil} \\ \dfrac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}, n \text{ genap} \end{cases}$$

Dimensi Matematika

Ingat Definisi Median bayangkan bagian tengah jalan, yang merupakan bagian paling tengah. Apakah hubungan kuartil dengan Median?

Contoh 1.10

Tentukan median dari data 5, 2, 3, 4, 7, 9, 5, 4, 6.

Jawab:

Data tersebut dibuat terlebih dahulu statistik peringkatnya 2 3 4 4 5 5 6 7 9. Jadi mediannya adalah 5.

b. Median Data Kelompok

Median untuk data terkelompok dirumuskan sebagai berikut.

$$M_e = B + p\left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{F}\right)$$

dengan

M_e adalah median

B adalah tepi bawah (batas bawah nyata) kelas median

p adalah interval kelas

n adalah banyak data

f_k adalah frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang mengandung median

F adalah frekuensi kelas interval yang mengandung median

Contoh 1.11

Tentukan median dari data berikut.

n	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
f	5	7	20	10	8

n adalah nilai

f adalah frekuensi

Jawab:

Nilai	f	f_k
50 – 59	5	5
60 – 69	7	12
70 – 79	20	32
80 – 89	10	42
90 – 99	8	50

$$M_e = Q_2 = B + p\left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{F}\right) = 69{,}5 + 10\left(\frac{\frac{50}{2} - 12}{20}\right) = 76$$

Jadi, mediannya adalah 76.

3. Modus

Modus menunjukkan data yang sering muncul. Perumusan modus dibedakan menjadi data tunggal dan kelompok.

a. Modus Data Tunggal

Modus untuk data kualitatif umumnya dipakai sebagai ”nilai rata-rata”. Misalnya dalam satu sekolah tertentu siswanya rata-rata pandai maka dikatakan modus dari sekolah tersebut hampir semua siswanya pandai, walaupun ada juga yang tidak pandai.

Adapun modus untuk data kuantitatif adalah nilai data yang frekuensinya paling tinggi.

Contoh 1.12

Tentukan modus dari data berikut.
6, 5, 4, 3, 4, 5, 2, 1, 5, 6, 4, 3, 2, 5, 4, 3, 2, 4, 1, 1

Jawab:

Data tersebut dibuat terlebih dahulu statistik peringkatnya.
1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6
Data yang paling sering muncul 4, sehingga modusnya 4.

b. Modus Data Kelompok

Modus untuk data terkelompok dirumuskan sebagai berikut.

$$M_o = B + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

dengan M_o adalah modus
B adalah tepi bawah kelas modus atau batas bawah nyata kelas modus
p adalah interval kelas
d_1 adalah selisih frekuensi yang mengandung modus dengan frekuensi sebelumnya
d_2 adalah selisih frekuensi yang mengandung modus dengan frekuensi sesudahnya

Contoh 1.13

Tentukan modus dari tabel frekuensi berikut.

Nilai	Frekuensi
15 – 17	20
18 – 20	26
21 – 23	10
24 – 26	4

Jawab:

$$M_o = B + p\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$$

$$= 17{,}5 + 3\left(\frac{6}{6 + 16}\right)$$

$$= 18{,}32$$

Jadi, modus dari tabel di atas adalah 18,32.

Latihan 1.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan rataan, median, dan modus dari data:
   a. 23, 25, 26, 30
   b. 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8
   c. 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7
   d. 8, 9, 7, 6, 4, 5, 2, 8, 9, 7
   e. 1, 4, 5, 7, 8, 9, 2, 1, 7, 8 , 9

2. Tentukan rataan, median, dan modus dari data:

a.

Nilai	Frekuensi
21 – 30	1
31 – 40	1
41 – 50	3
51 – 60	9
61 – 70	8
71 – 80	6
81 – 90	2
Jumlah	30

b.

Umur Mesin (Bulan)	Banyaknya Mesin
0 – 5	3
6 – 11	7
12 – 17	10
18 – 23	19
24 – 29	27
30 – 35	31
36 – 41	16
42 – 47	7
Jumlah	120

c.

Berat	Frekuensi
35 – 39	1
40 – 44	5
45 – 49	4
50 – 54	7
55 – 59	19
60 – 64	14
Jumlah	50

d.

Berat	Frekuensi
35 – 38	1
39 – 42	3
43 – 46	2
47 – 50	6
51 – 54	5
55 – 58	7
59 – 62	24
63 – 66	2
Jumlah	50

e.

Nilai	Frekuensi
41 – 50	2
51 – 60	4
61 – 70	8
71 – 80	5
81 – 90	3
91 – 100	3
Jumlah	25

f.

Umur	Frekuensi
42 – 44	1
45 – 47	5
48 – 50	4
51 – 53	7
54 – 56	19
57 – 59	14
	$\sum f = 30$

3. Nilai rata-rata ujian sekelompok siswa yang berjumlah 40 siswa adalah 51. Jika seorang siswa dari kelompok ini yang mendapatkan nilai 90 tidak dimasukkan dalam perhitungan rata-rata tersebut, menjadi berapakah nilai rata-ratanya?

4. Suatu kelas di dalamnya terdapat 21 orang. Nilai rata-rata matematikanya adalah 6. Bila seorang siswa yang paling rendah nilainya tidak diikutsertakan maka nilai rata-ratanya berubah menjadi 6,2. Berapakah nilai terendah tersebut?
5. Rata-rata nilai ulangan matematika dari 40 orang siswa adalah 5,1. Jika seorang siswa tidak disertakan dalam perhitungan maka rata-ratanya menjadi 5,0. Berapa nilai siswa tersebut?
6. a. Nilai rata-rata 11 bilangan sama dengan 13. Nilai rata-rata 13 bilangan yang lain sama dengan 11. Tentukan nilai rata-rata 24 bilangan tersebut.
   b. Nilai rata-rata dari 20 bilangan adalah 14,2. Rata-rata dari 12 bilangan pertama adalah 12,6 dan rata-rata dari 6 bilangan berikutnya adalah 18,2. Berapakah rata-rata 2 bilangan terakhir?

F. Ukuran Letak Data: Kuartil dan Desil

1. Kuartil

Kuartil adalah nilai-nilai yang membagi data menjadi empat bagian data yang sama besar, sehingga masing-masing bagian terdiri dari $\frac{1}{4}$ bagian data. Nilai-nilai yang membagi data menjadi empat bagian tersebut dikenal dengan sebutan kuartil 1(Q_1), kuartil 2(Q_2), dan kuartil 3(Q_3)

a. Kuartil Data Tunggal

Apabila banyaknya data besar, maka untuk menentukan kuartil digunakan rumus untuk suatu data dengan ukuran n dan datanya telah dibuat peringkat (telah diurutkan) dari yang terkecil sampai yang terbesar. Dengan demikian, letaknya sebagai berikut.

Letak Q_1 ada pada urutan ke-$(n + 1)$: $4 = \dfrac{n+1}{4}$

Letak Q_2 ada pada urutan ke-$2(n + 1)$: $4 = \dfrac{n+1}{2}$

Letak Q_3 ada pada urutan ke-$3(n + 1)$: $4 = \dfrac{3(n+1)}{4}$

Jika nomor urutan tersebut bukan merupakan bilangan cacah maka harus digunakan interpolasi.

Contoh 1.14

Hasil ulangan statistika dari 18 siswa adalah sebagai berikut.
48, 53, 53, 62, 68, 70, 47, 58, 64, 67, 75, 78, 37, 50, 60, 69, 73, 92
Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3.

Jawab:

Data di atas setelah dibuat statistik peringkat menjadi:
37, 47, 48, 50, 53, 53, 58, 60, 61, 64, 67, 68, 69, 70, 73, 75, 78, 92
Dengan demikian letaknya sebagai berikut.

Q_1 ada pada urutan ke-(18 + 1): 4 = $\frac{19}{4}$ = 4,75

Q_2 ada pada urutan ke-(18 + 1): 4 = $\frac{38}{4}$ = 9,5

Q_3 ada pada urutan ke-(18 + 1): 4 = $\frac{57}{4}$ = 14,25

Nilai kuartil dengan menggunakan interpolasi diperoleh sebagai berikut.

$$Q_1 = Y_{(4)} + 0{,}75(Y_{(5)} - Y_{(4)}) = 50 + 0{,}75(53 - 50)$$
$$= 50 + 2{,}25 = 52{,}25$$
$$Q_2 = Y_{(9)} + 0{,}5(Y_{(10)} - Y_{(9)}) = 62 + 0{,}5(64 - 62)$$
$$= 62 + 1 = 63$$
$$Q_3 = Y_{(14)} + 0{,}25(Y_{(15)} - Y_{(14)}) = 70 + 0{,}25(73 - 70)$$
$$= 70 + 0{,}75 = 70{,}75$$

Hasil ini akan lebih teliti apabila dibandingkan dengan menggunakan cara sebelumnya, yaitu sebagai berikut.

$$37\ 47\ 48\ 50\ \underset{\uparrow \atop Q_1}{53}\ 53\ 58\ 60\ 62\ \underset{\uparrow \atop Q_2}{64}\ 67\ 68\ 69\ \underset{\uparrow \atop Q_3}{70}\ 73\ 75\ 78\ 92$$

Q_1 = 53

$$Q_2 = \frac{62 + 64}{2} = 63$$

Q_3 = 70

Jika kuartil pertama, kuartil kedua, dan kuartil ketiga diratakan maka menjadi:

$$\text{Rataan tiga} = \frac{1}{4}(Q_1 + 2Q_2 + Q_3) = \frac{1}{4}(52{,}25 + 2 \times 63 + 70{,}75)$$
$$= 62{,}25$$

$Y_{(1)} = 37$
$Y_{(18)} = 92$

Kelima statistik deskriptif di atas merupakan statistik lima serangkai, yaitu:

$Y_{(1)}$ adalah statistik minimum
Q_1 adalah kuartil pertama
Q_2 adalah kuartil kedua
Q_3 adalah kuartil ketiga
$Y_{(18)}$ adalah statistik maksimum

Sehingga bisa dirangkumkan dalam bentuk berikut.

$Q_2 = 63$	
$Q_1 = 55$	$Q_3 = 70$
$Y_{(1)} = 37$	$Y_{(30)} = 92$

b. *Kuartil data kelompok*

Dirumuskan sebagai berikut.

$$Q_i = B + p\left(\frac{\frac{i\,n}{4} - f_k}{F}\right)$$

dengan

Q_i adalah kuartil ke-i
B adalah tepi bawah (batas bawah nyata) kelas kuartil
p adalah kelas interval
i adalah 1, 2, 3
n adalah banyak data
f_k adalah frekuensi kumulatif sebelum interval yang mengandung kuartil
F adalah frekuensi kelas interval yang mengandung kuartil

Contoh 1.15

Tentukan kuartil bawah (Q_1) dan kuartil atas (Q_3) dari data berikut.

n	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
f	5	7	20	10	8

n adalah nilai
f adalah frekuensi

Jawab:

Nilai	f	f_k
50 – 59	5	5
60 – 69	7	12
70 – 79	20	32
80 – 89	10	42
90 – 99	8	50
	50	

$$Q_1 = B + p\left(\frac{\frac{n}{4} - f_k}{F}\right) = 69{,}5 + 10\left(\frac{\frac{50}{4} - 12}{20}\right) = 69{,}75$$

$$Q_3 = B + k\left(\frac{\frac{3n}{4} - f_k}{F}\right) = 79{,}5 + 10\left(\frac{\frac{3 \times 50}{4} - 32}{10}\right) = 85$$

Jadi, kuartil bawahnya 69,75 dan kuartil atasnya 85.

Latihan 1.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data berikut dengan cara biasa.
   a. 5 10 7 7 8 6
   b. 28 32 32 35 37 28
   31 29 39 34 37 37
   c. 101 104 116 118 106 118 107 118
   109 120 111 121 113 125 113 115
   d. 15 13 7 16 11 10 13 9
   16 8 10 15 11 17 10 15
2. Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data berikut ini dengan menggunakan interpolasi.
   a. Lamanya pembicaraan telepon dalam menit selama satu hari pada sebuah perusahaan adalah sebagai berikut.
   3 5 10 2 8 10 13 15
   6 8 9 10 29 25 5 9

b. Lamanya penyinaran matahari yang diukur dalam jam di Dataran Tinggi Dieng selama tiga minggu adalah sebagai berikut.

3,8	4,8	7,8	6,3	5,7	0,8	2,0
1,3	3,4	7,9	7,2	7,6	4,1	5,2
4,3	5,2	1,7	2,3	2,4	6,5	4,2

c. Segenggam kecambah diukur panjangnya dalam cm, diperoleh data sebagai berikut.

3,1	2,9	4,2	2,8	3,2	3,3	4,2	4,3
2,8	3,4	3,5	3,7	3,6	3,2	4,1	2,9
3,3	4,0	4,1	4,0	3,9	3,8	2,8	3,6

3. Tentukan kuartil dari sekumpulan data di bawah ini.

a. Nilai ulangan statistika dari 15 siswa.

75	60	45	80	64
73	90	42	74	65
68	65	52	58	83

b. Panjang badan 20 ikan kecil dalam cm.

12	8	9	14	8	8	10	11	7	7
13	12	12	10	9	7	11	12	9	9

c. Berat badan 20 siswa kelas XI dalam kg.

45,2	46,3	50,5	42,1	54,3	55,2	40,3	41,4	52,2	48,7
46,5	45,4	56,2	55,4	55,3	47,2	49,5	53,5	53,1	45,8

d. Tinggi badan 40 siswa calon AKABRI dalam cm.

172	168	169	171	171	173	175	168	168	169
170	176	172	170	169	169	178	177	170	175
174	172	171	169	168	180	178	168	175	172
173	174	169	169	172	173	173	174	176	177

4. Tentukan kuartil dari data berikut.

a.

Berat (kg)	Frekuensi
35 – 38	1
39 – 41	3
43 – 46	2
47 – 50	6
51 – 54	5
55 – 58	7
59 – 62	4
63 – 66	2
Jumlah	30

b.

n	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25
f	4	15	7	3	1

n adalah nilai
f adalah frekuensi

c.

d	47 – 49	50 – 52	53 – 55	56 – 58	59 – 61
f	1	6	6	7	4

d adalah data
f adalah frekuensi

d.

d	41 – 45	46 – 50	51 – 55	56 – 60	61 – 65	66 – 70
f	2	5	10	6	2	1

d adalah data
f adalah frekuensi

e.

d	31 – 40	41 – 50	51 – 60	61 – 70	71 – 80
f	5	7	10	8	5

d adalah data
f adalah frekuensi

2. Desil

Desil adalah nilai-nilai yang membagi data menjadi sepuluh bagian data yang sama besar, sehingga masing-masing bagian terdiri dari $\frac{1}{10}$ bagian data. Nilai-nilai yang membagi data menjadi sepuluh bagian tersebut dikenal dengan sebutan **desil**.

a. Desil Data Tunggal

Seperti pada kuartil maka pada desil letaknya adalah:

$$\text{Letak } D_i = \frac{i}{10}(n+1);\ \ i = 1, 2, 3, \ldots , 9$$

Contoh 1.16

Diketahui data: 9, 9, 10, 13, 14, 17, 19, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 29, 33, 35, 35, 39, 43, 47

Tentukan: a. D_4 b. D_6 c. D_8

Jawab:

a. Letak $D_4 = \frac{4}{10}(20 + 1) = 8,4 = 8\frac{4}{10}$

Nilai $D_4 = 19 + \frac{4}{10}(21 - 19) = 19,8$

b. Letak $D_6 = \frac{6}{10}(20 + 1) = 12,6 = 12\frac{6}{10}$

Nilai $D_6 = 25 + \frac{6}{10}(27 - 25) = 26,2$

c. Letak $D_8 = \frac{8}{10}(20 + 1) = 16,8 = 16\frac{8}{10}$

Nilai $D_8 = 35 + \frac{8}{10}(35 - 35) = 35$

b. Desil Data Kelompok

Desil untuk data kelompok dirumuskan sebagai berikut.

$$D_i = B + p\left(\frac{\frac{in}{10} - f_k}{F}\right)$$

dengan

D_i adalah desil ke-i

B adalah tepi bawah (batas bawah nyata) kelas desil

p adalah kelas interval

i adalah 1, 2, 3, … , 9

f_k adalah frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang mengandung desil

F adalah frekuensi kelas interval yang mengandung desil n adalah banyak data

Contoh 1.17

Tentukan D_4 dan D_8 dari data berikut.

x	50 – 59	60 – 69	70 – 79	80 – 89	90 – 99
f	5	7	20	10	8

x adalah nilai

f adalah frekuensi

Jawab:

Nilai	f	fk
50 – 59	5	5
60 – 69	7	12
70 – 79	20	32
80 – 89	10	42
90 – 99	8	50

$$D_4 = B + p\left(\frac{\frac{4n}{10} - f_k}{F}\right) = 69{,}5 + 10\left(\frac{\frac{4 \times 50}{10} - 12}{20}\right) = 73{,}5$$

$$D_8 = B + p\left(\frac{\frac{8n}{10} - f_k}{F}\right) = 79{,}5 + 10\left(\frac{\frac{8 \times 50}{10} - 32}{10}\right) = 87{,}5$$

Latihan 1.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan D_3, D_6, dan D_9 dari data berikut.
   a. 23, 25, 26, 30
   b. 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8
   c. 2, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7
   d. 8, 9, 7, 6, 4, 5, 2, 8, 9, 7
   e. 1, 4, 5, 7, 8, 9, 2, 1, 7, 8, 9
2. Tentukan D_4, D_6, dan D_8 dari data berikut.

   a.

Nilai	Frekuensi
31 – 40	1
41 – 50	3
51 – 60	9
61 – 70	8
71 – 80	6
81 – 90	2
91 – 100	1
	$\sum f = 30$

b.

Umur Ayam (Minggu)	Banyaknya Ayam
0 – 5	3
6 – 11	7
12 – 17	10
18 – 23	19
24 – 29	27
30 – 35	31
36 – 41	16
42 – 47	9
48 – 53	6
54 – 59	2
	Jumlah = 130

c.

Umur (Tahun dan Bulan)	Frekuensi
12,0 – 12,2	10
12,3 – 12,5	24
12,6 – 12,8	36
12,9 – 12,11	53
13,0 – 13,2	46
13,3 – 13,5	32
13,6 – 13,8	15
	$\sum f = 216$

d.

Berat	Frekuensi
35 – 39	1
40 – 44	5
45 – 49	4
50 – 54	7
55 – 59	19
60 – 64	14
	$\sum f = 50$

e.

Nilai	Frekuensi	
	Ulangan I	Ulangan II
31 – 40	1	1
41 – 50	7	1
51 – 60	8	3
61 – 70	5	11
71 – 80	3	8
81 – 90	1	1
	$\sum f = 25$	$\sum f = 25$

G. Ukuran Penyebaran Data: Rentang, Simpangan Kuartil, dan Simpangan Baku

Ketiga ukuran pemusatan yakni rata-rata, median dan modus yang telah kalian pelajari, tidak cukup memberikan gambaran yang memadai bagi data. Kalian perlu mengetahui, seberapa jauh data menyebar dari nilai rata-ratanya. Dimungkinkan bahwa kita dapat memiliki dua himpunan pengamatan yang mempunyai median yang sama namun sangat berbeda penyebaran datanya.

Coba perhatikan data berikut.

Tabel berikut merupakan hasil pengukuran 5 susu segar (dalam liter) dari perusahaan A dan 5 susu segar (dalam liter) perusahaan B. Keperluan susu untuk perusahaan tersebut dipasok dari perusahaan susu yang sama serta perusahaan A dan B hanya mengemasnya.

Susu A	1,02	1,00	1,01	0,98	0,99
(dikemas perusahaan A)					
Subu B	1,08	1,16	1,00	0,89	0,92
(dikemas perusahaan B)					

Median dari data tersebut sama yakni 1,00 liter, namun, coba kalian perhatikan bahwa perusahaan A dalam mengemas susu cenderung mengemas dengan isi yang lebih seragam daripada perusahaan B. Ini berarti bahwa keragaman isi kemasan dari perusahaan B. Sekarang kalian telah mengetahui pentingnya belajar ukuran penyebaran.

Berikut diuraikan beberapa ukuran penyebaran

1. Rentang (Jangkauan)

Rentang (jangkauan) data adalah selisih mutlak kedua statistik ekstrim dari sekumpulan data. Rentang dirumuskan sebagai berikut.

$$J = Y_{(n)} - Y_{(1)}$$

Contoh 1.18

Tentukan besarnya rentang dari data berikut.

48	53	53	62	68	70	47	58	64
67	75	78	37	50	60	69	73	92

Jawab:

Karena n = 18 maka besarnya rentang $= Y_{(18)} - Y_{(1)} = 92 - 37 = 55$.

Jadi, besarnya rentang 55.

2. Simpangan Kuartil

Jangkauan antarkuartil adalah selisih antara kuartil ketiga dan kuartil pertama. Jangkauan antarkuartil disebut juga hamparan (H) yang dirumuskan sebagai berikut.

$$H = Q_3 - Q_1$$

Sedangkan simpangan kuartil adalah setengah dari hamparan.

$$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

Contoh 1.19

Tentukan hamparan dari data berikut.

37	47	48	50	53	53	58	60	62
64	67	68	69	70	73	75	78	92

Jawab:

Letak $Q_1 = \dfrac{18+1}{4} = 4{,}75$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad Q_1 &= Y_{(4)} + 0{,}75\,(Y_{(5)} - Y_{(4)}) \\ &= 50 + 0{,}75\,(53 - 50) \\ &= 52{,}25 \end{aligned}$$

Letak $Q_3 = \frac{3}{4}(18 + 1) = 14{,}25$

$\Leftrightarrow Q_3 = Y_{(14)} + 0{,}25\,(Y_{(15)} - Y_{(14)})$

$= 70 + 0{,}25\,(73 - 70)$

$= 70{,}75$

$H = 70{,}75 - 52{,}25$

$H = 18{,}50$

Jadi, hamparan dari data tersebut adalah 18,50.

3. Simpangan

Dalam bahasan sebelumnya, telah diuraikan tentang ukuran pemusatan. Salah satu ukuran pemusatan, adalah rataan. Jika data statistik yang telah dikumpulkan berbeda dengan rata-ratanya, maka data tersebut dikatakan mempunyai simpangan.

a. Simpangan Rata-rata

Dispersi (ukuran penyebaran sekelompok data) serangkaian nilai observasi akan kecil jika nilai tersebut dekat dengan rataannya. Sebaliknya, dispersinya akan menjadi lebih besar apabila nilai observasi jauh dengan rataannya. Salah satu cara untuk mencari ukuran dispersi, yaitu menggunakan simpangan rata-rata yang dirumuskan sebagai berikut.

1) Simpangan Rata-rata Data Tunggal

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

dengan $\overline{x}$ adalah rata-rata hitung

n adalah banyaknya ukuran

x_i adalah titik tengah kelas

SR adalah simpangan rata-rata

Contoh 1.20

Tentukan simpangan rata-rata dari data berikut: 17, 21, 25, 25, 34, 40.

Jawab:

$$\overline{x} = \frac{17 + 21 + 25 + 25 + 34 + 40}{6} = 27$$

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$= \frac{|17-27| + |21-27| + |25-27| + |25-27| + |34-27| + |40-27|}{6}$$

$$= 6{,}667$$

2) Simpangan Rata-rata Data Terkelompok

$$SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\,|x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

dengan $\bar{x}$ adalah rata-rata hitung
n adalah banyaknya ukuran
f_i adalah banyaknya data kelas ke-i
SR adalah simpangan rata-rata

Contoh 1.21

Tentukan simpangan rata-rata dari tabel berikut ini.

k	41 – 45	46 – 50	51 – 55	56 – 60	61 – 65
f	2	5	10	6	2

k adalah kelas interval
f adalah frekuensi

Jawab:

k	f	x_i	fx	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
41 – 45	2	43	86	–10,2	10,2	20,4
46 – 50	5	48	240	–5,2	5,2	26
51 – 55	10	53	530	–0,2	0,2	2
56 – 60	6	58	348	4,8	4,8	28,8
61 – 65	2	63	126	9,8	9,8	19,6
Jumlah	25		1.330			96,8

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{1.330}{25} = 53{,}2$$

$$SR = \frac{\sum f\left|x_i - \bar{x}\right|}{\sum f} = \frac{96{,}8}{25} = 3{,}872$$

b. Simpangan Baku

1) Simpangan Baku Data Tunggal

Para ahli statistika umumnya lebih banyak menggunakan deviasi rata-rata yang dikuadratkan sebagai pengukuran dispersi. Deviasi demikian ini dinamakan ragam atau variansi dan dirumuskan sebagai berikut.

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Dalam hal ini, S^2 merupakan rataan kuadrat dan tidak sama dengan rataan-rataan biasa x_i maupun x. Standardisasi rataan pengukuran di atas dilakukan dengan cara penarikan akar dari ragam atau variansi dan menjadi:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Contoh 1.22

Berikut ini adalah data berat badan 15 siswa kelas XI program IPS 37, 48, 55, 42, 47, 51, 60, 43, 52, 62, 63, 53, 50, 45, 54. Tentukan ragam dan simpangan baku dari data tersebut.

Jawab:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} f(x_i - \bar{x})^2$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \frac{37 + 48 + ... + 54}{15}$$

$$S^2 = \frac{1}{15-1}\left((37-50{,}8)^2 + (48-50{,}8)^2 + \ldots + (54-50{,}8)^2\right)$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 190{,}44 + 7{,}84 + 17{,}64 + 77{,}44 + 14{,}44 + 0{,}04 + 84{,}64 + 60{,}84 + \\ 1{,}44 + 125{,}44 + 148{,}84 + 4{,}84 + 0{,}64 + 33{,}64 + 10{,}24 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{778{,}4}{14} = 55{,}6$$

2) Simpangan Baku Data Kelompok

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i - \overline{x})^2$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i - \overline{x})^2}$$

Jika sampel berukuran besar, yaitu $n \geq 30$, maka $(n - 1)$ dapat dianggap sama dengan n sehingga didapat:

$$S = \sqrt{S^2} \quad \text{atau} \quad S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\,(x_i - \overline{x})^2}$$

Dan bentuk terakhir, yaitu S dinamakan *simpangan baku* atau *standar deviasi*.

Contoh 1.23

Tentukan ragam dan standar baku dari data di bawah ini.
Tabel sumbangan untuk korban Gempa 2006 dari kelurahan "*A*" (dalam puluhan ribu rupiah).

Banyaknya Sumbangan (x)	f	fx	$x - \overline{x}$	$(x - \overline{x})^2$	$f\,(x - \overline{x})^2$
1	5	5	–12,1	146,41	732,05
5	8	40	–8,1	65,61	524,88
10	25	250	–3,1	9,61	240,25
20	8	160	6,9	47,61	380,88
50	4	200	36,9	1.361,61	5.446,44
	$\sum f = 50$	$\sum f\,x = 655$			$\sum f\,(x - \overline{x})^2 = 7.324{,}50$

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{655}{50} = 13{,}1$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i - \bar{x})^2 = \frac{7.324{,}50}{50} = 146{,}49$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{146{,}49} = 12{,}1$$

H. Pencilan

Sudut Matematika

Pencilan merupakan bahasa Jawa, yang bisa berarti lain dari yang lain. Istilah ini kemudian dibakukan menjadi bahasa Indonesia yaitu "Pencil". Jika ditambah awalan ter- menjadi terpencil, yang berarti tersendiri atau tertinggal. Dalam statistik, istilah tersebut disebut juga dengan outliner yang berada di luar garis linear yang ditarik dari titik koordinat nol atau koordinat tertentu. Outliner terjadi karena data tersebut jauh dari standar yang ada.

Perhatikan data berikut.
4, 7, 1, 2, 3, 3, 2, 4, 4, 8, 25, 6, 7
Data tersebut setelah diurutkan: 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 6, 7, 7, 8, 25.

Apabila diamati data yang bernilai 25 tidak konsisten. Nilai tersebut dinamakan pencilan yaitu data yang tidak konsisten dengan data yang lain.

Perhatikan data berikut.

Nilai	5	30	40	50	60	70	80
Frekuensi	1	5	7	12	15	11	10

Data yang tidak konsisten dengan data yang lain adalah 5 (data yang lain merupakan bilangan puluhan), maka pencilannya adalah 5.

I. Penafsiran Terhadap Ukuran Pemusatan, Ukuran Letak, dan Ukuran Penyebaran

Perkiraan letak data dapat kita gunakan untuk memberikan tafsiran (menentukan tanpa menghitung) terhadap ukuran pemusatan, letak, dan penyebaran.

Contoh 1.24

Tafsirkanlah data dari tabel berikut.

Data	f	f_k
50 – 59	5	5
60 – 69	8	13
70 – 79	19	32
80 – 89	10	42
90 – 99	8	50

Jawab:

Banyaknya data ada 50.

a. Tafsiran untuk ukuran pemusatan (rataan, median, dan modus) terletak di kelas 3 pada interval 70 – 79.

b. Tafsiran untuk letak yaitu:

Tafsiran letak Q_2 di kelas ke-3

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \times \text{banyaknya data } = \frac{50}{2} = \text{ data ke-25}\right)$$

Tafsiran letak Q_1 di kelas ke-2

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4} \times \text{banyaknya data } = \frac{50}{4} = \text{ data ke-}12\tfrac{1}{2}\right)$$

Tafsiran letak Q_3 di kelas ke-4

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} \times \text{banyaknya data } = \frac{3 \times 50}{4} = \text{ data ke-}37\tfrac{1}{2}\right)$$

c. Tafsiran ukuran penyebaran

Rentang data 99 – 50 = 49

Simpangan antarkuartil = $Q_3 - Q_1$

$$Q_1 = \frac{60+69}{2} = 64{,}5$$

$$Q_3 = \frac{80+89}{2} = 84{,}5$$

Simpangan antarkuartil = 84,5 – 64,5 = 20

Simpangan baku = 10 (lihat titik-titik tengah dari masing-masing interval).

Cocokkan jawaban tersebut dengan cara perhitungan sesungguhnya.

Berapa selisihnya? Mengapa?

Latihan 1.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

Berikan tafsiran terhadap pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran dari data berikut.

1. a. Hasil enam kali ulangan fisika: 6, 5, 7, 5, 5, 8.
   b. Hasil enam kali ulangan matematika: 6, 6, 7, 7, 7, 8.

2. a.

Nilai	Frekuensi
4	5
5	10
6	15
7	17
8	7
9	4
10	2
	60

   b.

Tinggi	Frekuensi
145 – 149	3
150 – 154	5
155 – 159	18
160 – 164	22
165 – 169	2
	50

3.

n	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90
f	3	6	10	13	9	5	4

n adalah nilai
f adalah frekuensi

4.

t	0 – 3	4 – 7	8 – 11	12 – 15	16 – 19	20 – 23
f	3	5	9	11	7	5

t adalah tinggi
f adalah frekuensi

5.

Data	0 – 2	3 – 5	6 – 8	9 – 11	12 – 14
Frekuensi	3	5	9	6	2

Rangkuman

1. Data yang telah diurutkan menurut besar atau kecilnya disebut statistik peringkat.
2. Statistik minimum adalah ukuran yang terkecil dari statistik peringkat.
   Statistik maksimum adalah ukuran yang terbesar dari statistik peringkat.
3. Kuartil bawah adalah nilai data yang membagi statistik peringkat (dari kecil ke besar) menjadi $\frac{1}{4}$ bagian bawah.
   Kuartil tengah (median) adalah nilai data yang membagi statistik peringkat menjadi dua bagian.
   Kuartil atas adalah nilai data yang membagi statistik peringkat menjadi $\frac{1}{4}$ bagian atas.
4. $Y_{(1)}, Q_1, Q_2, Q_3, Y_{(n)}$ disebut statistik lima serangkai.
5. Jangkauan = statistik maksimum – statistik minimum.
6. Jangkauan antarkuartil atau hamparan $(H) = Q_3 - Q_1$.
7. Nilai dari data yang tidak konsisten dengan data yang lain disebut pencilan.
8. Data yang didapat dari hasil pengukuran disebut data ukuran.
   Data yang didapat dari hasil penghitungan disebut data cacahan.
9. Histogram adalah data statistik yang disajikan dalam bentuk persegi panjang. Luas persegi panjang senilai dengan frekuensinya.
   Poligon frekuensi adalah garis yang menghubungkan titik tengah bagian atas pada histogram.
10. Ogive ada dua macam yaitu ogive positif dan ogive negatif.
11. Rataan hitung: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

    atau $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i}$ (untuk data terkelompok)

    $\bar{x} = \bar{x}_s + \dfrac{\sum fd}{\sum f}$, dengan $d = x_i - \bar{x}_s$ dan $\bar{x}_s$ = rata-rata sementara.

12. Modus, median, kuartil dan desil untuk data terkelompok.

a. Modus: $M_o = B + k\left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)$

b. Kuartil: $Q = B + k\left(\frac{\frac{in}{4} - f_k}{F}\right)$

c. Persentil: $P_i = B + k\left(\frac{\frac{in}{100} - f_k}{F}\right)$

d. Median: $M_e = B + k\left(\frac{\frac{n}{2} - f_k}{F}\right)$.

e. Desil: $D_i = B + k\left(\frac{\frac{in}{10} - f_k}{F}\right)$

13. Simpangan rata-rata: $SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$ atau $SR = \frac{\sum_{i=1}^{n} f|x_i - \overline{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f}$

14. Ragam = variansi (S^2)

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Simpangan baku = standar deviasi (S)

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Tugas Kelompok

Dapatkan data melalui internet atau koran atau majalah, selanjutnya hitung ukuran pemusatannya dan tariklah kesimpulan.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, menurut kalian apakah manfaat mempelajari statistika yang dapat kalian rasakan dalam kegiatan kalian sehari-hari? Jelaskan.

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Rata-rata tinggi badan 30 orang wanita adalah 156 cm, sedangkan rata-rata tinggi badan 20 orang pria adalah 168 cm. Rata-rata tinggi badan 50 orang tersebut adalah ....
   a. 158,4 cm
   b. 159,3 cm
   c. 159,8 cm
   d. 160,8 cm
   e. 162 cm

2. Kelas A terdiri atas 45 siswa dan kelas B adalah 40 siswa. Nilai rata-rata kelas A 5 lebih tinggi dari rata-rata kelas B. Apabila kedua kelas digabung maka nilai rata-ratanya menjadi 58. Nilai rata-rata kelas A adalah ....
   a. $55\frac{6}{17}$
   b. $55\frac{11}{17}$
   c. $56\frac{11}{17}$
   d. $60\frac{6}{17}$
   e. $60\frac{11}{17}$

3. Dari 64 orang siswa yang terdiri atas 40 orang siswa kelas K dan 24 orang siswa kelas L diketahui nilai rata-rata matematika siswa kelas K adalah 7,2 dan nilai rata-rata siswa kelas L adalah 1,5 lebih tinggi dari nilai rata-rata seluruh siswa kedua kelas tersebut. Nilai rata-rata matematika siswa kelas L adalah ....
   a. 8,8
   b. 9,0
   c. 9,2
   d. 9,4
   e. 9,6

4. Tiga kelas A, B, dan C berturut-turut terdiri atas 10 siswa, 20 siswa, dan 15 siswa. Rata-rata nilai gabungan dari ketiga kelas adalah 55. Rata-rata kelas A dan C berturut-turut 56 dan 65. Rata-rata nilai kelas B adalah ....
   a. 45
   b. 47
   c. 48
   d. 50
   e. 54

5. Nilai rata-rata pelajaran matematika dalam suatu kelas adalah 5. Jika ditambah nilai siswa baru yang besarnya 7, maka rata-ratanya menjadi 5,1. Banyak siswa semula dalam kelas itu adalah ....
   a. 20
   b. 19
   c. 38
   d. 21
   e. 40

6.

Nilai Ujian Matematika	4	5	6	8	10
Frekuensi	20	40	70	a	10

   Dalam tabel di atas, nilai rata-rata ujian matematika itu adalah 6. Nilai a sama dengan ....
   a. 0
   b. 5
   c. 10
   d. 20
   e. 30

7. Diketahui dari $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{10}$. Jika tiap-tiap data ditambah 10, maka:
   (1) rata-rata akan bertambah 10
   (2) jangkauan tetap
   (3) median bertambah 10
   (4) simpangan kuartil bertambah 10
   Pernyataan yang benar adalah ....
   a. (1), (2), dan (3)
   b. (1) dan (3)
   c. (2) dan (4)
   d. (4)
   e. (1), (2), (3) dan (4)

8. Pada suatu ujian yang diikuti 50 siswa diperoleh rata-rata nilai ujian adalah 35 dengan median 40 dan simpangan baku 10. Karena rata-rata nilai tersebut rendah, maka semua nilai dikalikan 2, kemudian dikurangi 15. Akibatnya adalah ....
   a. rata-rata nilai menjadi 70
   b. rata-rata nilai menjadi 65
   c. simpangan baku menjadi 20
   d. simpangan baku menjadi 5
   e. median menjadi 80

9. Untuk kelompok bilangan 2, 3, 7, 7, 8, 8, 9, 11:
   (1) modus lebih besar dari rata-rata
   (2) median lebih kecil dari rata-rata
   (3) modus = median
   (4) modus = rata-rata

   Pernyataan yang benar adalah ....
   a. (1), (2), dan (3)
   b. (1) dan (3)
   c. (2) dan (4)
   d. (4)
   e. semuanya benar

10. Dari empat bilangan diketahui bilangan yang terkecil adalah 20 dan yang terbesar 48. Rata-rata hitung keempat bilangan tersebut tidak mungkin ....
    (1) < 26
    (2) < 25
    (3) > 42
    (4) > 43

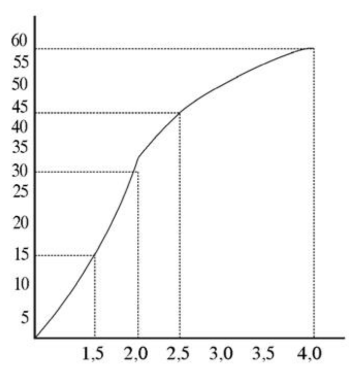
    Pernyataan yang benar adalah ....
    a. (1), (2), dan (3)
    b. (1) dan (3)
    c. (2) dan (4)
    d. (4)
    e. semuanya benar

11. Tabel di bawah ini adalah hasil ulangan matematika suatu kelas.

Nilai	*f*
31 – 36	4
37 – 42	6
43 – 48	9
49 – 54	14
55 – 60	10
61 – 66	5
67 – 72	2

    Modusnya adalah ....
    a. 49,06
    b. 50,20
    c. 50,70
    d. 51,33
    e. 51,83

12. Gambar di bawah ini adalah suatu kurva frekuensi kumulatif.



    (1) median = 2,0
    (2) simpangan kuartil = 2
    (3) kuartil atas = 2,5
    (4) rata-rata (mean) = 30

    Pernyataan yang benar adalah ....
    a. (1), (2), dan (3)
    b. (1) dan (3)
    c. (2) dan (4)
    d. (4)
    e. semuanya benar

13. Umur rata-rata (rata-rata hitung) dari suatu kelompok yang terdiri atas dokter dan jaksa adalah 40 tahun. Jika umur rata-rata dokter adalah 35 tahun dan umur rata-rata para jaksa adalah 50 tahun, maka perbandingan banyaknya dokter dan banyaknya dokter dan banyaknya jaksa adalah ....
    a. 3 : 2
    b. 3 : 1
    c. 2 : 3
    d. 2 : 1
    e. 1 : 2

14. Perhatikan tabel berkut ini.

Nilai Ujian	3	4	5	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	12	17	14	6	3

    Seorang siswa dinyatakan lulus jika nilai ujiannya lebih tinggi dari nilai rata-rata dikurangi 1. Dari tabel di atas, jumlah yang lulus adalah ....
    a. 52
    b. 40
    c. 38
    d. 23
    e. 20

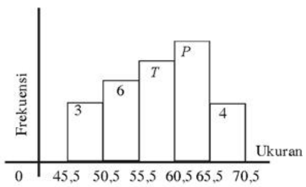
15. Median dari distribusi frekuensi di bawah ini adalah ....

Berat Badan	Frekuensi
50 – 52	4
53 – 55	5
56 – 58	3
59 – 61	2
62 – 64	6

    a. 52,5
    b. 54,5
    c. 55,25
    d. 55,5
    e. 56,5

16. Untuk memudahkan perhitungan, semua nilai data pengamatan dikurangi 1300. Nilai-nilai baru menghasilkan jangkauan 28, rata-rata 11,7; simpangan kuartil 7,4; dan modus 12. Data aslinya mempunyai ....
    (1) rata-rata = 1311,7
    (2) jangkauan = 28
    (3) modus = 1312
    (4) simpangan kuartil = 657,4

    Pernyataan yang benar adalah ....
    a. (1), (2), dan (3)
    b. (1) dan (3)
    c. (2) dan (4)
    d. (4)
    e. semuanya benar

17. 

Rataan hitung data dari histogram pada gambar berikut adalah 59. Nilai P adalah ....

a. 8
b. 9
c. 10
d. 11
e. 12

18. Dari 100 siswa yang mengikuti tes matematika diperoleh nilai seperti pada tabel di bawah ini. Modus data tersebut adalah ....

Nilai	f
55 – 59	3
60 – 64	9
65 – 69	14
70 – 74	37
75 – 79	25
80 – 84	8
85 – 89	4

a. 66,22
b. 68,84
c. 70,16
d. 72,79
e. 73,79

19. Perhatikan data berikut.

Nilai	Frekuensi
19 – 27	4
28 – 36	6
37 – 45	8
46 – 54	10
55 – 63	6
64 – 72	3
73 – 81	3

Mean dari data tersebut adalah ....

a. 58,25
b. 58,75
c. 59,25
d. 59,75
e. 60,25

20. Diperoleh data-data sebagai berikut.

Nilai	Frekuensi
30 – 39	2
40 – 49	5
50 – 59	13
60 – 69	14
70 – 79	4
80 – 89	2

Median dari data pada tabel adalah ....

a. 46,3
b. 46,8
c. 47,1
d. 47,3
e. 47,8

Bab 2
Peluang

Penjurusan merupakan salah satu proses penempatan atau penyaluran dalam program pengajaran pada siswa SMA. Dalam penjurusan ini, siswa diberi kesempatan memilih jurusan yang paling cocok dengan karakteristik dirinya. Ketepatan memilih jurusan dapat menentukan keberhasilan belajar siswa.

Namun, selama proses penjurusan bisa timbul berbagai permasalahan. Ada siswa yang mempunyai persepsi salah mengenai jurusan. Siswa merasa bangga bila masuk jurusan IPA, sebaliknya masuk jurusan IPS atau Bahasa merasa kecewa. Hal ini kadang memberi peluang siswa pindah jurusan dari jurusan yang dipilih sebelumnya. Akibatnya, perlu dilakukan penelitian untuk evaluasi dan perencanaan proses penjurusan. Sehingga probabilitas perpindahan jurusan di tengah proses belajar mengajar dapat ditekan seminimal mungkin. **Sumber:** *www.berbagi.net*

Setelah mempelajari bab ini diharapkan kalian dapat menggunakan sifat dan aturan perkalian, permutasi, dan kombinasi dalam pemecahan masalah, menentukan ruang sampel suatu percobaan, serta menentukan peluang suatu kejadian dan menafsirkannya

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.

Peluang
mempelajari
Aturan Perkalian | Permutasi | Kombinasi
untuk menentukan
Peluang Suatu Kejadian | Peluang Komplemen
untuk
Penafsiran | Penggunaan

Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Peluang
2. Aturan perkalian
3. Permutasi
4. Kombinasi
5. Permutasi siklis
6. Binominum Newton

Sumber: www.biografiasyvidas.com

Gambar 2.1 *Blaise Pascal*

Teori peluang merupakan salah satu cabang matematika yang membahas cara-cara yang digunakan dalam matematika untuk mengukur tingkat keyakinan tentang kepastian bahwa suatu peristiwa akan terjadi. Teori ini memberikan peranan yang penting dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi serta ilmu-ilmu sosial modern. Dasar-dasar teori peluang diperkenalkan oleh Blaise Pascal yang selanjutnya dikembangkan oleh Pierre de Fermat.

Ingatlah kembali materi tentang peluang, seperti percobaan melempar keping uang logam maka peluang muncul gambar adalah $\frac{1}{2}$ atau peluang muncul angka adalah $\frac{1}{2}$.

A. Aturan Perkalian, Permutasi, dan Kombinasi serta Penggunaannya

1. Aturan Perkalian

Jika suatu peristiwa terjadi dalam p cara yang berbeda, dan suatu peristiwa lain dengan q cara yang berbeda, maka gabungan dari kedua peristiwa tersebut dapat diselesaikan dengan $p \times q$ cara yang berbeda. Banyaknya kejadian pada kaidah ini dapat dikembangkan lebih dari dua kejadian. Demikian pula jika suatu peristiwa terjadi dalam p cara yang berbeda, setelah itu terjadi peristiwa lain dalam q cara yang berbeda, kemudian terjadi peristiwa lain dalam r cara yang berbeda, maka ketiga peristiwa dalam urutan itu terjadi dalam $(p \times q \times r)$ cara. Peristiwa ini dapat diperluas menjadi lebih dari tiga peristiwa yang berurutan.

Contoh 2.1

1. Seorang ibu mempunyai 4 kebaya dan 3 selendang. Berapa banyak cara pemakaian pasangan kebaya dan selendang?

Jawab:

Misal kebaya = $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ dan selendang = $\{S_1, S_2, S_3\}$.

Banyaknya pasangan seperti pada tabel berikut.

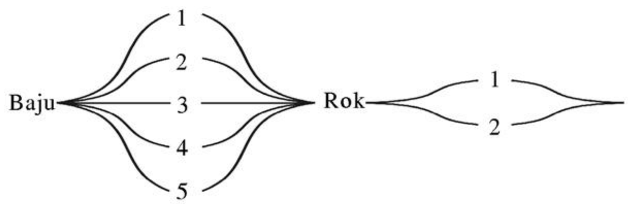
	S_1	S_2	S_3
K_1	(K_1, S_1)	(K_1, S_2)	...
K_2	...	...	...
K_3	...	...	...
K_4	...	...	(K_4, S_3)

Berdasarkan Tabel, banyaknya cara pemakaian pasangan kebaya dan selendang ada 12 cara.

Menurut aturan perkalian dapat dibentuk: (4×3) pasang = 12 pasang.

2. Yelsi mempunyai 5 baju dan 2 rok. Berapa macam cara Yelsi dapat menggunakan pakaian?

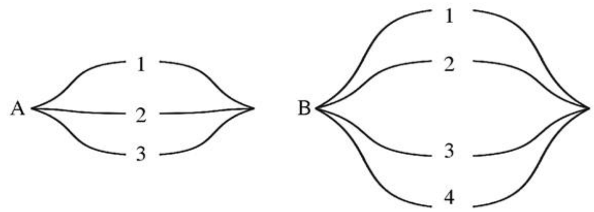
Jawab:



Jadi, Yelsi dapat menggunakan pakaian sebanyak = 5×2 cara = 10 cara.

3. Dean berpergian dari kota A ke kota B, ada 3 jalan yang dapat dilaluinya. Selanjutnya perjalanannya dilanjutkan dari kota B ke kota C ada 4 jalan. Berapa banyaknya jalan berbeda yang dapat ditempuh Dean jika ia berjalan dari A ke C?

Jawab:

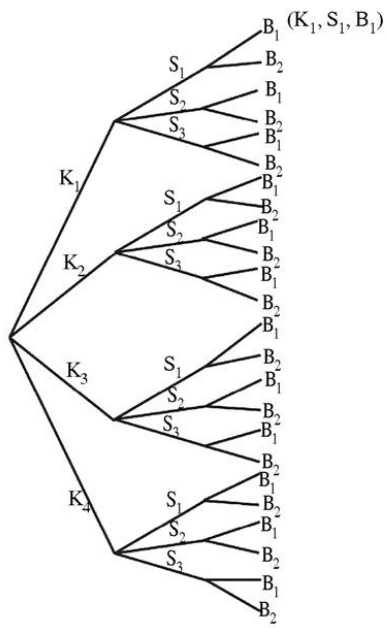


Banyaknya jalan yang ditempuh Dean sebanyak 3×4 cara $= 12$ cara.

4. Seorang ibu mempunyai 4 kebaya, 3 selendang, dan 2 kain batik. Berapa banyak cara pemakaian kebaya, selendang, dan kain?

   Jawab:

   Misalkan kebaya = $\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$, selendang = $\{S_1, S_2, S_3\}$, sedangkan kain batik = $\{B_1, B_2\}$. Banyaknya pasangan dapat dibuatkan diagram pohon seperti di bawah ini.



Dari diagram tersebut diperoleh hasil bahwa banyak pasangan (cara pemakaian) adalah $(4 \times 3 \times 2)$ cara = 24 cara.

5. Berapa banyak bilangan yang terdiri atas 4 angka berlainan, dapat disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 jika angka-angka itu tidak boleh muncul berulang?

   Jawab:

7	6	5	4

   Disediakan 4 kotak tempat angka.
   Kotak pertama tersedia 7 pilihan maka terdapat 7 cara.
   Kotak kedua terdapat 6 pilihan maka terdapat 6 cara.
   Kotak ketiga terdapat 5 pilihan maka terdapat 5 cara.
   Kotak keempat tinggal 4 pilihan maka terdapat 4 cara.
   Peristiwa tersebut merupakan pengisian angka yang berurutan pada empat tempat yang tersedia.
   Jadi, bilangan yang terjadi sebanyak $(7 \times 6 \times 5 \times 4) = 840$ bilangan.

6. Untuk membentuk pengurus suatu organisasi terdapat 3 calon ketua, 4 calon sekretaris, dan 3 calon bendahara. Ada berapa cara susunan pengurus yang terdiri atas seorang ketua, seorang sekretaris, dan seorang bendahara dapat dibentuk jika seseorang tidak boleh merangkap kedudukan.

   Jawab:

   Menurut aturan perkalian, susunan pengurus dapat dibentuk menurut: $3 \times 4 \times 3 = 36$ cara.

Latihan 2.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Seseorang bepergian dari kota A ke kota B, ada 4 jalan dan dari kota B ke kota C ada 5 jalan. Ada berapa cara orang tersebut bepergian dari kota A ke kota C kemudian kembali lagi dari kota C ke kota A tanpa melewati jalan yang sama?
2. Kasuba mempunyai 5 pasang kaos olahraga dan 3 pasang celana olahraga. Ada berapa cara Kasuba dapat memakai pasangan kaos dan celana tersebut?

3. Pada pelambungan sebuah mata uang dan pelemparan sebuah dadu, berapakah kemungkinan yang akan muncul antara mata uang dan dadu?
4. Di dalam suatu kelas akan diadakan pemilihan ketua kelas dan sekretaris dengan syarat ketua kelas harus laki-laki dan sekretaris harus perempuan. Jika ada 5 calon untuk ketua dan 3 calon untuk sekretaris, ada berapa macam cara pemilihan untuk memasangkan ketua dan sekretaris?
5. Tifa mempunyai 4 pasang sepatu dan 3 buah tas. Ada berapa cara Tifa dapat menggunakan pasangan sepatu dan tas?
6. Sebuah organisasi terdiri atas 5 anggota putra dan 4 anggota putri. Akan dipilih 2 orang pengurus yang terdiri 1 orang anggota putra dan 1 orang anggota putri.

   Berapa banyak cara untuk memilih susunan pengurus dalam organisasi itu?
7. Nevo memiliki 6 kemeja, 5 celana panjang dan 4 pasang sepatu. Ada berapa pasang kemeja, celana panjang, dan sepatu dapat dibentuk?
8. Jika sebuah kelompok siswa yang terdiri atas 10 siswa duduk di baris yang sama pada suatu auditorium. Berapa banyak cara yang mungkin 10 siswa tersebut menempati kursinya?
9. Dalam suatu ruangan terdapat empat kursi dan tujuh orang yang akan duduk di kursi itu. Jika sebuah kursi hanya boleh diduduki satu orang, ada berapa cara orang-orang tersebut dapat menempati kursi yang tersedia?
10. Ada 6 jalan yang menghubungkan kota A dengan kota B dan ada 7 jalan yang menghubungkan kota B dengan kota C. Ada berapa banyak jalan yang dapat ditempuh dari kota A ke kota C melalui B?

2. Permutasi

a. Pengertian Faktorial

Notasi faktorial ditulis $n!$ (dibaca n faktorial).

$n!$ adalah hasil perkalian semua bilangan asli dari 1 sampai n sehingga didefinisikan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} n! &= 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

Contoh 2.2

1. Tentukan nilai dari:

   a. $5!$ b. $\frac{5!}{4!}$ c. $\frac{n!}{(n-1)!}$

   Jawab:

   a. $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

   b. $\frac{5!}{4!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5$

   c. $\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1}{(n-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = n$

   Jadi, $n = \frac{n!}{(n-1)!}$ atau $(n-1)! = \frac{n!}{n}$

   Jika $n = 1$ diperoleh $\frac{1!}{(1-1)!} = \frac{1!}{0!} = 1$, sehingga didefinisikan $0! = 1$.
   Jelaskan $0! = 1$.

2. Nyatakan dengan notasi faktorial.

   a. $8 \times 7 \times 6 \times 5$ b. $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

   Jawab:

   a. $8 \times 7 \times 6 \times 5 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{8!}{4!}$

   b. $\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

   $= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} \, \frac{8 \times 7 \times \ldots \times 2 \times 1}{8 \times 7 \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{12!}{4!\,8!}$

3. Tentukan n dari : $\frac{n!}{(n-2)!} = 56$

Jawab:

$$\frac{n!}{(n-2)!} = 56$$

$$\frac{n\,(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 56$$

$$n\,(n-1) = 56$$

$$n^2 - n - 56 = 0$$

$$(n-8)\,(n+7) = 0$$

$n = 8$; $n = -7$ (tidak mungkin)

Jadi $n = 8$.

Latihan 2.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Hitunglah faktorial berikut.

   a. $6!$ b. $\frac{30!}{28!}$ c. $\frac{9!}{6!\,3!}$ d. $3!\frac{7!}{5!}$

2. Hitunglah:

   a. $\frac{6!}{0!(6-0)!}$ b. $\frac{9!}{5!\,3!}$ c. $\frac{8!}{6!} \times \frac{8!}{1!}$ d. $\frac{15!}{2!} \times \frac{11!}{3!}$

3. Nyatakan dalam notasi faktorial.

   a. $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$

   b. $n(n-1)(n-2)$

   c. $(n+2)(n+1)\,n(n-1)$

   d. $\frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

   e. $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

   f. $\frac{(n+3)(n+2)}{2 \times 1}$

4. Tentukan n yang memenuhi persamaan berikut.

   a. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$

   c. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 90$

   b. $4!(n+2)! = 3!(n+3)!$

   d. $\frac{n!}{(n-2)!} = 56$

5. Sederhanakanlah.

   a. $\frac{(n+3)!}{n!}$ untuk $n \geq 0$

   c. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!}$

   b. $\frac{n!}{(n-2)!}$ untuk $n \geq 2$

   d. $\frac{(n+2)!}{(n-1)!}$

b. Pengertian Permutasi

Permutasi adalah susunan elemen-elemen dari suatu himpunan yang memperhatikan urutannya. Misalnya dari himpunan dengan 3 anggota $\{a, b, c\}$ dapat disusun seperti urutan di bawah ini.

$abc \quad acb \quad bca \quad bac \quad cba \quad cab$

Setiap susunan dari ketiga anggota di atas disebut permutasi dari a, b, dan c yang diambil semua pada suatu saat, atau disebut permutasi tiga elemen dari himpunan dengan tiga anggota.

Misalkan dari himpunan dengan 4 anggota $\{a, b, c, d\}$ disusun permutasi dua elemen sebagai berikut.

$ab \quad ac \quad ad \quad bc \quad bd \quad ba \quad cd \quad ca \quad cb \quad da \quad db \quad dc$

Keduabelas susunan tersebut dinamakan permutasi dari a, b, c, dan d yang diambil dua elemen pada suatu saat atau dinamakan permutasi dua elemen dari himpunan empat anggota.

Sehingga permutasi dari n elemen yang disusun r per r elemen dinotasikan dengan ${}_nP_r$ atau $P(n, r)$ atau P_r^n.

c. Menentukan Banyaknya Permutasi

Misal dari himpunan dengan 2 anggota $\{a, b\}$ disusun permutasi 2 elemen kemudian disediakan dua kotak, yaitu:

2	1

Pengisian kotak pertama ada 2 cara, sedangkan kotak kedua ada 1 cara.
Jadi, didapat (2×1) cara = 2! cara.
Permutasi 2 elemen dari himpunan dengan 2 anggota ditulis dengan simbol $P_2 = 2$ sehingga $P_2 = 2!$

Sekarang, misalkan dari himpunan dengan n anggota disusun permutasi n elemen, permutasi tersebut dapat dihitung dengan cara:

n	$(n-1)$	$(n-2)$	...	3	2	1

Disediakan n kotak sehingga:
Pengisian kotak pertama terdapat n cara.
Pengisian kotak kedua terdapat $(n-1)$ cara.
Pengisian kotak ketiga terdapat $(n-2)$ cara.
Pengisian kotak ke-n terdapat 1 cara.
Jadi, didapat sebanyak $= (n \times (n-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1)$ cara
$= n!$ cara

Sehingga $\boxed{P_n = n!}$

Jika dari himpunan dengan n anggota disusun permutasi r elemen, yang ditulis dengan simbol ${}_nP_r$ (dengan $r \le n$), maka permutasi tersebut dapat dihitung dengan cara sebagai berikut.
Disediakan r kotak seperti berikut ini.

n	$(n-1)$	$(n-2)$	...	$n-r+2$	$n-r+1$

Pengisian kotak pertama ada n cara.
Kotak kedua terdapat $(n-1)$ cara.
Kotak ketiga terdapat $(n-2)$ cara.
Kotak ke-r (terakhir) terdapat $(n-r+1)$ cara.
Jadi, didapat sebanyak

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+2) \times (n-r+1)$$

$$\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+2) \times (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Jadi, $\boxed{{}_nP_r = P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$

Contoh 2.3

1. Hitunglah nilai dari ${}_{13}P_4$.

   Jawab:

$$
\begin{aligned}
{}_{13}P_4 &= \frac{13!}{(13-4)!} = \frac{13!}{9!} \\
&= \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9!}{9!} \\
&= 13 \times 12 \times 11 \times 10 = 17.160
\end{aligned}
$$

2. Tentukan n dari persamaan: ${}_nP_3 = 60$

   Jawab:

$$ {}_nP_3 = 60 $$

$$ \frac{n!}{(n-3)!} = 60 $$

$$
\begin{aligned}
\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} &= 60 \\
n(n-1)(n-2) &= 60
\end{aligned}
$$

n yang memenuhi adalah 5

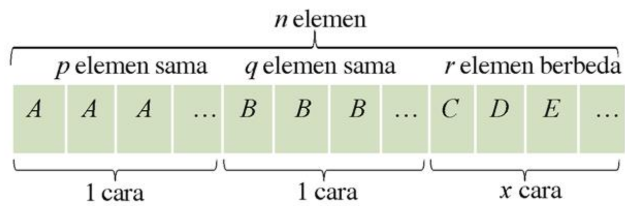
Latihan 2.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Hitunglah:
   a. P_7
   b. P_2^{18}
   c. P_4^5
   d. ${}_{10}P_3$
2. Carilah n dari:
   a. $\dfrac{P_{(n+2)}}{P_{(n+1)}} = 10$
   b. $P_2^n = \dfrac{2}{3} P_1^2$
   c. $P_3^n : P_2^n = 6$.
   d. $P_3^{n+1} = P_2^n$
   e $P_{(n-3)} = 5 \times 3! \times P_{(n-5)}$
3. a. Jika $2P_2^n - P_2^{2n} + 50 = 0$, buktikan $n = 5$.
   b. Jika $10P_2^n = P_4^{n+1}$, buktikan $n = 4$.

d. *Permutasi jika Ada Beberapa Elemen yang Sama*

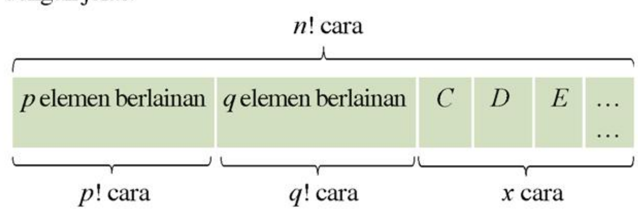
Perhatikan skema berikut.



Jika terdapat himpunan dengan n anggota yang terdiri sebanyak p elemen yang sama, q elemen lain yang sama, dan r elemen yang berlainan, maka permutasi p elemen yang sama sebanyak 1 cara, permutasi q elemen yang sama sebanyak 1 cara, dan permutasi r elemen $(C, D, E, \ldots)$ misalnya sebanyak x cara.

Jadi, permutasi n elemen dari himpunan yang mempunyai n anggota dengan p elemen yang sama, q elemen lain yang sama, dan r elemen yang berlainan adalah $(1 \times 1 \times x)$ cara $= x$ cara.

Sekarang, jika p elemen dan q elemen yang sama dibuat berlainan semua maka n elemen tersebut menjadi berlainan semua. Perhatikan skema berikut untuk dapat memahaminya dengan jelas.



Permutasi p elemen yang berlainan $= p!$ cara.
Permutasi q elemen yang berlainan $= q!$ cara.
Permutasi n elemen yang berlainan $= n!$ cara.
Sehingga didapat persamaan $p!\, q!\, x = n!$

Jadi, $\boxed{x = \dfrac{n!}{p!\, q!}}$

Contoh 2.4

1. Tentukan banyaknya susunan huruf-huruf yang dapat disusun dari huruf-huruf pada kata "MATEMATIKA".

   Jawab:

   Semua terdapat 10 huruf. Banyaknya elemen yang sama yaitu huruf M sebanyak 2, huruf A sebanyak 3, dan huruf T sebanyak 2.
   sehingga:

   $$P = \frac{10!}{2!\,3!\,2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2!\,3!\,2!}$$
   $$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$$
   $$= 151.200$$

   Jadi, banyaknya susunan huruf-huruf tersebut adalah 151.200.

2. Terdapat 10 bola yang terdiri atas 2 bola berwarna merah, 5 berwarna putih dan 3 berwarna kuning. Berapa banyak cara untuk menyusun kesepuluh bola tersebut secara berdampingan?

   Jawab:

   $$P = \frac{10!}{2!\,5!\,3!}$$
   $$= \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)(5\times4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)}$$
   $$= 2.520$$

   Jadi ada 2.520 cara.

Latihan 2.4

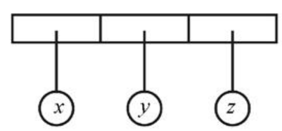
Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan banyaknya susunan huruf-huruf yang disusun dari huruf-huruf pada kata berikut.
   a. KATAK
   b. STATISTIK
   c. SANDANG
   d. SURAKARTA
2. Tentukan banyaknya susunan huruf yang tersusun pada kata "BEBERAPA" dengan syarat huruf mati dan huruf hidup harus bergantian.

3. Berapa banyak bilangan yang terdiri atas 4 angka yang dapat disusun dari angka-angka.
   a. 1, 2, 3, dan 4
   b. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9
4. Terdapat 3 jenis buku masing-masing sebanyak empat, tiga, dan dua buku. Buku itu akan dibagikan kepada 9 anak. Setiap anak mendapat satu buku. Berapa banyak cara pembagian tersebut?
5. Berapa banyaknya bilangan yang terdiri atas delapan angka yang disusun dari angka-angka: 2, 2, 3, 5, 5, 5, 5, 6?
6. Tentukan banyaknya susunan huruf yang tersusun pada kata-kata berikut dengan syarat huruf hidup dahulu baru huruf mati.
   a. DISIPLIN
   b. SEJAHTERA
7. Banyaknya mata uang Rp1.000,00; Rp500,00; Rp100,00 berturut-turut 3, 4, dan 5. Dengan berapa cara keduabelas mata uang itu dapat disusun berdampingan?
8. Diberikan 10 foto dengan 6 di antaranya foto berwarna dan sisanya hitam putih. Berapa banyak cara untuk menyusun kesepuluh foto itu secara berdampingan?
9. Dalam berapa carakah 9 hadiah berbeda dapat diberikan kepada dua orang siswa sehingga seorang menerima 3 dan yang lainnya 6?
10. Suatu regu gerak jalan terdiri atas 10 orang dengan 6 pria dan 4 wanita. Ada berapa cara susunan baris berbaris yang dapat dibentuk jika keempat wanita harus saling berdekatan?

e. Permutasi Siklis

Permutasi siklis adalah permutasi melingkar (urutan melingkar). Marilah kita perhatikan uraian berikut untuk memahami permutasi siklis.

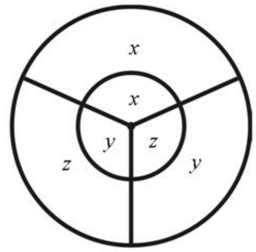


Gambar 2.2 *Permutasi x, y, z*

Jika ada tiga macam kunci, misal x, y, z ditempatkan pada tempat kunci yang sebaris, seperti pada Gambar 2.2 di atas, maka banyaknya permutasi adalah 3!

Jika diletakkan pada tempat kunci yang melingkar, seperti pada Gambar 2.3.

Urutan yang sama adalah: $x\ y\ z$, $y\ z\ x$, $z\ x\ y$.
Urutan lain yang sama adalah: $x\ z\ y$, $z\ y\ x$, $y\ x\ z$.
Jadi, permutasi dari 3 elemen sebanyak $\frac{3!}{3} = 2!$



Gambar 2.3 *Permutasi siklis x, y, z*

Permutasi melingkar dari 4 elemen, yaitu untuk setiap empat permutasi baris menjadi sama dalam permutasi melingkar. Misalnya, permutasi 4 elemen p, q, r, s dengan urutan yang sama, antara lain $p\ q\ r\ s$, $q\ r\ s\ p$, $r\ s\ p\ q$, $s\ p\ q\ r$.

Jadi, banyaknya permutasi melingkar 4 elemen adalah $\frac{4!}{4} = 3!$

Dari contoh di atas dapat diturunkan dengan cara yang sama bahwa permutasi melingkar dari n elemen adalah sebanyak $\frac{n!}{n} = (n-1)!$

Jadi, banyaknya permutasi melingkar n elemen $= (n - 1)!$

Contoh 2.5

1. Lima orang duduk dalam posisi melingkar. Tentukan banyaknya cara duduk tersebut.

   Jawab:

   Banyaknya cara duduk = banyak permutasi melingkar 5 elemen.
   $= (5 - 1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

   Jadi, banyaknya cara duduk lima orang tersebut adalah 24 cara.

2. Diketahui ada 5 pemuda dan 3 pemudi duduk mengelilingi meja bundar. Tentukan banyaknya kemungkinan susunan mereka jika:
   a. mereka duduk bebas,
   b. tidak ada pemudi berdampingan,
   c. pemuda pertama dan pemudi pertama tidak duduk berdampingan.

Jawab:

a. Banyaknya susunan mereka duduk bebas adalah:

$P_8(\text{siklis}) = (8 - 1)!$
$= 7!$
$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5.040$

b. Dengan tanpa menghitung pemudi pertama, banyaknya susunan mereka duduk adalah P(siklis) (7) = 6!. Setelah mereka duduk, maka pilihan duduk pemudi pertama ada 5. Sehingga:
$6! \times 5 = 3.600$

c. Setelah 5 pemuda duduk, pemudi pertama mempunyai pilihan 5 posisi.
Syarat: tidak ada pemudi yang berdampingan maka pemudi kedua hanya mempunyai 4 kemungkinan dan pemudi ketiga hanya mempunyai 3 kemungkinan, sehingga:
$4! \times 5 \times 4 \times 3 = 1.440$.

Latihan 2.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Hitunglah banyaknya permutasi siklis dari:
   a. 5 unsur
   b. 6 unsur
   c. 8 unsur
2. Sebuah gelang disusun dari 8 biji permata yang berlainan warna. Tentukan banyaknya cara penyusunan tersebut.
3. Sepuluh orang yang hadir dalam suatu rapat duduk dengan posisi melingkar. Tentukan banyaknya cara posisi duduk mereka.
4. Suatu acara pembubaran panitia reuni SMA dihadiri 15 orang. Pada acara terakhir diisi dengan menyanyi bersama sambil bergandengan tangan melingkar. Tentukan banyaknya cara penyusunan urutan tersebut.
5. Dengan berapa cara 6 orang dapat duduk pada:
   a. 6 kursi berdampingan, dan
   b. 6 kursi yang terletak di sekeliling meja bundar.
6. Dalam berapa cara 8 orang dapat duduk mengelilingi meja, apabila 2 orang yang istimewa harus selalu duduk bersama?

7. Dalam berapa carakah 4 orang laki-laki dan 4 perempuan dapat duduk mengelilingi sebuah meja bundar. Jika setiap orang perempuan duduk diantara dua orang laki-laki?
8. Dari 10 orang peserta diskusi dibentuk formasi melingkar mengelilingi meja bundar. Ada berapa cara formasi itu dapat dibentuk?

f. Penggunaan Permutasi

Permutasi banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Perhatikanlah contoh berikut.

Contoh 2.6

1. Tentukan banyaknya nomor telepon yang terdiri atas tujuh angka berlainan, disusun dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

   Jawab:

   Banyaknya nomor telepon tersebut adalah

   $P_7 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

   $= 5.040$

2. Suatu kelas terdiri atas 40 siswa akan dipilih seorang ketua kelas, seorang sekretaris, dan seorang bendahara. Tentukan banyaknya cara pemilihan tersebut.

   Jawab:

   Peristiwa ini merupakan suatu permutasi 3 elemen dari himpunan dengan 40 anggota.

   $$_{40}P_3 = \frac{40!}{(40-3)!} = \frac{40!}{37!} = \frac{40 \times 39 \times 38 \times 37!}{37!}$$

   $$= 40 \times 39 \times 38$$

   $$= 59.280$$

   Jadi, banyaknya cara pemilihan tersebut 59.280 cara.

3. Empat orang masuk ke dalam bus dan tersedia 10 tempat duduk yang masih kosong. Tentukan banyaknya semua kemungkinan posisi empat orang tersebut duduk.

Jawab:

$$_{10}P_4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

$$= 5.040$$

Latihan 2.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan banyaknya bilangan yang terdiri atas tiga angka berlainan yang dapat disusun dari angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, dan 5, serta bilangan tersebut nilainya lebih dari 300.
2. Tentukan banyaknya bilangan genap yang terdiri atas empat angka yang berlainan disusun dari angka-angka 2, 3, 4, 5, 6, dan 7.
3. Dari 5 orang finalis lomba menyanyi akan dipilih juara I, II, dan III. Berapa banyaknya cara pemilihan tersebut?
4. Bilangan-bilangan yang terdiri atas angka (ratusan) yang berlainan dibentuk dari angka-angka 0, 1, 3, 5, 7, dan 9.
   a. Tentukan banyaknya bilangan yang terbentuk.
   b. Berapa banyaknya bilangan yang terbentuk yang habis dibagi lima?
   c. Berapa banyaknya bilangan yang terbentuk yang nilainya lebih dari 500?
5. Berapakah banyaknya permutasi dari cara duduk yang dapat terjadi jika dari 9 orang hanya disediakan 4 kursi dan masih harus dipenuhi syarat:
   a. salah seorang harus selalu duduk di kursi paling ujung,
   b. salah seorang tidak boleh duduk di kursi yang disediakan?
6. Dalam suatu kelas yang terdiri atas 30 murid akan dipilih ketua, sekretaris, dan bendahara. Berapa banyak susunan yang dapat dipilih?
7. Terdapat 4 bendera merah, 3 bendera putih, dan 2 bendera biru. Ada berapa cara bendera-bendera itu dapat dipasang secara berdampingan.

8. Ada 4 anak laki-laki dan 6 anak perempuan. Dengan berapa cara anak tersebut duduk berdampingan jika:
   a. posisi duduk sembarang,
   b. anak laki-laki dan perempuan terpisah, sehingga hanya sepasang saja yang berdampingan.
9. Dalam berapa cara 5 surat dapat dikirimkan apabila tersedia 3 kotak surat?
10. Dalam berapa cara dua hadiah diberikan kepada 10 kontestan apabila kedua hadiah:
   a. tidak boleh diberikan kepada orang yang sama, dan
   b. boleh diberikan kepada orang yang sama.

3. Kombinasi

Jika diketahui dua unsur A dan B, maka pada permutasi susunan AB dan BA merupakan dua susunan yang berbeda. Namun, pada kombinasi susunan AB dan BA dipandang sebagai susunan yang sama.

Kombinasi r elemen dari himpunan yang mempunyai n anggota ($r \leq n$) ialah semua susunan yang mungkin terdiri atas r elemen berbeda diambil dari n anggota himpunan itu, tanpa memperhatikan urutannya. Simbolnya ditulis dengan ${}_nK_r$ atau K_r^n atau $K(n, r)$. Dalam buku lain, mungkin saja disimbolkan C_r^n, atau $C(n, r)$.

Perhatikan hubungan antara kombinasi dan permutasi pada tabel berikut.

Tabel Kombinasi dan Permutasi *A*, *B* dan *A*, *B*, *C*

Kombinasi	Permutasi
AB	AB, BA
ABC	ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Dari tabel di atas terdapat hubungan sebagai berikut.
Sebuah kombinasi 2 elemen terdapat 2! permutasi 2 elemen.
Sebuah kombinasi 3 elemen terdapat 3! permutasi 3 elemen.

Dengan cara yang sama, sebuah kombinasi r elemen terdapat $r!$ permutasi r elemen. Dengan demikian, jika terdapat x kombinasi r elemen maka diperoleh $x\ r!$ permutasi r elemen. Jika terdapat ${}_nK_r$ kombinasi r elemen maka diperoleh ${}_nK_r\ r!$ permutasi r elemen. Padahal jika setiap kombinasi r elemen dari ${}_nK_r$ dipermutasikan maka terdapat ${}_nP_r$ permutasi.

Jadi, ${}_nK_r\ r! = {}_nP_r$

$$ {}_nK_r = \frac{{}_nP_r}{r!} \qquad \text{atau} \qquad {}_nK_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} $$

Contoh 2.7

1. Tentukan nilai dari ${}_{12}K_3$ dan ${}_{12}K_9$.

   Jawab:

   a. $$\begin{aligned} {}_{12}K_3 &= \frac{12!}{3!(12-3)!} \\ &= \frac{12!}{3!\ 9!} \\ &= \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9!}{3 \times 2 \times 1 \times 9!} \\ &= 2 \times 11 \times 10 = 220 \end{aligned}$$

   b. $$\begin{aligned} {}_{12}K_9 &= \frac{12!}{9!(12-9)!} \\ &= \frac{12!}{9!\ 3!} \\ &= 220 \end{aligned}$$

2. Tentukan n dari persamaan ${}_{n+2}K_3 = 4 \times {}_{n}K_2$

Jawab:

$$
\begin{aligned}
{}_{n+2}K_3 &= 4 \times {}_{n}K_2 \\
\frac{(n+2)!}{3![(n+2)-3]!} &= 4\frac{n!}{2!(n-2)!} \\
\frac{(n+2)!}{3!(n-1)!} &= \frac{4n!}{2!(n-2)!} \\
\frac{(n+2)(n+1)(n)!}{3\times 2\times 1(n-1)(n-2)!} &= \frac{4n!}{2\times 1(n-2)!} \\
(n+2)(n+1) &= 4 \times 3\ (n-1) \\
n^2 + 3n + 2 &= 12n - 12 \\
(n-2)(n-7) &= 0 \\
n = 2\ ;\ n &= 7
\end{aligned}
$$

Jadi nilai n yang memenuhi adalah $n = 2$ atau $n = 7$.

a. *Binomium Newton (*)*

Nilai $(a + b)^n$ dengan n bilangan asli dapat dicari dengan menggunakan cara sebagai berikut.

$(a + b)^1 = a + b$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, dan seterusnya.

Koefisien ruas kanan oleh Pascal dapat dibentuk menjadi segitiga seperti berikut.

Pangkat	Koefisien
1	1 1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	3 10 10 5

dan seterusnya

Newton menghubungkan koefisien tersebut dengan rumus kombinasi.

Misalnya:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$= {}_4K_0a^4 + {}_4K_1a^3b + {}_4K_2a^2b^2 + {}_4K_3ab^3 + {}_4K_4b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$
$$= {}_5K_0a^5 + {}_5K_1a^4b + {}_5K_2a^3b^2 + {}_5K_3a^2b^3 + {}_5K_4ab^4 + {}_5K_5b^5$$

dan seterusnya.

Jadi, jika n bilangan asli maka:

$$(a+b)^n = {}_nK_0a^n + {}_nK_1a^{n-1}b + {}_nK_2a^{n-2}b^2 + \ldots + {}_nK_ra^{n-r}b^r + \ldots + {}_nK_nb^n$$

$(a+b)^n$ dapat ditulis dengan notasi sigma sebagai berikut.

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} {}_nK_r a^{n-r} b^r$$

Sehingga ${}_nK_r$ disebut juga koefisien binomium.

Selanjutnya untuk:

$$(a-b)^n = (a+(-b))^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_nK_r\, a^{n-r} (-b)^r$$
$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r\, {}_nK_r\, a^{n-r}\, b^r$$

Contoh 2.8

Carilah penjabaran $(a+b)^6$ dengan teorema binomium.

Jawab:

$$(a+b)^6 = {}_6K_0a^6 + {}_6K_1a^5b + {}_6K_2a^4b^2 + {}_6K_3a^3b^3 + {}_6K_4a^2b^4 + {}_6K_5ab^5 + {}_6K_6b^6$$

Dengan menghitung koefisien binomium didapat:

${}_6K_0 = 1$, ${}_6K_1 = 6$, ${}_6K_2 = 15$, ${}_6K_3 = 20$, ${}_6K_4 = {}_6K_2 = 15$,

${}_6K_5 = {}_6K_1 = 6$,

${}_6K_6 = {}_6K_0 = 1$

Maka didapat:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

Latihan 2.7

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Hitunglah.
   a. ${}_{25}K_2$ c. K_{25}^{23}
   b. ${}_{9}K_4$ d. K_{17}^{5}
2. Tentukan n dari persamaan berikut.
   a. $K_4^n = 126$ c. ${}_{(n+2)}K_5 = 2({}_{n+1}K_4)$, $n > 5$
   b. $K_4^{n+1} = K_3^n$ d. $9\,({}_{n}K_7) = {}_{n+2}K_8$, $n > 8$
3. Carilah penjabaran dari perpangkatan berikut ini.
   a. $(a + b)^7$ c. $(a - b)^8$
   b. $(2x + y)^6$ d. $(3p - 2q)^5$
4. Carilah koefisien x^4 pada penjabaran dari perpangkatan berikut.
   a. $(x + y)^{10}$ c. $(x - 3y)^7$
   b. $(2x + 3y)^7$ d. $(2x - y)^6$
5. Tentukan nilai n dari:
   a. $K_4^3 = \frac{5}{24} P_3^n$ c. $4P_2^n = {}_3K_3^n$
   b. $K_{10}^n = K_5^n$ d. $K_3^{n+4} = 35$

b. *Penggunaan Kombinasi*

Kombinasi banyak digunakan dalam kehidupan sehari-hari, seperti contoh berikut.

Contoh 2.9

1. Empat orang dari 12 orang anggota tim bulu tangkis akan dipilih untuk bertanding. Berapa banyak komposisi pemain tim yang dapat dipilih?

   Jawab:

   4 orang dipilih dari 12 orang tanpa memperhatikan urutan, maka banyaknya komposisi pemain adalah:

2. Suatu kotak terdapat 7 bola biru dan 5 bola merah. Tentukan banyaknya cara untuk mengambil 6 bola sehingga mendapatkan 4 bola biru dan 2 bola merah.

Jawab:

Pengambilan 4 bola biru dari 7 bola = ${}_7C_4$
Pengambilan 2 bola merah dari 6 bola = ${}_6C_2$
Pengambilan secara bersamaan = $({}_7C_4 \times {}_6C_2)$ cara

$$
\begin{aligned}
{}_7C_4 \times {}_6C_2 &= \frac{7!}{4!\,(7-4)!} \times \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \text{ cara} \\
&= \frac{7!}{4!\,3!} \times \frac{6!}{2!\,4!} \text{ cara} \\
&= 7 \times 5 \times 3 \times 5 \text{ cara} \\
&= 525 \text{ cara}
\end{aligned}
$$

Latihan 2.8

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Lima soal dari 8 soal yang tersedia harus dikerjakan. Tentukan banyaknya cara pemilihan tersebut.
2. Suatu pesta dihadiri 125 orang. Setelah selesai pesta, semua saling berjabat tangan. Berapakah banyaknya jabat tangan tersebut?
3. Diketahui 12 titik tanpa 3 titik yang terletak pada satu garis. Tentukan banyaknya garis yang dapat dilukis melalui setiap dua titik.
4. Suatu kelas terdiri atas 40 siswa, 26 di antaranya adalah putra. Dipilih 3 orang sebagai pengibar bendera, dengan pembawa bendera selalu putri dan 2 anak yang lain putra. Berapa banyak cara pemilihan tersebut?
5. Tersedia 15 macam warna benang bordir. Seorang tukang bordir membuat model bordiran yang terdiri atas 4 macam warna yang berbeda. Berapa banyaknya komposisi warna yang terjadi?
6. Empat orang putra dan 2 orang putri dipilih dari sekelompok remaja yang terdiri atas 15 putra dan 10 putri. Tentukan banyaknya cara pemilihan tersebut.
7. Mirza diwajibkan membuat rangkuman 3 buku berbeda dari 7 buku yang tersedia. Ia bebas memilih jenis buku yang akan dirangkumnya. Tentukan banyaknya cara Mirza memilih variasi 3 buku tersebut.

8. Sebuah delegasi dari 3 orang yang diseleksi setiap tahun pada suatu organisasi untuk mengikuti pertemuan.
   a. Ada berapa cara delegasi itu dapat dipilih, jika ada 12 orang yang layak pilih?
   b. Ada berapa cara jika dua orang dari orang yang pantas dipilih tidak mau mengikuti lomba itu bersama-sama?
   c. Ada berapa cara jika dua orang dari orang yang layak pilih itu menikah dan hanya mau menghadiri pertemuan secara bersama-sama.
9. Seorang siswa diperbolehkan memilih 5 dari 10 soal. Dalam berapa cara ia dapat memilihnya?
10. Diberikan masing-masing sebuah logam berikut ini:
    Rp25,00; Rp50,00; Rp200,00; Rp500,00 dan Rp1.000,00
    a. Berapa banyaknya jumlah uang yang berbeda dapat diperoleh dengan mengambil dua uang logam tersebut?
    b. Berapakah jumlah uang logam yang berbeda dapat diperoleh dari uang logam itu?
11. Dalam berapa cara 10 pulpen dapat dibagi antara Laras dan Dinda sehingga salah satu dapat memperoleh 6 dan yang lainnya 4 pulpen?
12. a. Berapa banyak diagonal yang dimiliki segi 5 beraturan?
    b. Berapa banyak diagonal segi 9, segi 12, dan segi 20?

B. Menentukan Banyaknya Kemungkinan Kejadian

Contoh 2.10

Dalam suatu organisasi akan dipilih pengurus yang terdiri ketua, wakil ketua, dan sekretaris. Jika terdapat 10 orang calon, berapa banyaknya cara yang digunakan agar tidak ada jabatan rangkap?

Jawab:

Jabatan ketua ada 10 kemungkinan.
Jabatan wakil ketua ada 9 kemungkinan.
Jabatan sekretaris tinggal 8 kemungkinan.
Jadi, banyaknya cara agar tidak terjadi adanya jabatan rangkap adalah $10 \times 9 \times 8 = 720$ cara.

Bella akan membeli 3 potong baju dan 4 potong rok dari pedagang eceran yang memiliki dagangan 5 potong baju dan 5 potong rok. Berapa banyak cara Bella dapat memilihnya?

Jawab:

Kombinasi 3 baju dari 5 baju yang dapat dipilih =

$$\frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Kombinasi 4 rok dari 5 rok yang dapat dipilih =

$$\frac{5!}{(5-4)!4!} = \frac{5!}{1!4!} = 5$$

Jadi, banyaknya cara Bella memilih baju dan rok adalah $10 \times 5 = 50$ cara.

Latihan 2.9

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tulislah dalam bentuk faktorial perkalian bilangan-bilangan berikut.
   a. $\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)\ n(n-1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$
   b. $2n\,(2n-1)\,(2n+1)$
2. Tentukan n dari persamaan berikut.
   a. ${}_{(n+1)}K_{(2n-6)} = 105$ untuk $n > 3$.
   b. ${}_{(n+1)}K_6 = \frac{1}{3}\left({}_{(n-1)}P_4\right)$ untuk $n > 6$.
3. Tentukan banyaknya permutasi dari 11 angka: ”32222366216”.
4. Dua orang dari 14 orang anggota tim kesebelasan sepak bola bertugas khusus sebagai penjaga gawang. Tentukan banyaknya komposisi penyusunan pemain kesebelasan tersebut.
5. Seorang ketua, seorang sekretaris, seorang bendahara, dan dua orang pembantu umum akan dipilih dari 25 orang anggota PKK. Tentukan banyaknya cara pemilihan tersebut.
6. Antara kota A dan kota B terdapat delapan jalan yang berlainan. Seseorang pergi dari kota A ke kota B dan kembali lagi ke kota A. Berapa banyaknya cara seseorang tersebut menempuh jalan, jika jalan waktu berangkat dan waktu kembali berlainan?

7. Tentukan banyaknya susunan huruf-huruf yang disusun dari kata "MATEMATIKA" dengan syarat huruf mati dan huruf hidup harus bergantian dan dimulai dari huruf mati.
8. Diketahui 8 titik tanpa 4 titik yang terletak pada satu bidang. Tentukan banyaknya bidang yang dapat dilukis melalui tiga buah titik dari titik-titik tersebut.
9. Enam buku matematika, empat buku fisika, dua buku kimia, dan dua buku biologi disusun dalam satu rak buku sebaris. Tentukan banyaknya cara penyusunan buku tersebut.
10. Delapan orang terdiri atas 4 putra dan 4 putri duduk dalam posisi melingkar. Berapa cara mereka dapat duduk dalam urutan bergantian antara putra dan putri?

C. Ruang Sampel suatu Percobaan Acak

Setiap hasil yang mungkin terjadi dalam suatu eksperimen disebut *titik sampel*. Adapun himpunan dari semua titik sampel disebut *ruang sampel* (yang biasanya dinotasikan dengan S). Banyaknya anggota ruang sampel ditulis dengan simbol $n(S)$. Himpunan bagian dari suatu ruang sampel disebut *kejadian*.

Contoh 2.11

1. Tentukan titik sampel dan ruang sampel pada peristiwa pelemparan sebuah mata uang logam.

Jawab:

Titik-titik sampel dalam pelemparan sebuah mata uang logam adalah G dan A. Adapun $S = \{G, A\}$, dengan G = tampak gambar dan A = tampak angka, sehingga $n(S) = 2$. Sebuah mata uang logam dilemparkan sesuai contoh di atas maka $S = \{G, A\}$, $n(S) = 2$.
Ruang kejadian = $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ dengan $K_1 = \{\ \}$ $K_2 = \{G\}$, $K_3 = \{A\}$, $K_4 = \{G, A\} = S$.

Menurut teori himpunan maka: $n(K) = 2^{n(S)}$ dengan $n(K)$ = banyaknya anggota K.

Dari persoalan di atas $n(K) = 2^2 = 4$.

2. Tentukan ruang sampel pada pelemparan dua buah dadu secara bersama-sama.

Jawab:

d_1 \ d_2	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	...	...	...
2	...	...	...	...	...	...
3	...	...	...	...	...	...
4	...	...	(4, 3)	...	...	...
5	...	...	...	(5, 4)	...	...
6	...	...	...	...	...	(6, 6)

Tampak dari tabel tersebut ruang sampelnya adalah:
$S = \{ (1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (6, 6) \}$ dan $n(S) = 6^2 = 36$.

3. Tentukan kejadian munculnya hasil perkalian mata dadu adalah 6, pada pelemparan dua buah dadu secara bersama-sama seperti contoh 2 di atas.

Jawab:

Misalkan variabel random x adalah hasil kali titik yang tampak maka
$K_{(x = 6)} = \{(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)\}$.

D. Peluang suatu Kejadian

Kemungkinan yang muncul pada pelemparan sebuah mata uang logam hanya dua, yaitu permukaan gambar (G) dan permukaan angka (A). Gambar dan angka mempunyai peluang yang sama untuk muncul. Hal ini dapat dinyatakan secara matematik bahwa kemungkinan keluarnya gambar adalah salah satu dari dua atau $\frac{1}{2}$. Dengan demikian, kemungkinan keluarnya angka $\frac{1}{2}$ juga.

Misalkan kita mengambil sebuah kelereng dari sebuah kotak yang berisi 2 kelereng biru dan 3 kelereng merah, maka kemungkinan keluar kelereng biru ialah $\frac{2}{5}$, sedangkan kemungkinan keluar kelereng merah $\frac{3}{5}$.

Jika suatu kejadian A yang bersesuaian eksperimen dengan ruang sampel S dan setiap titik sampelnya berkemungkinan sama untuk muncul (terjadi), maka peluang untuk kejadian A yang dinotasikan dengan $P(A)$ adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$ dengan $n(A)$ adalah banyaknya anggota A.

Contoh 2.12

1. Tentukan peluang munculnya mata dadu berangka ganjil pada pelemparan sebuah dadu.

   Jawab:

   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ maka $n(S) = 6$
   $K(\text{ganjil}) = \{1, 3, 5\}$ maka $n(\text{ganjil}) = 3$

   $$P(\text{ganjil}) = \frac{n(\text{ganjil})}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

   Jadi, peluang munculnya mata dadu berangka ganjil pada pelemparan sebuah dadu adalah $\frac{1}{2}$.

Dimensi Matematika

Sering kita mendengar "di dunia ini tak ada yang tak mungkin". Benarkah kalimat itu? Bagaimana jika dikaitkan dengan Teori Peluang?

2. Sebuah kantong berisi 5 kelereng merah dan 7 kelereng putih. Dari kantong tersebut diambil 2 kelereng sekaligus secara acak. Tentukan peluang bahwa kelereng yang diambil kedua-duanya berwarna putih.

   Jawab:

   $$n(S) = K_2^{12} = \frac{12!}{2!\,10!} = \frac{12 \times 11 \times 10!}{2 \times 1 \times 10!} = 66$$

   Misalkan A adalah kejadian kelereng yang terambil berwarna putih seluruhnya, maka $n(A)$ adalah banyaknya cara pengambilan 2 kelereng putih dari 7 kelereng putih yang tersedia.

Sehingga, $n(A) = K_2^7 = \dfrac{7!}{2!\,5!} = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 21.$

Jadi, peluang bahwa kelereng yang diambil kedua-duanya berwarna putih adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}.$$

Latihan 2. 10

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan besarnya peluang kejadian jumlah mata dadu yang muncul tidak habis dibagi 3 pada percobaan melambungkan dua buah dadu.
2. Tentukan besarnya peluang munculnya dua angka berturut-turut pada percobaan melambungkan sekeping uang logam tiga kali.
3. Apabila kalian melalui persimpangan jalan yang memakai lampu lalu lintas, berapa peluang kalian akan mendapat lampu hijau?
4. Empat anak dari 14 orang anak yang ada, 6 di antaranya putri akan dipilih untuk menyanyi. Tentukan peluang yang terpilih keempatnya adalah putri.
5. Dua dokter di antara 9 dokter pria dan 3 dokter wanita akan dipilih secara acak untuk melaksanakan pembedahan.
   a. Berapa banyaknya pasangan dokter yang berbeda yang dapat dipilih?
   b. Berapa banyaknya pasangan yang dipilih paling banyak seorang wanita?
   c. Berapa peluang bahwa tidak seorang pun dokter wanita ikut terpilih?
6. Tentukan peluang kejadian berikut pada percobaan pelemparan dua uang logam sekaligus.
   a. Munculnya satu angka.
   b. Munculnya dua gambar.
7. Tentukan peluang kejadian berikut pada percobaan pelemparan sebuah dadu.
   a. Muncul mata dadu bilangan prima.
   b. Muncul bilangan berjumlah sekurang-kurangnya 4.
8. Dua kartu sekaligus diambil dari seperangkat kartu bridge (52 kartu). Tentukan peluang kejadian kartu yang terambil adalah:
   a. kartu *As*
   b. kartu merah

1. Tafsiran Peluang Suatu Kejadian

Jika kejadian A dalam ruang sampel S selalu terjadi maka $n(A) = n(S)$, sehingga besarnya peluang kejadian A adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = 1$$

Adapun jika kejadian A dalam ruang sampel S tidak pernah terjadi maka $n(A) = 0$, sehingga $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$. Oleh karena itu, nilai peluang itu terbatas, yaitu: $0 \le P(A) \le 1$

2. Frekuensi Harapan suatu Kejadian

Apabila kita melempar sebuah mata uang logam sebanyak satu kali, maka peluang muncul angka (A) adalah $\frac{1}{2}$. Hal ini berarti jika mata uang logam dilemparkan 20 kali, maka angka (A) muncul sebanyak 10 kali. Dengan demikian dapat dikatakan bahwa frekuensi harapan munculnya angka pada pelemparan mata uang logam sebanyak 20 kali adalah 10.

Jadi, frekuensi harapan terjadinya kejadian A {dinotasikan $F(A)$} pada suatu percobaan yang dilakukan n kali adalah:

$$F(A) = n \times P(A)$$

dengan $P(A)$ adalah peluang kejadian A
$F(A)$ adalah frekuensi harapan terjadinya kejadian A

Contoh 2.13

Tentukan frekuensi harapan jumlah mata dadu paling sedikit 8, pada percobaan melambungkan dua buah dadu sebanyak 180 kali.

Jawab:

$n = 180$
$n(S) = 36$
$n(\text{jumlah} \ge 8) = 15$
$P(\text{jumlah} \ge 8) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

Sehingga frekuensi harapan jumlah mata dadu paling sedikit 8 adalah:

$$F(\text{jumlah} \geq 8) = \frac{5}{12} \times 180 = 75$$

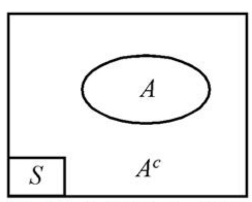
Latihan 2. 11

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan frekuensi harapan jumlah mata dadu yang muncul habis dibagi 3, pada percobaan melambungkan dua buah dadu sebanyak 540 kali.
2. Tentukan frekuensi harapan muncul satu "angka", pada pelemparan dua mata uang logam sebanyak 100 kali.
3. Hasil Uji Coba Tes SMP adalah yang mendapatkan nilai 48 ke atas di sekolah A dari 300 anak terdapat 37 anak, di sekolah B dari 350 anak terdapat 34 anak, di sekolah C dari 350 terdapat 41 anak. Tentukan frekuensi relatif (nisbi) anak yang mendapat nilai 48 ke atas dari sekolah A, B, dan C.
4. Tentukan frekuensi harapan muncul "dua gambar" dalam percobaan melambungkan 6 mata uang logam 320 kali.
5. Tentukan frekuensi harapan jumlah mata dadu yang muncul bilangan genap lebih besar 8, pada pelemparan dua buah dadu sebanyak 100 kali.

E. Peluang Komplemen suatu Kejadian

Beberapa kejadian dasar yang digabungkan dapat membentuk kejadian-kejadian majemuk yang meliputi komplemen, gabungan, dan irisan. Adapun mengenai peluangnya dapat dijabarkan sebagai berikut.



Gambar 2.4 $P(A)$ dan $P(A^c)$

Jika himpunan dari semua kejadian dalam suatu eksperimen ...... S, dan A^c merupakan kejadian yang terjadi jika dan hanya jika A tidak terjadi, seperti ditunjukkan Gambar 2.4. Suatu kejadian A^c (bukan A) terdiri atas semua titik di S yang tidak ada di A, disebut kejadian komplemen.

Maka hubungan dari peluang masing-masing adalah:

$$P(A) + P(A^c) = 1$$
$$P(A^c) = P(\bar{A}) = P(S) - P(A)$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Contoh 2.14

Tentukan peluang munculnya mata uang logam paling sedikit satu "angka", dalam percobaan melambungkan empat mata uang logam sekaligus.

Jawab:

$n(S) = 2^4 = 16$

Kejadian paling sedikit satu "angka", komplemennya adalah kejadian tanpa "angka".

n(tanpa "angka") = 1

P(paling sedikit satu "angka") = 1 – P(tanpa "angka") = 1 – $\frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

Latihan 2.12

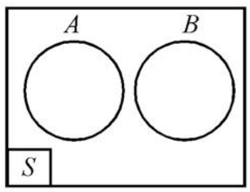
Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Menurut ramalan cuaca, peluang hari ini hujan adalah $\frac{2}{3}$. Berapa kemungkinan hari ini tidak hujan?
2. Kota yang terletak dekat laut mempunyai peluang banjir sebesar $\frac{4}{5}$. Berapa peluang kota tersebut tidak banjir?
3. Tentukan peluang paling sedikit muncul satu gambar dalam percobaan melambungkan 3 mata uang sekaligus.
4. Dua dadu dilambungkan sekaligus, tentukan peluang jumlah mata dadu:
   a. kurang dari 6
   b. lebih dari 6.
5. Angka harapan hidup di suatu kota di Indonesia sampai umur 66 tahun adalah 0,9. Jika kota tersebut ada 1.000 orang yang lansia, berapa peluang lansia tersebut berumur lebih dari 66 tahun?

F. Peluang Kejadian Majemuk

1. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

Kejadian A dan B disebut dua kejadian saling lepas bila irisan dari dua kejadian itu sama dengan himpunan kosong. Misalnya pada percobaan melambungkan sebuah dadu, A adalah kejadian keluarnya mata dadu ganjil, B adalah kejadian keluarnya mata dadu genap, maka A dan B merupakan kejadian-kejadian yang saling lepas.



Gambar 2.5 *Kejadian saling lepas*

Bila A dan B merupakan dua kejadian yang saling lepas maka $(A \cap B) = \{\ \}$ sehingga $P(A \cap B) = 0$.

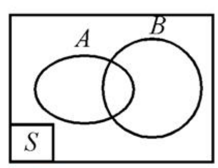
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Jadi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. Peluang Gabungan Dua Kejadian

Kejadian A dan B bersama-sama dilambangkan "$A \cap B$". Adapun gabungan antara kejadian A atau B dilambangkan sebagai $A \cup B$ seperti ditunjukkan pada Gambar 2.6. Kejadian $A \cup B$ sesungguhnya terbagi dari tiga kejadian, yaitu A terjadi tetapi B tidak, B terjadi tetapi A tidak, serta A dan B terjadi bersama-sama.

Perhatikan Gambar 2.6.



Gambar 2.6 *A dan B saling beririsan*

Sesuai dengan kaitan peluang maka diperoleh:

$P(A \cup B) = P(A \text{ terjadi tetapi } B \text{ tidak}) + P(B \text{ terjadi tetapi } A \text{ tidak})$
$+ P(A \cap B)$ .... (1)

Dapat dijabarkan juga bahwa:

$P(A) = P(A \text{ terjadi tetapi } B \text{ tidak}) + P(A \cap B)$ ...... (2)

dan

$P(B) = P(B \text{ terjadi tetapi } A \text{ tidak}) + P(A \cap B)$ ...... (3)

Dari persamaan (2) dan (3) disubstitusi ke persamaan (1) maka diperoleh:

$P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) + P(A \cap B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Jadi, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Contoh 2.15

Tentukan peluang dari kartu yang terambil berikut ini, pada pengambilan sebuah kartu dari kartu bridge.

a. Sebuah *As* atau sebuah *Heart*.
b. Sebuah *King* atau sebuah *Queen*.

Jawab:

a. $P(As \text{ atau } Heart) = P(A \cup H) = P(A) + P(H) - P(A \cap H)$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

b. *King* dengan *Queen* saling lepas maka:

$P(King \text{ atau } Queen) = P(K \cup Q) = P(K) + P(Q)$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52}$$

$$= \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

3. Peluang Dua Kejadian yang Saling Bebas

Sebuah kotak di dalamnya terdapat 3 bola hijau dan 4 bola biru. Kita mengambil sebuah bola secara acak dari dalam kotak itu. Misalkan yang terambil bola hijau, disebut kejadian H. Bola hijau yang diambil pada kejadian H tadi dikembalikan, lalu mengambil lagi sebuah bola dari kotak, misalnya terambil bola biru yang disebut kejadian B. Jelas bahwa terambilnya bola hijau pada pengambilan pertama tidak mempengaruhi pengambilan bola biru pada pengambilan kedua. Dengan demikian kejadian H dan B disebut dua kejadian yang saling bebas.

Bila K_1 dan K_2 merupakan dua kejadian saling bebas maka peluang kejadian K_1 dan K_2 adalah:

$$P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \times P(K_2)$$

Perluasannya:

Bila $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$ merupakan kejadian-kejadian bebas maka: $P(K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \ldots \cap K_n) = P(K_1) \times P(K_2) \times P(K_3) \times \ldots \times P(K_n)$.

Jadi, untuk contoh di atas peluang terambilnya bola hijau dan biru secara berturut-turut adalah:

$$\begin{aligned} P(H \cap B) &= P(H) \times P(B) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{12}{49} \end{aligned}$$

Bila pada pengambilan pertama bola hijau tidak dikembalikan lagi, maka pengambilan kedua dipengaruhi oleh hasil pengambilan pertama. Peluang keduanya bola pertama hijau dan kedua biru adalah:

$$\begin{aligned} P(H \cap B) &= P(H) \times P(B) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Jadi, jika K_1 dan K_2 dua peristiwa yang bergantung maka:

$$P(K_1 \cap K_2) = P(K_1) \times P(K_2|K_1)$$

$P(K_2|K_1)$ dibaca peluang terjadinya K_2 setelah K_1 terjadi.

4. Menggunakan Aturan Penjumlahan dan Perkalian dalam Peluang Kejadian Majemuk

Contoh 2.16

1. Sebuah kantung di dalamnya terdapat 6 buah kelereng yang terdiri atas 1 merah, 2 putih, dan 3 biru. Jika diambil sebuah kelereng, tentukan:

a. peluang kejadian muncul merah dan putih,
b. peluang kejadian muncul merah atau putih,
c. peluang kejadian muncul merah atau putih atau biru,
d. peluang muncul tidak putih, dan
e. peluang muncul tidak (merah atau biru).

Jawab:

A adalah kejadian muncul merah $\Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{6}$

B adalah kejadian muncul putih $\Leftrightarrow P(B) = \frac{2}{6}$

C adalah kejadian muncul biru $\Leftrightarrow P(C) = \frac{3}{6}$

a. $P(A \cap B) = 0$ (saling lepas)

b. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

c. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{6}{6} = 1$

d. $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$

$= 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

e. $P(\overline{A \cup C}) = 1 - P(A \cup C) = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. Sebuah kotak memuat 9 kartu sama yang diberi nomor 2 sampai 10. Diambil sebuah kartu, tentukan:
   a. peluang terambilnya bernomor genap atau prima, dan
   b. peluang terambilnya bernomor ganjil atau prima.

Jawab:

a. $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \Leftrightarrow n(S) = 9$
$A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Leftrightarrow n(A) = 5$
$B = \{2, 3, 5, 7\} \Leftrightarrow n(B) = 4$
$A \cap B = \{2\} \Leftrightarrow n(A \cap B) = 1$, sehingga:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$= \frac{5}{9} + \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

b. $S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Leftrightarrow n(S) = 9$
$A = \{3, 5, 7, 9\} \Leftrightarrow n(A) = 4$

$B = \{2, 3, 5, 7\} \Leftrightarrow n(B) = 4$
$A \cap B = \{3, 5, 7\} \Leftrightarrow n(A \cap B) = 3$
Sehingga:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{4}{9} + \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5}{9}$$

3. Pada pelemparan sebuah dadu didefinisikan: A adalah kejadian munculnya mata genap, B adalah kejadian munculnya mata prima, dan C adalah kejadian munculnya mata ganjil.
   Tentukan peluang munculnya:
   a. mata genap atau prima,
   b. mata prima atau ganjil, dan
   c. mata genap atau ganjil.

   Jawab:
   $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Leftrightarrow n(S) = 6$
   $A = \{2, 4, 6\} \Leftrightarrow n(A) = 3$
   $B = \{2, 3, 5\} \Leftrightarrow n(B) = 3$
   $C = \{1, 3, 5\} \Leftrightarrow n(C) = 3$
   A tidak saling lepas dengan B sebab $A \cap B \neq \emptyset$ yaitu $\{2\}$, $n(A \cap B) = 1$
   B tidak saling lepas dengan C sebab $B \cap C \neq \emptyset$ yaitu $\{3, 5\}$, $n(B \cap C) = 2$
   A saling asing dengan C sebab $A \cap C = \emptyset$, $n(A \cap C) = 0$

   a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   $$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$
   Sehingga P(genap atau prima) = $\frac{5}{6}$.

   b. $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$
   $$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
   Sehingga P(prima atau ganjil) = $\frac{2}{3}$.

c. $P(A \cup C) = P(A) + P(C)$

$$= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} = 1$$

Sehingga P(genap atau ganjil) = 1

4. Sebuah kotak di dalamnya terdapat 10 bola yang 6 di antaranya merah dan lainnya biru. Diambil sebuah bola kemudian bola itu dikembalikan lagi ke dalam kotak. Setelah itu mengambil sebuah bola lagi. Berapa peluang dalam kedua pengambilan tersebut keduanya berwarna biru?

Jawab:

A adalah kejadian terambilnya bola berwarna biru Û $P(A)$

$= \frac{4}{10}$

B adalah kejadian terambilnya bola berwarna biru Û $P(B)$

$= \frac{4}{10}$

A dan B kejadian saling bebas, sehingga:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{4}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{16}{100} = 0{,}16$$

Jadi, peluangnya mendapat bola biru semua adalah 0,16.

Latihan 2.13

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Dua dadu dilambungkan bersama-sama. Tentukan peluangnya bila:
   a. jumlah mata dadu lebih kecil dari 11, dan
   b. hasil kali mata dadu yang tampak 6 atau 10.
2. Lima buah mata uang logam dilambungkan bersama-sama. Tentukan peluangnya bila:
   a. paling sedikit dua gambar, dan
   b. dua gambar atau dua angka.
3. Sebuah kotak di dalamnya berisi bola 6 merah, 4 putih, dan 5 biru. Selanjutnya bola diambil satu per satu. Tentukan besarnya peluang agar ketiga bola yang diambil itu berturut-turut berwarna merah, putih, dan biru,

a. jika setiap pengambilan satu bola dikembalikan lagi, dan
b. jika setiap pengambilan satu bola tidak dikembalikan.

4. Dua kartu diambil dari satu set kartu bridge satu per satu. Tentukan peluang 2 kartu yang terambil semuanya *As* apabila:
   a. pengambilan dengan pengembalian, dan
   b. pengambilan tanpa pengembalian.
5. Sebuah dadu dilambungkan sebanyak dua kali. Berapa peluang untuk mendapatkan titik-titik 4, 5, dan 6 dalam lemparan pertama dan titik-titik 1, 2, 3, atau 4 dalam lemparan kedua?
6. Sebuah kotak berisi 4 bola putih dan 2 bola hitam, sedangkan kotak yang lain berisi 3 bola putih dan 5 bola hitam. Bila bola diambil dari setiap kotak, tentukan peluang:
   a. keduanya putih,
   b. keduanya hitam, dan
   c. satu putih dan satu hitam.
7. Pecatur A dan B bertarung dalam 12 ronde dengan A menang 6 ronde, B menang 4 ronde, sedangkan dua ronde *draw*. Panitia akan memainkan lagi sebanyak 3 ronde. Berdasarkan permainan sebelumnya, tentukan peluang:
   a. A memenangkan ketiga ronde itu,
   b. A memenangkan dua ronde dan ketiga *draw*,
   c. A dan B memenangkan ronde-ronde itu secara bergantian, dan
   d. B memenangkan paling sedikit satu ronde dari ketiga ronde itu.
8. Seorang calon pegawai harus melewati tiga tahap seleksi untuk bisa diterima sebagai karyawan perusahaan. Peluang ia gagal pada seleksi itu berturut-turut adalah $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, dan $\frac{2}{7}$.
   a. Berapa peluang ia lulus pada seleksi pertama dan kedua tetapi gagal pada seleksi terakhir.
   b. Berapa peluang ia lulus pada ketiga seleksi tersebut.
9. Suatu perusahaan akan memilih 3 orang sebagai kepala bagian pada perusahaannya. Dari seleksi penyisihan terdapat 7 orang menguasai manajemen, 5 orang menguasai bahasa Inggris, dan 3 orang menguasai akuntansi. Tentukan peluang 3 orang yang terpilih tersebut apabila:
   a. paling sedikit dua orang menguasai manajemen, dan
   b. satu menguasai manajemen, satu bahasa Inggris, dan satu akuntansi.

10. Misalkan peluang seorang pria dapat hidup sampai 60 tahun adalah 0,8, dan peluang seorang wanita dapat hidup sampai 60 tahun adalah 0,85. Berapakah peluang kedua orang tersebut dapat hidup sampai 60 tahun?
11. Kotak I terdapat 3 bola merah dan 4 bola putih, dalam kotak II terdapat 2 bola merah dan 7 bola hitam. Setiap kotak diambil satu bola secara acak. Tentukan peluang terambilnya bola putih dari kotak I dan bola hitam dari kotak II.
12. Suatu kotak berisi 5 kelereng merah dan 3 kelereng putih. Dua kelereng diambil satu persatu di mana kelereng pertama yang diambil dikembalikan lagi dalam kotak. Tentukan peluang terambilnya kelereng pertama dan kedua berwarna merah.
13. Sebuah kotak berisi 4 bola merah, 5 bola putih, dan 6 bola kuning. Jika diambil 3 bola sekaligus, tentukan peluang ketiga bola yang diambil:
    a. berwarna putih semua, dan
    b. berlainan warna.
14. Pada suatu permainan diambil kartu dari setumpuk kartu bridge terdiri atas 52 kartu. Jika A merupakan kejadian pengambilan kartu *As* dan B kejadian pengambilan kartu *Klaper*. Tentukan:
    a. $A \cap B$
    b. $A \cup B$
15. Dari 50 peserta tes suatu perusahaan 15 di antaranya putri akan dipilih 4 orang. Berapa peluang untuk diterima jika yang dipilih 3 putra dan 1 putri?

Rangkuman

1. $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$
   $= n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$
2. $0! = 1$
3. ${}_nP_n = P_n = n!$
4. ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

5. Permutasi n elemen yang terdapat p elemen yang sama dan q elemen lain lagi yang sama adalah:

   $x = \frac{n!}{p!\,q!}$

6. ${}_nK_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
7. Jika K = ruang kejadian dan S = ruang sampel dari suatu percobaan maka:

   $n(K) = 2^{n(S)}$

8. Peluang kejadian = $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$
9. Jika kejadian A muncul nA kali dari eksperimen yang dilakukan n kali maka frekuensi nisbi kejadian $A = f(A) = \frac{n(A)}{n}$
10. $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
11. Frekuensi harapan terjadinya kejadian A:

    $F(A) = n \times P(A)$

12. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
13. Jika dalam kejadian A dan B lepas maka:

    $P(A \cap B) = 0$

    $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

14. Jika K_1 dan K_2 dua kejadian bebas maka:

    $P(K_1 \cap K_2) = P(K_1)\, P(K_2)$

15. Jika K_2 terjadi sesudah K_1 maka:

    $P(K_1 \cap K_2) = P(K_1)\, P(K_2|K_1)$

Tugas Perorangan

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Buatlah soal-soal seperti latihan 3 dengan kata-kata dan kalimat yang kalian buat sendiri dan selesaikanlah.
2. Buatlah soal dan penyelesaian tentang permutasi melingkar dengan mengamati lingkungan di sekitar kalian.

3. Buatlah soal dan penyelesaian tentang peluang kejadian yang saling lepas maupun saling bebas stokastik yang bisa diamati di sekitar kalian.

Tugas Kelompok

Cobalah selidiki di daerah kalian peluang seseorang dapat menjadi kepala desa dari suatu daerah pemilihan.

Refleksi

Setelah mempelajari bab ini, sebutkan beberapa contoh nyata dalam kehidupan sehari-hari yang menggunakan teori peluang.

Sebaiknya Anda Coba

Tentukan rumus untuk $(1 \times 1!) + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \ldots + (n \times n!)$

Petunjuk

1. $1 \times 1! = [\,(1 + 1!) \times 1!\,] - (1 \times 1!) = (2 \times 1!) - (1 \times 1!) = 2! - 1!$
   $2 \times 2! = [\,(2 + 1!) \times 2!\,] - (1 \times 2!) = (3 \times 2!) - (1 \times 2!) = 3! - 2!$
   $3 \times 3! = [\,(3 + 1!) \times 3!\,] - (1 \times 3!) = (4 \times 3!) - (1 \times 3!) = 4! - 3!$
   $4 \times 4! = K$
   $5 \times 5! = K$
2. Lanjutkan proses bagian (*a*) dan jumlahkan maka akan diperoleh rumus yang diinginkan.

Catatan:

Soal di atas bisa ditulis dalam notasi sigma $\sum_{k=1}^{n}(k \times k!)$ dapat diubah menjadi $\sum_{k=1}^{n}(\ldots.)$

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Suatu kubus berangka biru dan hitam dilemparkan bersama-sama satu kali. Peluang munculnya kubus berangka berjumlah 4 atau berjumlah 9 adalah . . . .

   a. $\frac{12}{36}$
   b. $\frac{9}{36}$
   c. $\frac{7}{36}$
   d. $\frac{5}{36}$
   e. $\frac{4}{36}$

2. Dari 6 orang calon pengurus suatu organisasi akan dipilih menjadi ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara yang masing-masing satu orang. Banyaknya susunan pengurus yang dapat terbentuk adalah . . . .

   a. 15
   b. 24
   c. 30
   d. 180
   e. 360

3. Dalam suatu kegiatan pramuka, regu *A* harus menambah 3 anggota lagi yang dapat dipilih dari 7 orang. Banyaknya cara memilih yang dapat dilakukan oleh regu *A* adalah . . . .

   a. 70
   b. 54
   c. 35
   d. 32
   e. 28

4. Sebuah panitia yang beranggota 4 orang akan dipilih dari kumpulan 4 pria dan 7 wanita. Bila dalam panitia tersebut diharuskan ada paling sedikit 2 wanita maka banyaknya cara memilih ada . . . .

   a. 1008
   b. 672
   c. 330
   d. 301
   e. 27

5. Jika C_r^n menyatakan banyaknya kombinasi, *r* adalah elemen dari *n* elemen dan $C_3^n = 2n$, maka C_7^{2n} adalah . . . .

   a. 160
   b. 120
   c. 116
   d. 90
   e. 80

6. Banyaknya segitiga yang dapat dibuat dari 7 titik tanpa ada tiga titik yang terletak segaris adalah . . . .
   a. 30
   b. 35
   c. 42
   d. 70
   e. 210
7. Seorang murid diminta mengerjakan 9 dari 10 soal ulangan, tetapi nomor 1 sampai dengan nomor 5 harus dikerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil murid adalah . . . .
   a. 4
   b. 5
   c. 6
   d. 9
   e. 10
8. Seorang penembak mempunyai kemampuan membidik dengan tepat sebesar 90%. Jika hasil bidikan yang diulang adalah bebas dan kemampuan tetap, maka peluang menembak 3 kali dengan hasil untuk pertama kali meleset dan dua kali berikutnya tepat adalah . . . .
   a. 0,81
   b. 0,18
   c. 0,09
   d. 0,081
   e. 0,027
9. Dari empat buah angka, 2, 3, 4, dan 5 dibentuk bilangan-bilangan yang masing-masing nilainya lebih dari 3.000.
   Banyaknya bilangan tersebut adalah . . . .
   a. 20
   b. 18
   c. 15
   d. 12
   e. 10
10. Ali, Anto, Candra, dan Dadang akan bekerja secara bergilir. Banyaknya urutan bekerja yang dapat disusun dengan Ali selalu pada giliran terakhir adalah . . . .
    a. 3
    b. 6
    c. 12
    d. 18
    e. 24
11. Sepasang pengantin baru mengikuti program Keluarga Berencana. Mereka berharap memiliki 2 anak, yang pertama laki-laki dan yang kedua perempuan. Peluang harapan mereka untuk terpenuhi adalah . . . .
    a. $\frac{1}{16}$
    b. $\frac{1}{8}$
    c. $\frac{1}{4}$
    d. $\frac{1}{2}$
    e. 1

12. Dalam sebuah kotak berisi 7 kelereng merah dan 5 kelereng putih. Dari kotak itu diambil 3 kelereng sekaligus secara acak. Peluang terambil sekurang-kurangnya 1 kelereng putih adalah . . . .

a. $\frac{7}{44}$
b. $\frac{10}{44}$
c. $\frac{34}{44}$
d. $\frac{35}{44}$
e. $\frac{37}{44}$

13. Dari sebuah kotak berisi 6 kelereng berwarna merah dan 4 kelereng berwarna putih, diambil 3 kelereng secara acak. Peluang diambil kelereng tersebut ketiganya berwarna merah adalah . . . .

a. $\frac{2}{3}$
b. $\frac{3}{5}$
c. $\frac{1}{6}$
d. $\frac{2}{21}$
e. $\frac{1}{12}$

14. Dari 7 orang pria dan 5 orang wanita akan dipilih 4 orang yang terdiri atas tiga orang pria dan seorang wanita.
Peluang terpilihnya 4 orang tersebut adalah . . . .

a. $\frac{6}{198}$
b. $\frac{8}{99}$
c. $\frac{35}{396}$
d. $\frac{35}{99}$
e. $\frac{37}{9}$

15. Banyaknya cara 5 orang untuk menempati 2 buah kursi yang bersedia adalah . . . .

a. 5
b. 6
c. 10
d. 20
e. 120

16. Dalam suatu ruangan terdapat 30 orang. Setiap orang saling bersalaman. Banyaknya salaman yang dilakukan seluruhnya adalah . . . .

a. 435
b. 455
c. 870
d. 875
e. 885

17. Dari 10 orang anggota suatu himpunan dipilih 4 orang. Banyak cara pemilihan adalah . . . .

a. 63 d. 210
b. 64 e. 315
c. 84

18. Dari 7 orang pengurus sebuah organisasi akan dipilih seorang ketua, wakil ketua, sekretaris, dan bendahara. Banyak cara pemilihan tersebut adalah . . . .

a. 210 d. 420
b. 250 e. 840
c. 252

19. Sebuah kantong berisi 10 kelereng biru, 8 kelereng kuning, dan 2 kelereng merah. Sebuah kelereng diambil secara acak dari kantong. Peluang terambil kelereng biru atau kuning adalah . . . .

a. $\frac{18}{20}$ d. $\frac{12}{20}$
b. $\frac{16}{20}$ e. $\frac{7}{20}$
c. $\frac{14}{20}$

20 . Di sebuah toko buku seorang membeli 10 buku yang terdiri atas 2 buku tentang politik, 3 buku tentang agama, dan 5 buku novel. Di toko itu 5 buku tentang politik, 7 buku tentang agama, dan 8 buku novel. Banyak cara untuk memilih buku adalah . . . .

a. 280 cara d. 8.400 cara
b. 1.411 cara e. 19.600 cara
c. 6.950 cara

Latihan Semester 1

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Sekelompok data rataannya 11. Jika ditambah data baru yang besarnya 39 rata-ratanya menjadi 13, banyak data asal adalah . . . .
   a. 9 d. 6
   b. 8 e. 5
   c. 7

2. Kuartil atas dari data berikut adalah . . . .

Nilai	F Kumulatif
60 - 64	5
65 - 69	11
70 - 74	21
75 - 79	30
80 - 84	36
85 - 89	40

   a. 79, 5 d. 74
   b. 79 e. 68,7
   c. 74,5

3. Jangkauan semi interkuartil data berikut 10, 10, 4, 4, 3, 6, 7, 7, 3, 8, 4, 6, 5, 9 adalah . . . .
   a. 1 d. 4
   b. 2 5. 7
   c. $\frac{1}{2}$

4. Ragam dari suatu sampel 3, 5, 7, 5, 6, 4 adalah . . . .
   a. 1 d. 1,76
   b. 1,50 e. 2
   c. 1,67

5. Nilai rata-rata tes matematika dari suatu kelas berturut-turut adalah 5 dan 7, jika rata-rata di kelas tersebut adalah 6,2 maka perbandingan banyaknya siswa dan siswi adalah . . . .

a. 3 : 4
b. 2 : 5
e. 2 : 3
d. 3 : 5
e. 4 : 5

6. Nilai ujian dari 60 siswa diberikan dalam tabel berikut.

Nilai	3	4	5	6	7	8	9
f	3	5	10	16	13	8	5

Siswa dinyatakan lulus bila nilai ujiannya paling rendah kurang 0,25 dari nilai rata-ratanya.

Banyak siswa yang lulus adalah . . . .

a. 13
b. 18
c. 26
d. 42
e. 52

7. Nilai ulangan 10 orang siswa adalah 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10. Simpangan rata-rata atau SR data tersebut adalah . . . .

a. 1,15
b. 1,25
c. 1,30
d. 1,40
e. 1,69

8. Simpangan baku dari data 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 10 adalah . . . .

a. $\frac{1}{3}\sqrt{26}$
b. $\frac{1}{3}\sqrt{23}$
c. $\frac{1}{3}\sqrt{30}$
d. $\frac{1}{3}\sqrt{35}$
e. $\frac{1}{3}\sqrt{37}$

9. Rataan hitung dan koefisien keragaman suatu sampel berturut-turut adalah 64 dan 22,5%. Simpangan bakunya adalah . . . .

a. 12,4
b. 14,4
c. 15,4
d. 16,4
e. 17,4

10. Dari data di bawah ini maka nilai modul adalah . . . .

Nilai	F
50 - 54	4
55 - 59	8
60 - 64	14
65 - 69	35
70 - 74	27
75 - 79	9
80 - 84	3

a. 60,5
b. 67,2
c. 68,1
d. 70,25
e. 72,25

11. Empat kelompok siswa masing-masing terdiri dari 5, 10, 10, dan 10 orang menyumbang ke suatu yayasan penderita cacat sebesar Rp2.000,00, Rp5.000,00, Rp3.000,00, Rp1.500,00. Tiap-tiap siswa rata-rata menyumbang uang sebesar . . . .

a. Rp2.000,-
b. Rp2.500,-
c. Rp2.800,-
d. Rp3.000,-
e. Rp3.500,-

12. Diketahui kumpulan data 2,9; 3,5; 5,1; 5,7; 3,4; 3,7 Desil kedelapan (D8) dari kumpulan data tersebut adalah . . . .

a. 5,14
b. 5,04
c. 5,24
d. 5,33
e. 5,34

13. Median data pada daftar di bawah ini adalah . . . .

Bobot	F
50 - 59	3
60 - 69	8
70 - 79	15
80 - 89	12
90 - 99	8
100 - 109	4

a. 69,5
b. 87,38
c. 87,83
d. 78,38
e. 78,83

15. Deviasi rata-rata dari data 4, 5, 7, 8, 2, 4 adalah . . . .
   a. 1,25
   b. 1,33
   c. 1,42
   d. 1,55
   e. 1,67

20. Jika ${}_{n-3}C_2$ maka nilai $(2n-7)$ adalah . . . .
   a. 9
   b. 10
   c. 13
   d. 15
   e. 17

21. Notasi faktorial dari $\frac{(n-3)(n+2)}{2.1}$ adalah . . . .
   a. $\frac{(n-3)!}{2!(n+1)!}$
   b. $\frac{(n+2)!}{2!(n+1)!}$
   c. $\frac{(n+3)(n+2)!}{2!}$
   d. $\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!}$
   e. $\frac{(n+2)(n+3)!}{2!(n+1)!}$

22. Nilai $\left(\frac{1}{2}n-1\right)$ jika diketahui $4({}_nP_4) = 30({}_nC_5)$ adalah . . . .
   a. 20
   b. 19
   c. 16
   d. 11
   e. 9

23. Pada pelemparan sebuah dadu sebanyak 108 kali, frekuensi harapan muncul mata dadu berjumlah prima adalah . . . .
   a. 45
   b. 51
   c. 54
   d. 57
   e. 58

24. Dalam sebuag kotak terdapat 4 bola merah, 3 bola putih dan 3 bola biru, jika peluang terambil 3 bola merah adalah . . . .
   a. $\frac{1}{30}$
   b. $\frac{1}{28}$
   c. $\frac{3}{10}$
   d. $\frac{4}{10}$
   e. $\frac{6}{10}$

25. Dari 5 pria dan 3 perempuan akan dipilih 3 orang. Peluang terpilih 2 pria 1 perempuan adalah . . . .

a. $\frac{4}{56}$

b. $\frac{15}{56}$

c. $\frac{20}{56}$

d. $\frac{21}{56}$

e. $\frac{30}{56}$

26. Peluang seorang ayah masih hidup 20 tahun lagi adalah 0,8 dan peluang seorang ibu masih hidup 20 tahun lagi adalah 0,7. Peluang salah seorang meninggal 20 tahun lagi adalah . . . .

a. 0,26

b. 0,38

c. 0,44

d. 0,56

e. 0,94

27. Pada pelemparan dua buah dadu, peluang muncul mata dadu berjumlah 5 atau 10 adalah . . . .

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{7}{36}$

c. $\frac{1}{6}$

d. $\frac{3}{5}$

e. $\frac{4}{5}$

28. A dan B adalah kejadian yang saling bebas stokastik tetapi tidak lepas. Jika $P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ maka P(B) adalah . . . .

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{2}{4}$

c. $\frac{3}{4}$

d. $\frac{3}{5}$

e. $\frac{4}{5}$

29. Dari suatu set kartu bridge diambil satu kartu secara acak. Peluang terambil kartu King atau kartu Hitam adalah . . . .

a. $\frac{24}{52}$

b. $\frac{25}{52}$

c. $\frac{28}{52}$

d. $\frac{30}{52}$

e. $\frac{34}{52}$

30. Sebuah kantong berisi 7 kelereng putih, 3 kelereng hijau dan 9 kelereng merah. Jika 3 kelereng diambil secara acak, maka peluang bahwa paling sedikit satu kelereng putih adalah . . . .

a. $\frac{220}{696}$

b. $\frac{220}{969}$

c. $\frac{749}{969}$

d. $\frac{794}{969}$

e. $\frac{874}{996}$

B. Jawablah pertanyaan-pertanyaan di bawah ini dengan jelas.

1. Diketahui binom $\left(\frac{x}{3}-2\right)^6$. Tentukan:

   a. Suku yang variabelnya x^3.

   b. Jika koefisien x^3 sama dengan $-\frac{320}{27}A$, cari nilai A.

2. Dari satu set kartu bridge, A kejadian yang terambil kartu bernomor 2 sampai 10, sedang B kejadian yang terambil kartu bernomor merah, selidiki apakah kedua kejadian tersebut saling bebas?

Untuk nomor 3, 4, 5

Berat badan 40 siswa SMA 7 Kelas XI IPS adalah sebagai berikut.

Berat Badan (kg)	Frekuensi
43 - 47	5
48 - 52	16
53 - 57	9
58 - 62	6
63 - 67	4

3. Tentukan rataan hitung.
4. Tentukan simpangan rata-rata.
5. Tentukan simpangan bakunya.

Bab 3

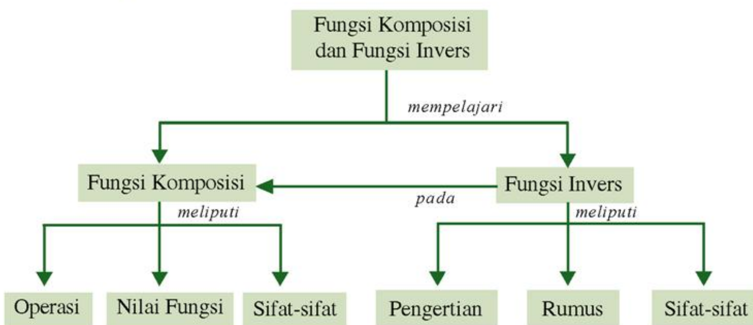
Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Pernahkah kalian menggunakan program Matlab dalam penggambaran grafik? Setiap memasukkan data yang berbeda, maka grafik yang dihasilkan juga berbeda. Program ini menggunakan fungsi tertentu. Dapatkah kalian menentukan fungsi grafik itu jika yang diketahui grafiknya?

Pada pembelajaran ini kalian akan mempelajari fungsi komposisi dan fungsi invers.

Setelah pembelajaran ini diharapkan kalian dapat: menentukan komposisi fungsi dari dua fungsi, serta menentukan invers suatu fungsi.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Fungsi Komposisi
2. Fungsi Invers
3. Invers Fungsi

Pada kelas X kalian sudah mengenal tentang fungsi. Berikut ini kalian akan pelajari tentang fungsi komposisi dan fungsi invers

A. Aljabar Fungsi

1. Jumlah dan Selisih Dua Fungsi

Apabila f dan g masing-masing adalah fungsi dengan domain berturut-turut D_f dan D_g, serta peta-peta f dan g ada pada kedua domain tersebut, maka:

a. Jumlah fungsi f dan g, ditulis dengan simbol $f + g$ adalah suatu fungsi: $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x)$.

b. Selisih f dan g, ditulis dengan simbol $f - g$ adalah suatu fungsi: $f - g : x \rightarrow f(x) - g(x)$.

Domain dari $f + g$ dan $f - g$ adalah irisan dari D_f dan D_g yang dinotasikan dengan $(D_f \cap D_g)$.

Contoh 3.1

Diketahui f dan g masing-masing fungsi $\boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 2x + 3$.

Tentukan berikut ini.

a. $f + g$

b. $f - g$

c. Prapeta dari 12 (elemen di domain yang petanya 12) untuk fungsi $f - g$.

Jawab:

a. $f + g : x \rightarrow f(x) + g(x) = x^2 + (2x + 3)$

$= x^2 + 2x + 3$

Jadi, $(f + g)(x) = x^2 + 2x + 3$.

b. $f - g : x \rightarrow f(x) - g(x) = x^2 - (2x + 3)$

$= x^2 - 2x - 3$

Jadi, $(f - g)(x) = x^2 - 2x - 3$.

c. Prapeta dari 12 untuk fungsi $f - g$ adalah:

$$(f - g)(x) = 12$$
$$x^2 - 2x - 3 = 12$$
$$\Leftrightarrow\ x^2 - 2x - 15 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 3)(x - 5) = 0$$
$$\Leftrightarrow\ x = -3 \text{ atau } x = 5$$

Jadi, prapeta dari 12 untuk fungsi $f - g$ adalah $x = -3$ atau $x = 5$.

2. Perkalian Dua Fungsi

Diketahui f dan g masing-masing adalah fungsi yang mempunyai domain D_f dan D_g dengan peta-peta f dan g ada pada kedua domain tersebut, maka:

Hasil kali f dan g yang ditulis dengan $f \times g$ didefinisikan sebagai $f \times g : x \to f \times g$.
Domain dari fungsi $f \times g$ adalah $D_f \cap D_g$.

Contoh 3.2

Diketahui f dan g masing-masing fungsi yang bekerja pada himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x - 3$. Tentukan:

a. rumus fungsi $f \times g$ b. $(f \times g)(2)$

Jawab:

a. $f \times g : x \to f(x) \times g(x) = (x + 2)(x - 3) = x^2 - x - 6$
Jadi, $(f \times g)(x) = x^2 - x - 6$

b. $(f \times g)(2) = 2^2 - 2 - 6 = -4$

3. Pembagian Dua Fungsi

Misalkan f dan g masing-masing adalah fungsi yang mempunyai domain D_f dan domain D_g dengan peta-peta f dan g ada pada kedua domain tersebut, maka:

Hasil bagi f dan g yang ditulis dengan $\dfrac{f}{g}$ didefinisikan sebagai

$$\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)}$$

Domain dari $\dfrac{f}{g}$ adalah $D_f \cap D_g$, dengan $g(x) \neq 0$.

Contoh 3.3

1. Diketahui f dan g masing-masing fungsi yang bekerja pada himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x - 4$. Tentukanlah berikut ini.

a. Rumus fungsi $\frac{f}{g}$. s

b. Daerah asal dari fungsi $\frac{f}{g}$.

Jawab:

a. $\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+3}{x-4}$

Jadi, $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2x+3}{x-4}$

b. Daerah asal dari fungsi $\frac{f}{g}$ adalah:

$$\begin{aligned} D_f \cap D_g &= \boldsymbol{R} - \{x \mid x - 4 = 0\} \\ &= \boldsymbol{R} - \{4\} \text{ atau } \{x \mid x \in \boldsymbol{R}, x \neq 4\} \end{aligned}$$

2. Diketahui fungsi f dan g didefinisikan sebagai:

$f(x) = \{(2, 1), (3, 4), (5, 2), (6, -1)\}$
$g(x) = \{(2, 2), (3, -5), (4, 2), (5, 3)\}$

Tentukan:

a. $f \times g$ b. $\frac{f}{g}$

Jawab:

a. $f \times g \colon x \to f(x) \times g(x)$

$x = 2$ maka $f(x) \times g(x) = 1 \times 2 = 2$,
$x = 3$ maka $f(x) \times g(x) = 4 \times (-5) = -20$,
$x = 5$ maka $f(x) \times g(x) = 2 \times 3 = 6$.
Jadi, $f \times g = \{(2, 2), (3, -20), (5, 6)\}$

b. $\frac{f}{g} = \left\{\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{4}{-5}\right), \left(5, \frac{2}{3}\right)\right\}$

Latihan 3.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukanlah: $f+g, f-g, g-f, f\times g$, dan $\frac{f}{g}$ jika f dan g masing-masing adalah fungsi pada $\boldsymbol{R}$.
   a. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}; x \neq -\dfrac{1}{2}$ dan $g(x) = \dfrac{1}{x-3}; x \neq 3$
   b. $f(x) = 2x$ dan $g(x) = \dfrac{x-3}{2x-1}; x \neq -\dfrac{1}{2}$
   c. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}; x \neq 3$ dan $g(x) = x - 2$
2. Diketahui fungsi f dan g terdefinisi pada $\boldsymbol{R}$ serta didefinisikan sebagai $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = x + 3$, Tentukan berikut ini.
   a. Rumus fungsi $f+g, f-g, f\times g$, dan $\frac{f}{g}$.
   b. Daerah hasil dari $f\times g$.
   c. Daerah asal dari $\frac{f}{g}$.
3. Fungsi pada bilangan real $\boldsymbol{R}$ didefinisikan sebagai $f(x) = \sin x$ dan $g(x) = \cos x$.
   a. Tentukan rumus $f+g, f-g, f\times g$, dan $\frac{f}{g}$.
   b. Tentukan daerah asal dari $\frac{f}{g}$.
   c. Tentukan peta dari $(f+g)\left(\dfrac{\pi}{4}\right); (f-g)\left(\dfrac{\pi}{2}\right); (f\times g)\left(\dfrac{1}{4}\pi\right)$; dan $\left(\dfrac{f}{g}\right)\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.
4. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ dan $g(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$. Tentukan daerah asal (domain) dari $\frac{f}{g}$ dan $\frac{g}{f}$.
5. Fungsi $f(x)$, $g(x)$, dan $h(x)$ didefinisikan sebagai berikut.
   $f(x) = \{(3, 2), (4, 3), (5, 5), (6, 4)\}$
   $g(x) = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 2)\}$
   $h(x) = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (6, 3)\}$

Tentukan:

a. $f + g, f + h$, dan $g + h$.

b. $f - g, f - h$, dan $g - h$.

c. $g - f, h - f$, dan $h - g$

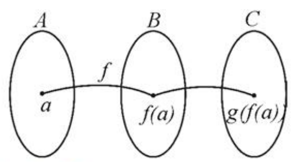
d. $f \times g, f \times h$, dan $g \times h$.

e. $\frac{f}{g}, \frac{f}{h}$, dan $\frac{g}{h}$.

f. $\frac{g}{f}, \frac{f}{g}, \frac{h}{g}$.

B. Komposisi Fungsi

Misalkan f adalah fungsi dari A ke B dan g adalah fungsi dari B ke C, seperti Gambar 3.1.

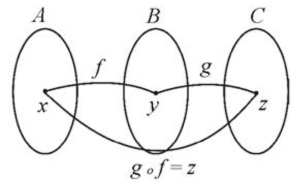


Gambar 3.1 *Fungsi f diteruskan fungsi g*

Gambar 3.1 menunjukkan bahwa $a \in A$ dipetakan ke $f(a) \in B$ yang merupakan domain dari g, maka kita dapat menentukan peta dari $f(a)$ pada fungsi g, yaitu $g(f(a))$.

Dengan demikian, kita bisa mendapatkan suatu aturan yang mengawankan setiap elemen $a \in A$ dengan tunggal satu elemen $g(f(a)) \in C$. Dengan kata lain, bisa diperoleh suatu fungsi dari A ke C. Fungsi baru ini disebut fungsi komposisi dari f dan g, dan ditulis dengan notasi $(g \circ f)$ dibaca "g bundaran f". Jadi, apabila $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ maka fungsi komposisi $(g \circ f)$: $A \to C$ dapat didefinisikan dengan $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Jika fungsi $f : A \to B$ dengan $g : B \to C$ (perhatikan Gambar 3.2), maka fungsi komposisi $g \circ f$ adalah penggandaan fungsi yang mengerjakan f dahulu, kemudian g (f memetakan x ke y dan g memetakan y ke z).



Gambar 3.2 *Komposisi fungsi* $g \circ f$

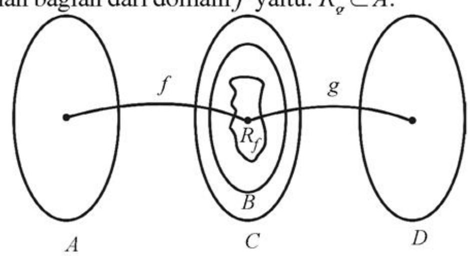
Karena $y = f(x)$ dan $z = g(y) = g(f(x))$ maka fungsi $h : A \rightarrow C$ yang ditentukan oleh rumus: $h(x) = g(f(x))$ baca "gfx" maka h adalah komposisi f dan g yang dinyatakan dengan $h = g \circ f$. Jadi, $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$, untuk semua $x \in A$.

1. Syarat agar Dua Fungsi dapat Dikomposisikan

Jika kita perhatikan definisi dari fungsi komposisi $f \circ g$ maka syarat daerah hasil dari g, yakni R_g haruslah menjadi himpunan bagian dari domain f, yaitu: R_f merupakan himpunan bagian dari ***C***.

Komposisi fungsi $g \circ f$ ini dapat diperoleh jika daerah hasil fungsi f merupakan himpunan bagian dari domain g.

Demikian juga agar diperoleh fungsi komposisi $f \circ g$ maka syaratnya daerah hasil dari g yakni R_g, haruslah menjadi himpunan bagian dari domain f yaitu: $R_g \subset A$.



Gambar 3.3 R_f *himpunan bagian dari domain g*

Contoh 3.4

Diberikan fungsi f dan g yang didefinisikan dengan rumus $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$.

a. Tentukan domain dan range dari f dan g.

b. Tentukan domain dan range dari $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$

Jawab:

Agar diperoleh $g \circ f$ maka daerah hasil fungsi f harus merupakan himpunan bagian dari domain g.

$g(x) = \sqrt{x}$ sehingga $D_g = \{x \mid x \geq 0, x \in \boldsymbol{R}\}$ dan $R_g = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$
$f(x) = x + 1$ sehingga $D_f = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$ dan $R_f = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(x + 1)\\ &= \sqrt{x+1}\end{aligned}$$

Sehingga domain dari $(g \circ f)$ adalah:
$x + 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq -1$

Jadi, $D_{(f \circ g)} = \{x \mid x \geq -1, x \in \boldsymbol{R}\}$
$R_{(f \circ g)} = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1 = 1 + \sqrt{x}$
Sehingga $D_{(f \circ g)}$ adalah $x \geq 0$.
Jadi, $D_{(f \circ g)} = \{x \mid x \geq 0, x \in \boldsymbol{R}\}$
$R_{(f \circ g)} = \{x \mid x \in \boldsymbol{R}\}$

2. Menentukan Komposisi Dua Fungsi atau Lebih

Komposisi fungsi dari dua fungsi atau lebih dapat dicari sebagai berikut.

a. Komposisi dari Dua Fungsi

Jika $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ maka $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Contoh 3.5

1. Jika fungsi f dan g adalah fungsi yang bekerja pada himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$ yang didefinisikan oleh $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 1$, carilah rumus berikut.

a. $(g \circ f)(x)$ b. $(f \circ g)(x)$

Jawab:

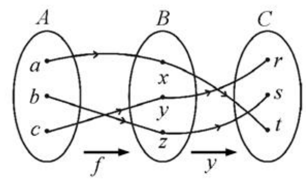
a. $$\begin{aligned}g \circ f : x \to (g \circ f)(x) &= g(f(x))\\ &= g(2x - 1)\\ &= (2x - 1)^2 + 1\\ &= 4x^2 - 4x + 2\end{aligned}$$

b. $f \circ g : x \to (f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(x^2 + 1)$
$= 2(x^2 + 1) - 1$
$= 2x^2 + 1$

2. Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ yang didefinisikan dengan diagram pada gambar berikut. Tentukan $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$, dan $(g \circ f)(c)$

Jawab:

Fungsi $(g \circ f) : A \to C$ pada gambar didefinisikan dengan:
$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(x) = t$
$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(z) = s$
$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(y) = r$



Fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh rumus $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 3x^2$.

b. Komposisi dari Tiga Buah Fungsi

Misalkan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ serta $h : C \to D$ maka:
fungsi komposisi $h \circ g \circ f : x \to (h \circ g \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x))$
$= h(g(f(x)))$

Contoh 3.6

Jika f, g, dan h fungsi pada $\boldsymbol{R}$ yang ditentukan oleh $f(x) = 3x$, $g(x) = x - 2$, dan $h(x) = x^2$, tentukan rumus berikut.

a. $(h \circ g \circ f)(x)$ b. $(f \circ g \circ h)(x)$

Jawab:

a. $h \circ g \circ f : x$ maka $(h \circ g \circ f)(x) = h(g(f(x))) = h(g(3x))$
$= h(3x - 2)$
$= (3x - 2)^2$

b. $f \circ g \circ h : x$ maka $(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x))) = f(g(x^2))$
$= f(x^2 - 2)$
$= 3x^2 - 6$

Latihan 3.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, dengan $\boldsymbol{R}$ adalah himpunan bilangan real ditentukan oleh $f(x) = 2x - 1$ dan $g(x) = x^2 + 3$. Tentukan:
   a. $(f \circ g)(x)$
   b. $(g \circ f)(x)$
   c. $(f \circ f)(x)$
   d. $(g \circ g)(x)$
2. Pemetaan berikut adalah pada bilangan real $\boldsymbol{R}$.
   Carilah rumus untuk $(g \circ f)$ dan $(f \circ g)$ dari soal berikut.
   a. $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = x^2$
   b. $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = x^2 + 1$
   c. $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 1$
   d. $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x^2 + 2$
   e. $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x^2 - 1$
   f. $f(x) = x^2$ dan $g(x) = 2x^2 + 1$
   g. $f(x) = x^2 + 3$ dan $g(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$
   h. $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = \sin x$
   i. $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = \tan x$
   j. $f(x) = \log \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 + 1$
3. Pemetaan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, dengan $\boldsymbol{R}$ adalah himpunan bilangan real ditentukan oleh $g(x) = 3 - 2x$ dan $h(x) = x^2 + 1$.
   a. Tentukanlah $(h \circ g)(2)$.
   b. Jika $(h \circ g)(x) = 2$, tentukanlah x.
4. Pemetaan $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, dengan $\boldsymbol{R}$ adalah himpunan bilangan real ditentukan oleh $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x^2 - 1$.
   a. Tentukan rumus fungsi komposisi $g \circ f$ dan $f \circ g$.
   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$ dan $f \circ g$.
   c. Tentukan penyelesaian dari $(g \circ f)(x) = 0$ dan $(f \circ g)(x) = 3$
5. Pemetaan f, g, dan h terdefinisi pada bilangan real yang didefinisikan dengan $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$, dan $h(x) = x^2$.
   a. Tentukan rumus fungsi komposisi $(f \circ g \circ h)(x)$ dan $(h \circ g \circ f)(x)$.
   b. Carilah x sebagai peta dari $(f \circ g \circ h)(x) = 7$ dan $(h \circ g \circ f)(x) = 9$.

C. Nilai Fungsi Komposisi

Nilai fungsi komposisi dapat kita tentukan melalui masing-masing fungsi secara berantai. Namun, dapat juga diperoleh dengan menentukan fungsi komposisinya terlebih dahulu baru dicari nilai fungsinya.

Contoh 3.7

Diketahui fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, dan $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x - 1$, dan $h(x) = x^2$. Tentukan:

a. $(g \circ f)(2)$
b. $(f \circ g)(2)$
c. $(h \circ g \circ f)(2)$
d. $(f \circ g \circ h)(2)$

Jawab:

a. $(g \circ f)(2) = g(f(2))$
$= g(2 \times 2 + 3)$
$= g(7)$
$= 7 - 1 = 6$

Atau $(g \circ f)(x)$ dicari terlebih dahulu, yaitu:
$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$= g(2x + 3)$
$= (2x + 3) - 1 = 2x + 2$
Jadi, $(g \circ f)(2) = 2 \times 2 + 2 = 6$

b. $(f \circ g)(2) = f(g(2))$
$= f(2 - 1) = f(1)$
$= 2 \times 1 + 3 = 5$

Atau$(f \circ g)(x)$ dicari terlebih dahulu, yaitu:
$(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$= f(x - 1)$
$= 2(x - 1) + 3$
$= 2x + 1$
Jadi, $(f \circ g)(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

c. $(h \circ g \circ f)(2)$ dapat juga dicari secara langsung, yaitu:
$(h \circ g \circ f)(2) = h(g(f(2)))$
$= h(g(2 \times 2 + 3)) = h(g(7))$
$= h(7 - 1) = h(6)$
$= 6^2 = 36$

Atau $(h \circ g \circ f)(x)$ dicari terlebih dahulu, yaitu:

$$\begin{aligned}(h \circ g \circ f)(x) &= h(g(f(x))) \\ &= h(g(2x + 3)) \\ &= h((2x + 3) - 1) \\ &= h(2x + 2) \\ &= (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4\end{aligned}$$

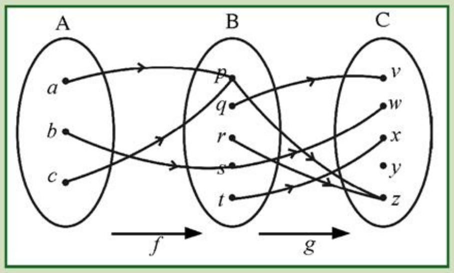
Jadi, $(h \circ g \circ f)(2) = 4 \times 2^2 + 8 \times 2 + 4 = 36$.

d. Dengan jalan yang sama dapat dicari bahwa: $(f \circ g \circ h)(2) = 9$.

Latihan 3.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Diketahui fungsi $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ yang ditentukan oleh diagram berikut.



   a. Tentukan $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$, dan $(g \circ f)(c)$.

   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$.

2. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, fungsi f dan g pada A yang ditentukan oleh:

   $f(x) = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (5, 3)\}$

   $g(x) = \{(1, 4), (2, 5), (3, 2), (4, 4), (5, 1)\}$

   a Tentukan $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(4)$, $(f \circ g)(5)$, dan $(f \circ g)(3)$.

   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$ dan $f \circ g$.

3. Fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, dan $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$, dan $h(x) = x^2$.

   a. Hitunglah $(h \circ g \circ f)(3)$ dan $(f \circ g \circ h)(3)$.

   b. Tentukan rumus fungsi komposisi $(h \circ g \circ f)(x)$ dan $(f \circ g \circ h)(x)$.

4. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = x^2 + x - 2$, tentukan $(g \circ f)(4)$.

5. Fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$; $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, dan $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x^2$, $g(x) = 3 - x$, dan $h(x) = 5x - 1$.
   Tentukan:
   a. $(f \circ g \circ h)(5)$
   b. $(g \circ f \circ h)(-1)$
   c. $(h \circ g \circ f)(10)$
6. Pemetaan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $g(x) = 3 - 2x$ dan $h(x) = x^2 + 1$.
   a. Tentukan $(h \circ g)(2)$.
   b. Jika $(h \circ g)(x) = 2$, tentukan x.
7. Pemetaan $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x^2 - 1$.
   a. Tentukan rumus fungsi komposisi $g \circ f$ dan $f \circ g$.
   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$ dan $f \circ g$.
   c. Tentukan penyelesaian dari $(g \circ f)(x) = 0$ dan $(f \circ g)(x) = 3$.
8. Pemetaan f, g, dan h terdefinisi pada bilangan real yang didefinisikan dengan $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$, dan $h(x) = x^2$.
   a. Tentukan rumus fungsi komposisi $(f \circ g \circ h)(x)$ dan $(h \circ g \circ f)(x)$.
   b. Carilah x sebagai peta dari $(f \circ g \circ h)(x) = 7$ dan $(h \circ g \circ f)(x) = 9$.

D. Menentukan Komponen Pembentuk Fungsi Komposisi

Salah satu cara untuk menentukan fungsi f jika fungsi g dan fungsi komposisinya ($g \circ f$ atau $f \circ g$) diketahui, adalah dengan menggunakan definisi fungsi komposisi, yaitu $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ dan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Contoh 3.8

1. Fungsi f dan g terdefinisi pada $\boldsymbol{R}$, dan diketahui bahwa $g(x) = x + 3$.
   Tentukan $f(x)$ jika diketahui:
   a. $(g \circ f)(x) = 3x - 5$
   b. $(f \circ g)(x) = x^2 + 6x$

   Jawab:

   a. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$
   $3x - 5 = f(x) + 3$
   Jadi, $f(x) = 3x - 8$.

b. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
$x^2 + 6x = f(x + 3)$
$f(x) = (x - 3)^2 + 6(x - 3)$
Jadi, $f(x) = x^2 - 9$.

2. Jika $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ diketahui $f(x) = 2x - 3$ dan $g : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ diketahui $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 16x + 18$, tentukan $g(x)$.

Jawab:

$(g \circ f)(x) = 4x^2 - 16x + 18$
$g(f(x)) = 4x^2 - 16x + 18$
$g(2x - 3) = 4x^2 - 16x + 18$

Jadi, $g(x) = x^2 - 2x + 3$

Latihan 3.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Jika fungsi f dan g merupakan fungsi yang bekerja pada himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$, tentukan $g(x)$ apabila:
   a. $f(x) = 2x + 3$ dan $(g \circ f)(x) = x - 4$
   b. $f(x) = 2x + 3$ dan $(g \circ f)(x) = x + 1$
   c. $f(x) = 2x$ dan $(g \circ f)(x) = 1 - \frac{1}{2x}$
   d. $f(x) = x^2 + 3$ dan $(g \circ f)(x) = x^2 - 2x + 4$
   e. $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $(g \circ f)(x) = x^3 - 1$
2. Jika fungsi f dan g terdefinisi pada $\boldsymbol{R}$, tentukanlah fungsi $g(x)$ apabila:
   a. $f(x) = x$ dan $(f \circ g)(x) = \sin x$
   b. $f(x) = x + 3$ dan $(g \circ f)(x) = a^{x + 3}$, dengan a konstanta
   c. $f(x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ dan $(f \circ g)(x) = \sec x$
3. Tentukan fungsi $f(x)$ pada $\boldsymbol{R}$, jika:
   a. $f(x + 2) = x^2 + 4x$
   b. $f(1 - 2x) = x^3 + 1$
   c. $f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x+1}{x-2}$
   d. $f\left(\frac{x}{x-2}\right) = 2x + 3$
   e. $f(2 - 3x) = 3x + 4$

4. Jika diketahui fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 6x - 1$, maka tentukan $f(x)$.
5. Jika diketahui fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $g(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 11x + 20$, maka tentukan $f(x + 1)$.

E. Sifat-sifat Komposisi Fungsi

1. Bersifat asosiatif.

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$$

2. Tidak bersifat komutatif.

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$

3. Jika I = fungsi identitas, maka

$$f \circ I = I \circ f = f$$

4. Jika $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = I$ maka f adalah invers dari g atau sebaliknya. (bukti akan dibahas di belakang)

Untuk membuktikan atau menunjukkan kebenaran, perhatikan contoh berikut.

Contoh 3.9

1. Diketahui $h : x \to 2x - 3$, $g : x \to 5 - x$, dan $f : x \to x^2$.
   Tentukan:
   a. $(h \circ g) \circ f(x)$
   b. $h \circ (g \circ f)(x)$
   c. Tunjukkan bahwa $(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$.

   Jawab:

   a.
   $$\begin{aligned}(h \circ g) \circ f(x) &= (h \circ g)(x^2)\\ &= h(g(x^2))\\ &= h(5 - x^2)\\ &= 2(5 - x^2) - 3\\ &= 7 - 2x^2\end{aligned}$$
   Jadi, $(h \circ g) \circ f(x) = 7 - 2x^2$.

b. $h \circ (g \circ f)(x) = h((g \circ f)(x))$
$= h(g(x^2))$
$= h(5 - x^2)$
$= 2(5 - x^2) - 3 = 7 - 2x^2$

Jadi, $h \circ (g \circ f)(x) = 7 - 2x^2$

c. Dari jawaban (a) dan (b) diperoleh bahwa:
$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ (g \circ f)(x)$.

2. Tentukan:
   a. $f \circ I$
   b. $I \circ f$
   c. Tunjukkan $f \circ I = I \circ f = f$
   $(I : x \to x)$

Jawab:

a. $f \circ I = f(I) = f(x) = x^2$
b. $I \circ f = I(x^2) = x^2$
c. Tampak $f \circ I = I \circ f = f$

F. Fungsi Invers

1. Pengertian Invers suatu Fungsi

Jika I adalah fungsi identitas $I : x \to x$ dan untuk suatu fungsi f terdapat fungsi g sedemikian hingga $g \circ f = f \circ g = I$ maka g disebut fungsi invers dari f, dan ditulis $g = f^{-1}$. Jadi, $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f : x \to x$.

Contoh 3.10

Diketahui f dan g fungsi pada bilangan real $\boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$. Tunjukkan bahwa jika f adalah fungsi invers dari g maka g adalah fungsi invers dari f.

Jawab:

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{2}(x-3)\right) + 3 \\
&= (x - 3) + 3 = x = I(x)
\end{aligned}
$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = \frac{1}{2}((2x + 3) - 3)$$

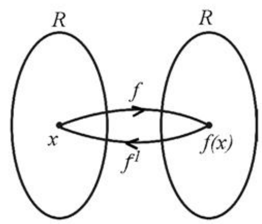
$$= \frac{1}{2}(2x) = x = I(x)$$

Terlihat bahwa $f \circ g = g \circ f = I$.
Jadi, f adalah fungsi invers dari g dan g fungsi invers dari f.

2. Menentukan Rumus Fungsi Invers

Rumus fungsi invers dapat ditentukan, yaitu jika untuk suatu fungsi f dan f^{-1} merupakan fungsi maka:
$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, seperti Gambar 3.4.

Kita dapat mencari rumus fungsi invers dari korespondensi tersebut.



Gambar 3.4 *f(x) dan f⁻¹(x)*

Contoh 3.11

1. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $\boldsymbol{R}$ adalah himpunan bilangan real didefinisikan dengan $f(x) = 3x + 7$. Tentukan rumus fungsi invers f^{-1}.

   Jawab:

   Misalkan $f(x) = y$

   $\Leftrightarrow 3x + 7 = y$

   $\Leftrightarrow 3x = y - 7$

   $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(y - 7)$

   $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{3}(y - 7)$

   Dengan demikian rumus fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x - 7)$.

2. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dengan $\boldsymbol{R}$ adalah himpunan bilangan real yang didefinisikan dengan $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$. Tentukan rumus f^{-1}.

Jawab:

Misalkan $f(x) = y$

$$\frac{x-3}{2x+1} = y,\ x \neq -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad x - 3 &= y(2x+1)\\
\Leftrightarrow \quad (x-3) &= 2xy + y\\
\Leftrightarrow \quad x - 2xy &= y + 3\\
\Leftrightarrow x(1-2y) &= y + 3\\
\Leftrightarrow \quad x &= \frac{y+3}{1-2y}\\
\Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) &= \frac{y+3}{1-2y}
\end{aligned}$$

Jadi, rumus fungsi inversnya adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{1-2x}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$.

Latihan 3.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, carilah rumus untuk invers dari fungsi f berikut ini. Kesimpulan apa yang kalian peroleh?
   a. $f(x) = x$
   b. $f(x) = 2x - 5$
   c. $f(x) = 4x + 3$
   d. $f(x) = 3x - 4$
   e. $f(x) = 3 - \dfrac{2}{5}x$
   f. $f(x) = \dfrac{1}{3}(4x - 5)$
   g. $f(x) = \dfrac{1}{2}(3 - 2x)$
   h. $f(x) = x^3$
   i. $f(x) = x^3 - 8$
   j. $f(x) = (x - 1)^3$
2. Diketahui domain $A = \{x \mid x > 0, x \in \boldsymbol{R}\}$ serta fungsi f, g, dan h pada A didefinisikan sebagai $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 3x$, dan $h(x) = x^2$.
   a. Tentukan rumus untuk f^{-1}, g^{-1}, dan h^{-1}.
   b. Hitunglah $f^{-1}(7)$, $g^{-1}(6)$, dan $h^{-1}(4)$.
3. Pemetaan $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x^3 - 4$ dan $g(x) = 2x + 3$.

Carilah:

a. $f^{-1}(4)$

b. $g^{-1}(5)$

c. $(f^{-1} \circ g^{-1})(-3)$

d. $(g^{-1} \circ f^{-1})(1)$

4. Carilah rumus f^{-1}, kemudian tentukan domain dan kodomainnya untuk f pada setiap soal berikut.

a. $f(x) = \sqrt{2x-3}$

b. $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$

c. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

d. $f(x) = -\dfrac{x}{x+3}$

e. $f(x) = \dfrac{2}{5-2x}$

f. $f(x) = x^2 + 2x$

g. $f(x) = x^2 + 6x + 5$

5. Selidiki apakah pasangan fungsi di bawah ini, yang satu merupakan invers dari fungsi yang lain?

a. $f(x) = x + 1;\ g(x) = x - 1$

b. $f(x) = x + 3;\ g(x) = x - 3$

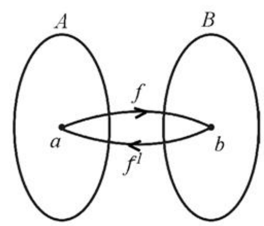
c. $f(x) = 2x;\ g(x) = \dfrac{1}{2}x$

d. $f(x) = 2x + 4;\ g(x) = x - 2$

3. Syarat agar Invers suatu Fungsi merupakan Fungsi (Fungsi Invers)

Jika $f: A \rightarrow B$ yang memetakan $f: a \rightarrow a'$ maka invers dari $f^{-1}: a' \rightarrow a$. Sehingga $f^{-1}: B \rightarrow A$, relasi $f^{-1}: B \rightarrow$ A ini dinamakan invers fungsi f, dan jika relasi f^{-1} tersebut memenuhi syarat suatu fungsi maka f^{-1} disebut fungsi invers.

Perhatikan kembali bahwa domain f^{-1} merupakan range dari f, dan f^{-1} harus memenuhi suatu syarat fungsi, yaitu setiap elemen a' dari B harus mempunyai kawan tepat satu elemen $a \in A$. Hal ini hanya terjadi jika f adalah suatu korespondensi satu-satu.



Gambar 3.5 *Invers fungsi f*

Jadi, syarat agar invers suatu fungsi merupakan fungsi, maka f adalah suatu fungsi yang bijektif (atau f korespondensi satu-satu).

Contoh 3.12

a. Fungsi $f : x \to 2x + 3$ mempunyai fungsi invers f^{-1} karena fungsi linear f ini suatu fungsi yang bijektif.
b. Fungsi $f : x \to x^2 - 4$, inversnya bukan merupakan fungsi untuk domain seluruh bilangan real karena fungsi kuadrat $f(x) = x^2 - 4$ bukan merupakan korespondensi satu-satu.

4. Menentukan Domain dan Kodomain suatu Fungsi yang Diketahui agar Fungsi tersebut Mempunyai Fungsi Invers

Syarat bahwa suatu fungsi f mempunyai invers f^{-1} adalah f merupakan suatu fungsi korespondensi satu-satu. Hal tersebut telah kita pelajari di atas. Dengan demikian domain dan kodomain dari fungsi agar diperoleh suatu invers dapat ditentukan.

Contoh 3.13

Suatu fungsi f pada himpunan bilangan real ditentukan oleh $f(x) = \frac{x-4}{2x+3}$. Tentukan domain dan range f agar diperoleh fungsi invers f^{-1}.

Jawab:

Dengan memperhatikan definisi suatu fungsi maka domain dari f adalah

$$D_f = \{x \mid 2x + 3 \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$$

$$= \{x \mid x \neq \frac{-3}{2}, x \in \mathbf{R}\}.$$

Kita dapat menentukan dengan terlebih dahulu mencari rumus fungsi inversnya.

Misalkan $f(x) = y$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x-4}{2x+3} = y$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 4 = 2xy + 3y$$
$$\Leftrightarrow x(1 - 2y) = 3y + 4$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{3y+4}{1-2y}$$
$$\Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = \frac{3y+4}{1-2y}$$

Jadi, rumus inversnya adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+4}{1-2x}$

Dengan memperhatikan range dari f adalah domain dari f^{-1} maka:

$$R_f = D_{f^{-1}} = \{x \mid 1 - 2x \neq 0, x \in \boldsymbol{R}\} \text{ atau } \{y \mid 1 - 2y \neq 0, y \in \boldsymbol{R}\}$$
$$= \{x \mid x \neq \frac{1}{2}, x \in \boldsymbol{R}\} \text{ atau } \{y \mid y \neq \frac{1}{2}, y \in \boldsymbol{R}\}$$

5. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

a. Pengertian Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Misalkan fungsi h merupakan fungsi komposisi dari fungsi f dan g ($h = g \circ f$), maka invers dari fungsi h adalah fungsi invers dari fungsi komposisi h dan biasa ditulis dengan notasi $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

Contoh 3.14

Diketahui $h = g \circ f$ dengan g dan f masing-masing fungsi pada $\boldsymbol{R}$ yang ditentukan oleh $f(x) = 2x$ dan $h(x) = x + 3$. Tentukan rumus invers dari fungsi h jika $h(x) = (g \circ f)(x) = 2x + 3$.

Jawab:

Fungsi invers dari fungsi h dicari sebagai berikut.

$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 3$

Misalkan $h(x) = y$

$$2x + 3 = y$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x = y - 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(y - 3)$$
$$\Leftrightarrow \quad h^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 3)$$

Sehingga, $h^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$

Jadi, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 3)$.

b. Menentukan Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Fungsi invers $(g \circ f)^{-1}$ dan fungsi komposisi $g \circ f$ dapat kita tentukan jika masing-masing fungsi f dan g diketahui. Langkah-langkah yang dapat ditempuh adalah sebagai berikut.

1) Tentukan terlebih dahulu fungsi komposisi $g \circ f$.
2) Tentukan fungsi inversnya berdasar hasil fungsi komposisi di atas.

Contoh 3.15

Diketahui f dan g masing-masing fungsi pada R yang didefinisikan dengan $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = 2x - 1$. Tentukan:

a. $(g \circ f)^{-1}$ b. $(f \circ g)^{-1}$

Jawab:

a. Menentukan $(g \circ f)^{-1}$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (g(x + 3)) \\ &= 2(x + 3) - 1 \\ &= 2x + 5\end{aligned}$$

Misalkan $(g \circ f)(x) = y$

$$\Leftrightarrow \quad 2x + 5 = y$$
$$\Leftrightarrow \quad 2x = y - 5$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(y - 5)$$
$$\Leftrightarrow \quad (g \circ f)^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 5)$$

Jadi, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 5)$.

b. Menentukan $(f \circ g)^{-1}$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= f(2x - 1) \\
&= (2x - 1) + 3 \\
&= 2x + 2
\end{aligned}
$$

Misalkan $(f \circ g)(x) = y$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad 2x + 2 &= y \\
\Leftrightarrow \quad 2x &= y - 2 \\
\Leftrightarrow \quad x &= \frac{1}{2}(y - 2) \\
\Leftrightarrow \quad (f \circ g)^{-1}(y) &= \frac{1}{2}(y - 2)
\end{aligned}
$$

Jadi, $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 2)$.

Latihan 3.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Diketahui $\boldsymbol{R}$ merupakan himpunan bilangan real, $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = 2 + x$ dan $g(x) = 3x - 1$. Tentukan:
   a. $(g \circ f)^{-1}(x)$ b. $(f \circ g)^{-1}(x)$
2. Diketahui $\boldsymbol{R}$ merupakan himpunan bilangan real dan diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ serta $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = 5x + 2$ dan $g(x) = 6 - 7x$. Tentukan:
   a. $(f^{-1} \circ g)(x)$ b. $(g \circ f^{-1})(x)$ c. $(f \circ g)^{-1}(x)$
3. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$; $x \neq 3$. Tentukan:
   a. $f^{-1}(x + 1)$ b. $(f^{-1} \circ f)(x + 1)$
4. Jika $\boldsymbol{R}$ merupakan himpunan bilangan real dan diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ serta $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 3x - 4$, tentukan $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$.
5. Diketahui $f(x) = 7x + 1$ dan $g(x) = \frac{1}{2}x - 5$. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$ untuk $x = -4$.
6. Diketahui $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{x}$, dan $h(x) = g((f(x))$. Tentukan $h^{-1}(x)$.

7. $f(x) = x + 2$ untuk $x > 0$ dan $g(x) = \frac{15}{x}$; $x \neq 0$ dan $x > 0$. Jika $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = 1$, tentukan x.
8. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ didefinisikan dengan $g(x) = x^2 - x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 3x + 4$. Tentukan $f^{-1}(x - 2)$.
9. Diketahui $f(x) = x^2 - 3x + 5$, $g(x) = x + 2$, dan $(f \circ g)^{-1}(x) = 15$. Tentukan x.
10. Diketahui $f(x) = 5^x$ dan $g(x) = x^2 + 3$ untuk $x \neq 0$. Tentukan $f^{-1}(g(x^2) - 3)$.

G. Menggambar Grafik Fungsi Invers dari Grafik Fungsi Asalnya

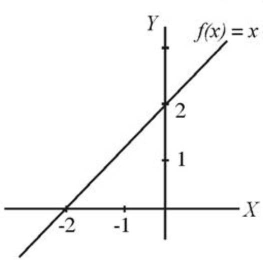
Contoh 3.16

Diketahui $f(x) = x + 2$.
Tentukan berikut ini.

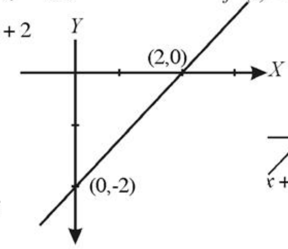
a. $f^{-1}(x)$.
b. Gambar grafik $f(x)$.
c. Gambar grafik $f^{-1}(x)$.
d. Tentukan hubungan antara grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$.

Jawab:

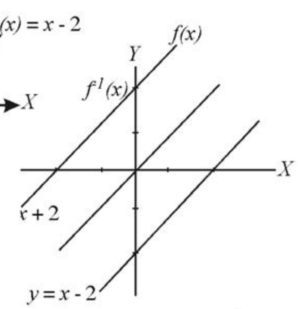
a. $f(x) = x + 2$
   Misalkan $x + 2 = y$
   $\Leftrightarrow x = y - 2$
   $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = y - 2$
   $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = x - 2$
   Jadi, $f^{-1}(x) = x - 2$.



b. Grafik $f(x)$



c. Grafik $f^{-1}(x)$



d. Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$

Hubungan antara grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ adalah saling simetris terhadap garis $y = x$.

Latihan 3.7

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

Gambarkan grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ jika diketahui berikut ini.

1. $f(x) = 2x + 3$
2. $f(x) = 5 - x$
3. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$
4. $f(x) = x^2$
5. $f(x) = x^2 - x$

H. Sifat Fungsi Invers Dikaitkan dengan Fungsi Komposisi

1. Sifat Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Jika $f^{-1}(x)$ invers dari $f(x)$ dan $g^{-1}(x)$ invers dari $g(x)$ maka:

$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$$
$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$
$$(f^{-1}(x))^{-1} = f(x)$$
$$(f \circ f^{-1})(x) = I$$

Contoh 3.17

Diketahui fungsi $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = 2x$ dan $g(x) = x + 2$. Tentukan berikut ini.

a. f^{-1} dan g^{-1}

b. $(f \circ g)^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1}$

c. $g^{-1} \circ f^{-1}$ dan $f^{-1} \circ g^{-1}$

d. $(f^{-1})^{-1}(x)$ dan $(g^{-1})^{-1}(x)$

e. $(f \circ f^{-1})(x)$ dan $(g \circ g^{-1})(x)$

f. Tunjukkan kesamaan-kesamaan dari fungsi inversnya.

Jawab:

a. Misalkan $f(x) = y$,

$y = 2x$

maka $x = \frac{1}{2}y$

$f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$ sehingga $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x$

Kemudian, misalkan $g(x) = x + 2 = y$ maka $x = y - 2$
$g^{-1}(y) = y - 2$ sehingga $g^{-1}(x) = x - 2$.

b. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 2$
Misalkan $(g \circ f)(x) = 2x + 2 = y$,
maka $2x = y - 2$

$$x = \frac{1}{2}(y - 2)$$

$(g \circ f)^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 2)$ sehingga $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 2)$
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 2) = 2(x + 2) = 2x + 4$
Misalkan $(f \circ g)(x) = 2x + 4 = y$,
maka $2x = y - 4$

$$x = \frac{1}{2}(y - 4)$$

$(f \circ g)^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 4)$ sehingga $(f \circ g)^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x - 4)$.

c.
$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= g^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right) \\ &= \frac{1}{2}x - 2 = \frac{1}{2}(x - 4) \\ (f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\ &= f^{-1}(x - 2) \\ &= \frac{1}{2}(x - 2)\end{aligned}$$

d. $(f^{-1})^{-1}(x)$ ditentukan sebagai berikut.
Misalkan $(f^{-1})(x) = y$,

maka $\frac{1}{2}x = y$
$x = 2y$
$(f^{-1})^{-1}(y) = 2y$
$(f^{-1})^{-1}(x) = 2x$
Misalkan $(g^{-1})(x) = y$,

maka $x - 2 = y$

$$x = y + 2$$
$$(g^{-1})^{-1}(y) = y + 2$$
$$(g^{-1})^{-1}(x) = x + 2$$

e. $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$

$= f(\frac{1}{2}x)$

$= 2(\frac{1}{2}x)$

$= x$

$(g \circ g^{-1})(x) = g(g^{-1}(x))$

$= g(x - 2)$

$= (x - 2) + 2$

$= x$

f. Dari uraian di atas diperoleh:

1) $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
2) $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$
3) $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$ dan $(g^{-1})^{-1}(x) = g(x)$
4) $(f \circ f^{-1})(x) = I$ dan $(g \circ g^{-1})(x) = I$

2. Menentukan Fungsi Invers dengan Menggunakan Sifat $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$

Selain dengan mencari $g \circ f$ dan $f \circ g$ terlebih dahulu untuk menentukan $(g \circ f)^{-1}$ atau $(f \circ g)^{-1}$, kedua fungsi invers dari fungsi komposisi ini dapat dicari dari kesamaan fungsi yaitu: $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Contoh 3.18

Diketahui f dan g fungsi-fungsi yang bekerja pada himpunan bilangan real $\boldsymbol{R}$ yang ditentukan oleh $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x$. Tentukan:

a. f^{-1} b. g^{-1} c. $(g \circ f)^{-1}$ d. $(f \circ g)^{-1}$

Jawab:

a. Misalkan $f(x) = 2x - 3 = y$

$$\Leftrightarrow \quad 2x = y + 3$$
$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(y + 3)$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y + 3)$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$

b. Misalkan $g(x) = x^3 = y$

$\Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y}$

$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$

Jadi, $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

c.
$$
\begin{aligned}
(g \circ f)^{-1} &= f^{-1} \circ g^{-1}: x \\
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}(x)) \\
&= f^{1}\left(\sqrt[3]{x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{x} + 3\right) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f \circ g)^{-1} &= (g^{-1} \circ f^{-1}): x \\
(g^{-1} \circ f^{-1})(x) &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\
&= g^{-1}\left(\frac{1}{2}(x+3)\right) \\
&= \sqrt[3]{\frac{1}{2}(x+3)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt[3]{4(x+3)}
\end{aligned}
$$

3. Beberapa Penerapan

Berdasarkan sifat-sifat fungsi invers, dapat dicari fungsi f jika fungsi g dan $g \circ f$ atau $f \circ g$ diketahui.

Contoh 3.19

1. Fungsi f dan g terdefinisi pada $\boldsymbol{R}$, dan diketahui pula $g(x) = x + 3$.
   Tentukan $f(x)$ jika diketahui berikut ini.
   a. $(g \circ f)(x) = 3x - 5$ b. $(f \circ g)(x) = x^2 + 6x$

   Jawab:

   a. Pertama dicari fungsi invers g^{-1}
      Misalkan $g(x) = x + 3 = y$

$\Leftrightarrow \quad x = y - 3$

$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = y - 3$ sehingga $g^{-1}(x) = x - 3$

Dengan memperhatikan:

$$\begin{aligned} f(x) &= (g^{-1} \circ (g \circ f))(x) \\ &= g^{-1}((g \circ f)(x)) \\ &= (3x - 5) - 3 \\ &= 3x - 8 \end{aligned}$$

Atau dengan cara lain:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= 3x - 5 \\ (g(f(x)) &= 3x - 5 \\ f(x) + 3 &= 3x - 5 \\ f(x) &= 3x - 8 \end{aligned}$$

b. Demikian juga:

$$\begin{aligned} (f \circ g) \circ g^{-1} &= f \circ (g \circ g^{-1}) \\ &= f \circ I \end{aligned}$$

Ini berarti:

$$\begin{aligned} f(x) = ((f \circ g) \circ g^{-1})(x) &= (f \circ g)(g^{-1}(x)) \\ &= (f \circ g)(x - 3) \\ &= (x - 3)^2 + 6(x - 3) \\ &= x^2 - 9 \end{aligned}$$

Atau dengan cara lain:

Misalkan $a = g(x) = x + 3 \Leftrightarrow x = a - 3$

$$\begin{aligned} 1(f \circ g)(x) &= x^2 + 6x \\ f(g(x)) &= x^2 + 6x \\ f(a) &= (a - 3)^2 + 6(a - 3) \\ &= a^2 - 9 \end{aligned}$$

Dengan demikian, $f(x) = x^2 - 9$.

2. Tentukan fungsi $f(x)$ pada $\boldsymbol{R}$ sedemikian hingga

$$f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{2x+3},\ x \neq -\frac{3}{2}.$$

Jawab:

Misalkan $1 - \dfrac{1}{x} = y$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = 1 - y$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{1-y}$

$$\text{Sehingga, } f(y) = \frac{\frac{1}{1-y}-1}{2\left(\frac{1}{1-y}\right)+3} = \frac{1-(1-y)}{2+3(1-y)} = \frac{y}{5-3y}$$

$$\text{Jadi, } f(x) = \frac{x}{5-3x},\ x \neq \frac{5}{3}.$$

Latihan 3.8

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Diketahui fungsi f dan g terdefinisi pada $\boldsymbol{R}$ dan didefinisikan dengan $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = 1 - 3x$.
   a. Tulislah rumus untuk f^{-1} dan g^{-1}.
   b. Carilah $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$.
2. Fungsi f dan g pada $\boldsymbol{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = x - 3$ dan $g(x) = \frac{x-3}{x+4},\ x \neq -4$.
   a. Tulislah rumus untuk f^{-1} dan g^{-1}.
   b. Tentukan fungsi invers $(g \circ f)^{-1}$, $(f \circ g)^{-1}$, dan domain-domainnya.
3. Fungsi f dan g pada bilangan real didefinisikan dengan $f(x) = \frac{1}{1-x}$ dan $g(x) = 1 - \frac{1}{1-x}$.
   Tentukan:
   a. f^{-1} dan g^{-1}.
   b. $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$.
   c. Berdasarkan ketentuan fungsi, tentukan daerah asal dari f, g, $f \circ g$, dan $g \circ f$.
4. Diketahui f dan g fungsi pada $\boldsymbol{R}$ yang didefinisikan dengan $f(x) = x$ dan $g(x) = -\frac{1}{x},\ x \neq 0$.
   Tentukan:
   a. f^{-1} dan g^{-1}.
   b. $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$.
5. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(2x - 1) = 4 - 3x$ dan $g(x) = x^2$. Tentukan:
   a. $f^{-1}(x)$
   b. $g^{-1}(x)$
   c. $(f \circ g)^{-1}$

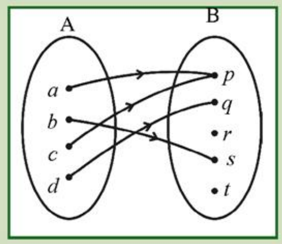
6. a. Diketahui $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, dan ditentukan oleh

$$g^{-1}(x) = \frac{3-2x}{x-1},\ h(x) = x - 1.$$ Tentukan $(h^{-1} \circ g)(2)$.

b. Diketahui $h : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ dan $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $h^{-1}(x-1) = \sqrt{x}$, $f^{-1}(1-2x) = 4 - 3x$. Tentukan $(h \circ g)(4)$.

Rangkuman

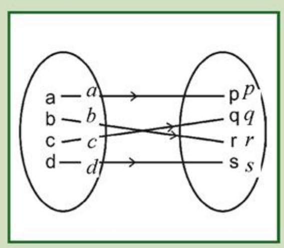
1. Suatu fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B ialah suatu relasi khusus, yang setiap elemen dari A dikawankan dengan tepat satu elemen di B.



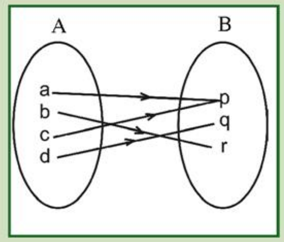
Himpunan A disebut domain (daerah asal).
Himpunan B disebut kodomain (daerah kawan).
Himpunan semua peta di B disebut daerah hasil (range).
$f(a)$ disebut peta (*image*, bayangan) dari a.
a disebut prapeta (*praimage*, prabayangan) dari $f(a)$.

2. Untuk fungsi-fungsi pada bilangan real dikenal beberapa fungsi khusus, antara lain sebagai berikut.
   a. Fungsi konstan
   b. Fungsi identitas
   c. Fungsi tangga
   d. Fungsi modulus
   e. Fungsi linear
   f. Fungsi kuadrat

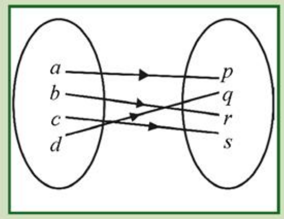
3. Dikenal sifat-sifat fungsi istimewa, yaitu sebagai berikut.
   a. Suatu fungsi dikatakan fungsi injektif (satu-satu) $f : A \to B$ jika untuk setiap dua elemen yang berlainan $a \neq a'$ di A diperoleh $f(a) \neq f(a')$.



b. Suatu fungsi dikatakan fungsi surjektif (fungsi *on to*) $f : A \to B$ jika setiap elemen $y \in B$, diperoleh $x \in A$ sedemikian hingga $y = f(x)$.

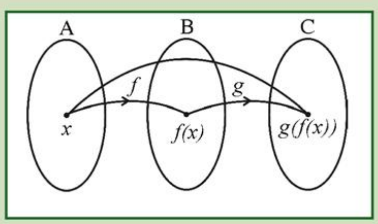


c. Suatu fungsi f dikatakan bijektif (korespondensi satu-satu) jika f injektif dan surjektif sekaligus.



4. Aljabar Fungsi
   a. Jumlah dua fungsi $f + g : x \to f(x) + g(x)$
   b. Selisih dua fungsi $f - g : x \to f(x) - g(x)$
   c. Perkalian dua fungsi $f \times g : x \to f(x) \times g(x)$
   d. Pembagian dua fungsi $\dfrac{f}{g} : x \to \dfrac{f(x)}{g(x)}$
5. Komposisi Fungsi

   Jika f dan g ialah fungsi sehingga $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ maka fungsi komposisi $g \circ f : A \to C$ yang ditentukan oleh rumus $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in A$.

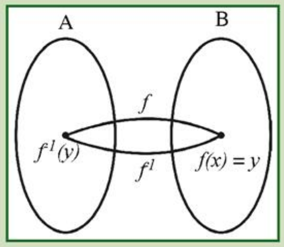


6. Sifat-sifat Komposisi Fungsi
   a. Komposisi fungsi tidak komutatif, yaitu: $g \circ f \neq f \circ g$
   b. Komposisi fungsi bersifat asosiatif, yaitu:

$$h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

7. Fungsi Invers

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$, jika f suatu fungsi yang bijektif (A dan B berada dalam korespondensi satu-satu) dan dipenuhi: $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$



Tugas Kelompok

1. Jika $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, $x \neq -\dfrac{d}{c}$, tentukan rumus untuk $f^{-1}(x)$.
2. Kemudian, gunakan rumus tersebut untuk mencari invers fungsi berikut.

   a. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{4x - 5}$ d. $g(x) = \dfrac{4x - 2}{3 + 5x}$

   b. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{3x - 2}$ e. $g(x) = \dfrac{2}{3 - x}$

   c. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{4x - 2}$ f. $g(x) = \dfrac{2x}{3x + 5}$
3. Tentukan $f^{-1}(x)$ kemudian tentukan daerah hasilnya.

   a. $f(x) = x^2 - 9$ c. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x = 1$

   b. $f(x) = -x^2 - 6x$
4. Fungsi f didefinisikan pada $\boldsymbol{R}$ dengan $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 4}$, $x \neq -4$.

   a. Tentukan rumus f^{-1}.

   b. Tentukan pula $(f^{-1})^{-1}$.

   Kesimpulan apa yang kalian dapatkan?

5. Tentukanlah fungsi f pada R dengan menggunakan jawaban soal nomor 4 jika diketahui berikut ini.

a. $f^{-1}(x) = x + 2$

b. $f^{-1}(x) = 2x - 5$

c. $f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{2}x$

d. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$

e. $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2x+3}, x \neq -\frac{3}{2}$

6. Diketahui f dan g adalah fungsi pada A dengan $A = \{x \mid x > 0, x \in \boldsymbol{R}\}$ yang ditentukan oleh $f(x) = x + 3$ dan $g(x) = \frac{3}{x}$.

Carilah:

a. $(g \circ f)^{-1}(3)$

b. $(f^{-1} \circ g^{-1})(3)$

c. $(f \circ g)^{-1}(3)$

d. $(g^{-1} \circ f^{-1})(3)$

Kesimpulan apa yang kalian peroleh?

a. Jumlah dua fungsi $f + g : x \to f(x) + g(x)$

b. Selisih dua fungsi $f - g : x \to f(x) - g(x)$

c. Perkalian dua fungsi $f \times g : x \to f(x) \times g(x)$

d. Pembagian dua fungsi $\frac{f}{g} : x \to \frac{f(x)}{g(x)}$

Sebaiknya Anda Coba

Suatu $A \to R$ didefinisikan sebagai berikut.

$f(1) = 1$; $f(2) = 2$; $f(3) = 3$; dan $f(n) = \frac{f(n-1) + f(n-2) + 1}{f(n-3)}$ untuk $n \geq 4$.

Tentukan nilai dari $f(2004)$.

Petunjuk

a. Hitunglah $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ sampai $f(16)$ dan selidiki pola apakah yang terjadi.

b. Jika belum jelas lanjutkan penelitian sampai $f(24)$.

c. Carilah rumusan umum dari penelitian kalian.

d. Titik terang untuk menjawab pertanyaan pasti sudah ada.

Refleksi

Menurut kalian, apakah manfaat nyata yang kalian rasakan setelah mempelajari bab ini?

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Bila D_f menyatakan daerah asal dan R_f daerah hasil fungsi $y = \sqrt{x-1}$, maka . . . .
   a. $D_f = \{x \mid x \in R\}, R_f = \{y \mid y \in R\}$
   b. $D_f = \{x \mid x \in R, x > 0\}, R_f = \{y \mid y \in R, y > 0\}$
   c. $D_f = \{x \mid x \in R, x > 1\}, R_f = \{y \mid y \in R\}$
   d. $D_f = \{x \mid x \in R, x \geq 1\}, R_f = \{y \mid y \in R, y \geq 0\}$
   e. $D_f = \{x \mid x \in R, \geq 0\}, R_f = \{y \mid y \in R, y \geq 0\}$
2. Diketahui $f(x) = -x + 3$, maka $f(x^2) + [f(x)]^2 - 2f(x)$ adalah ....
   a. $2x^2 - 6x + 4$
   b. $6x + 4$
   c. $2x^2 + 4x + 6$
   d. $-4x + 6$
   e. $2x^2 - 4x - 6$
3. Diketahui $f(x) = x^2 - 2$ dan $g(x) = 2x + 1$, maka komposisi $f(g(x))$ adalah ....
   a. $4x^2 - 2$
   b. $2x^2 - 3$
   c. $x^2 + 2x - 1$
   d. $4x^2 + 4x - 1$
   e. $4x^2 + 4x + 1$
4. Diketahui $f(x) = x^2 + 4$ dan $g(y) = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$, maka $(g \circ f)(t)$ adalah ....
   a. $\dfrac{4+4t}{t}$
   b. $\dfrac{2+2t}{t}$
   c. $\dfrac{2+t}{t}$
   d. $\dfrac{2}{t+2}$
   e. $\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}$

5. Diketahui fungsi-fungsi:
$f(x) = 2x$, $g(x) = x^2 - 1$, dan $h(x) = x^2 - 1$. Komposisi fungsi di bawah ini yang benar adalah ....
   a. $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 1$
   b. $(g \circ f)(x) = 4x^2 - 1$
   c. $(f \circ h)(x) = 4x$
   d. $(h \circ f)(x) = 4^{2x}$
   e. $(h \circ g)(x) = 2x^2 - 1$

6. Jika $f(x) = 5^x$ dan $g(x) = x^2 + 3$ untuk $x \neq 0$, maka $f^{-1}(g(x^2) - 3)$ adalah ....
   a. ${}^5\log (x^2 + 3)$
   b. ${}^5\log (x^4 - 3)$
   c. ${}^5\log (x^4 + 3)$
   d. $4\ {}^5\log x$
   e. $2\ {}^5\log x$

7. Jika fungsi $f : \to \boldsymbol{R}$ dan $g : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ ditentukan oleh $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 3x - 4$, maka $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ adalah ....
   a. 1
   b. 2
   c. $3\frac{1}{3}$
   d. $4\frac{2}{3}$
   e $5\frac{1}{3}$

8. Jika ditentukan $f(x) = \dfrac{4x+1}{x-4}$ dengan $x \in \boldsymbol{R}$ dan $x \neq 4$, maka fungsi invers $f^{-1}(x)$ adalah ....
   a. $\dfrac{x+4}{4x-1}$
   b. $\dfrac{x-4}{4x+1}$
   c. $\dfrac{4x-1}{x+4}$
   d. $\dfrac{4x+1}{x-4}$
   e. $\dfrac{4x-1}{x-4}$

9. Diketahui $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ yang ditentukan oleh $f(x + 2) = \dfrac{x+3}{x-1}$, $x \neq 1$, maka $f^{-1}(x)$ adalah ....
   a. $\dfrac{x+1}{x-3}$, $x \neq 3$
   b. $\dfrac{x-3}{x+1}$, $x \neq -1$
   c. $\dfrac{5-x}{x-1}$, $x \neq 1$
   d. $\dfrac{3x-1}{x+1}$, $x \neq -1$
   e. $\dfrac{3x+1}{x-1}$, $x \neq 1$

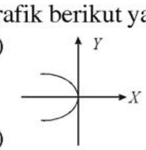
10. Nilai fungsi invers $f^{-1}(2)$ dari $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$ adalah ....

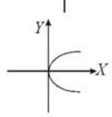
a. 6 d. $\frac{6}{7}$

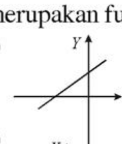
b. $3\frac{1}{3}$ e. $\frac{2}{7}$

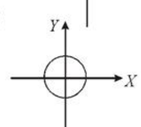
c. 2

11. Diketahui fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dan $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ditentukan oleh $f(x) = 2x - 3$ dan $g(x) = x^2 + 2x - 3$.
    Nilai dari $(f \circ g)(2)$ adalah ....
    a. 0 d. 8
    b. 1 e. 11
    c. 7
12. Jika $f(x) = 2x$ dan $f(g(x)) = -\frac{x}{2} + 1$, maka $g(x)$ adalah ....
    a. $\frac{x}{2} - 1$ d. $\frac{1}{4}(x - 2)$
    b. $\frac{x}{2} + 1$ e. $\frac{1}{4}(-x - 2)$
    c. $\frac{1}{4}(-x + 2)$
13. Dari fungsi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dan $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ diketahui bahwa $f(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 7$, maka $g(x)$ adalah ....
    a. $x^2 + 6x - 4$ d. $x^2 + 6x + 4$
    b. $x^2 + 3x - 2$ e. $x^2 - 3x + 2$
    c. $x^2 - 6x + 4$
14. Diketahui $A = \{x \mid x < -1\}$, B dan C himpunan bilangan real. $f : A \to B$, dengan $f(x) = -x + b$, $g : B \to C$, dengan $g(x) = x^2$, dan $h = g \circ f : A \to C$. Bila x di A dipetakan ke 64 di C, maka x adalah ....
    a. 7 d. –9
    b. 8 e. –7
    c. 9
15. Bila $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$, dengan $x \neq 3$, maka invers dari $f(x)$ yaitu $f^{-1}(x)$ adalah ....
    a. $\frac{3-x}{x+2}$, dengan $x \neq -2$ d. $\frac{x-2}{x-3}$, dengan $x \neq 3$
    b. $\frac{x+2}{3-x}$, dengan $x \neq 3$ e. $\frac{3x-2}{x+1}$, dengan $x \neq -1$
    c. $\frac{3x-2}{x-1}$, dengan $x \neq 1$

16. Diketahui $f(x) = x + 2$ untuk $x > 0$ dan $g(x) = \dfrac{15}{x}$ untuk $x > 0$. Dengan demikian $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = 1$ dipenuhi untuk x adalah ....
    a. 1
    b. 3
    c. 5
    d. 8
    e. 10
17. Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 4$. Maka $g(x)$ adalah ....
    a. $3x + 4$
    b. $3x + 3$
    c. $3x^2 + 4$
    d. $3(x^2 + 1)$
    e. $3(x^2 + 3)$
18. Fungsi f pada himpunan bilangan real ***R*** didefinisikan sebagai berikut.
$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ jika } x > 3 \\ x^2 - 2, \text{ jika } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3, \text{ jika } x < -2 \end{cases}$$
    Maka:
    (1) $f(2) = 2$
    (2) $f(4) = 11$
    (3) $f(-1) = -1$
    (4) $f(-3) = 3$
    Pernyataan yang benar adalah ....
    a. (1), (2), dan (3)
    b. (1) dan (3)
    c. (2) dan (4)
    d. (4)
    e. (1), (2), (3), dan (4)
19. Fungsi $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{16 - x^2}}$ terdefinisikan untuk x yang memenuhi ....
    a. $-x < x < 4$
    b. $x < -1$ atau $x > 1$
    c. $-1 < x < 1$
    d. $x < -4$ atau $x > 4$
    e. $-4 < x < 4$
20. Grafik berikut yang dapat merupakan fungsi $x = f(y)$ adalah ....
    (1)


    (2)


    (3)


    (4)


    a. (1), (2), dan (3)
    b. (1) dan (3)
    c. (2) dan (4)
    d. (4)
    e. (1), (2), (3), dan (4)

Bab 4

Limit Fungsi

Coba kalian perhatikan gambar sawah terasering dan atap rumah di atas. Bagaimana kalian menentukan luas atap dan sawah tersebut? Kalian dapat menentukan luas atap dan sawah terasering tersebut dengan menggunakan fungsi pendekatan. Dalam matematika fungsi pendekatan dapat dipelajari pada limit fungsi. Dengan limit fungsi kalian dapat menentukan luas suatu daerah yang bentuknya tidak tentu.

Setelah mempelajari materi ini kalian diharapkan dapat; menghitung limit fungsi aljabar di satu titik serta menghitung limit fungsi aljabar sederhana di satu titik, serta menggunakan sifat limit fungsi untuk menghitung bentuk tak tentu fungsi aljabar.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.

Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. **Limit**
2. **Fungsi Aljabar**
3. **Limit di Satu Titik**
4. **Limit di Tak Hingga**
5. **Bentuk Tak Tentu**
6. **Teorema Limit**
7. **Turunan**

Materi mengenai limit fungsi merupakan bagian dari pengantar kalkulus, yaitu mengenai hitung diferensial dan hitung integral. Teori limit ini menjadi dasar-dasar kalkulus di mana hal tersebut memakai konsep dengan definisi yang dirumuskan oleh Augustin – Louis Cauchy. Sebelum mempelajari materi ini sebaiknya kalian mempelajari dan mengingat kembali materi aljabar tentang pemfaktoran.

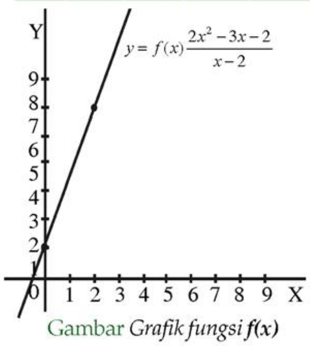
A. Limit Fungsi di Satu Titik

Pengertian limit fungsi merupakan pengertian dasar hitung diferensial dan hitung integral. Perhatikan contoh di bawah ini untuk dapat memahami pengertian limit.

Fungsi f didefinisikan sebagai $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$. Jika variabel x diganti dengan 2 maka $f(2) = \dfrac{0}{0}$. Akan tetapi, adakah suatu bilangan yang akan didekati oleh $f(x)$ jika nilai x mendekati 2? Perhatikan Tabel 4.1 dan Gambar 4.1.

Tabel Nilai fungsi $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ *untuk x mendekati 2*

x	0	1,5	1,9	1,999	$\to$ 2,000 $\leftarrow$	2,001	2,01	2,1	2,5	3	4
$f(x)$	1	3	4	4,998	$\to$? $\leftarrow$	5,002	5,02	5,2	6	7	9



Gambar *Grafik fungsi* $f(x)$

$= \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$

Dari tabel dan gambar, kita dapat memperoleh kesimpulan $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$ mendekati 5 jika x mendekati 2, baik didekati dari sebelah kiri (disebut limit kiri) maupun didekati dari sebelah kanan (disebut limit kanan). Sehingga dapat dikatakan bahwa $f(x)$ mendekati 5 untuk x mendekati 2, dan ditulis:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2} = 5.$$

Pengertian Limit Kiri dan Limit Kanan

Limit $f(x) = L$ mengandung arti bahwa x mendekati dari dua pihak, yaitu:

1. x mendekati a dari pihak kurang dari a, yang disebut mendekati a dari kiri dan ditulis $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.
2. x mendekati a dari pihak lebih dari a, yang disebut mendekati a dari kanan dan ditulis $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$.

Sehingga limit fungsi dapat didefinisikan sebagai berikut.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L \text{ dan } \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

atau

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) \text{ (limit kiri)} = \lim_{x \to a^+} f(x) \text{ (limit kanan)} = L$$

B. Limit Fungsi Aljabar di Satu Titik

1. Limit Fungsi $f : x \to f(x)$ untuk $x \to a$

Kita dapat menyelesaikan limit fungsi $f(x)$ untuk $x \to a$ dengan menggunakan cara substitusi, yaitu dengan mensubstitusikan nilai $x = a$ ke dalam $f(x)$. Apabila diperoleh:

$f(a) = h$ (tentu), berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = h$

$f(a) = \dfrac{h}{0} = \infty$ (tentu), berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

$f(a) = \dfrac{0}{h} = 0$ (tentu), berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

$f(a) = \dfrac{0}{0} = \dfrac{\infty}{\infty} = \infty - \infty$ (disebut bentuk tak tentu)

Limit bentuk tak tentu dapat diselesaikan dengan cara berikut.

a. Bentuk $f(x)$ difaktorkan sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$, kemudian nilai $x = a$ disubstitusikan lagi.
b. Bentuk $f(x)$ dikalikan dengan sekawan pembilang atau penyebut sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$, kemudian nilai $x = a$ disubstitusikan lagi.

Contoh 4.1

Selesaikanlah bentuk limit di bawah ini.

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 3)$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2}{2x - 4}$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

d. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

f. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{(x^2 + 2x - 24)(x + 2)}{x^2 + 8x + 12}$

Jawab:

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x + 3) = 2 \times 3 + 3 = 9$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 2}{2x - 4} = \frac{3 \times 2^2 - 2}{2 \times 2 - 4} = \frac{10}{0} = \infty$

c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{1 - 1}{1 + 2} = \frac{0}{3} = 0$

d. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2^2 - 4}{2^2 - 5 \times 2 + 6} = \frac{0}{0}$ (disebut tak tentu)

Cara penyelesaiannya adalah sebagai berikut.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3}$$

$$= \frac{2+2}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$$

e. $$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x - x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{6}}\right)}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= 0 - 0 = 0$$

f. $$\lim_{x\to -2} \frac{(x^2 + 2x - 24)(x + 2)}{x^2 + 8x + 12}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x + 6)(x - 4)(x + 2)}{(x + 6)(x + 2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} x - 4 = -6$$

Contoh 4.2

Selesaikan bentuk limit di bawah ini.

a. $$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$$

b. $$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

Jawab:

a. $$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{0}{0} \text{ (tak tentu)}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}} \times \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{(x+2)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} = -\frac{0}{4} = 0$$

b. $\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \quad = \frac{0}{0}$ (tak tentu)

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \times \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \lim_{x\to 9} \left(\sqrt{x}+3\right)$$

$$= 3 + 3 = 6$$

Dimensi Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Menurut kalian apakah arti limit secara bahasa? jelaskan dengan kata-kata kalian sendiri.

Latihan 4.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

Hitunglah nilai dari limit fungsi berikut.

1. a. $\lim_{x\to 1} (3x-1)$
   b. $\lim_{x\to 3} \sqrt{16+x^2}$
   c. $\lim_{x\to 2} \sqrt{3x-2}$
   d. $\lim_{x\to -1} (x^2-2x+1)$
   e. $\lim_{x\to 3} \sqrt{7+2x^2}$
2. a. $\lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{3x-4}$
   b. $\lim_{x\to 2} \frac{5x+1}{x-2}$
   c. $\lim_{x\to -5} \frac{5+x}{1-3x}$
   d. $\lim_{x\to -2} \frac{3x-1}{1-2x}$
   e. $\lim_{x\to 0} \frac{1+6x}{5x-2}$

3. a. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+5}{x^2-9}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^4-16}{x^2-4}$

b. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+3}$

e. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+3x-2}{x+2}$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-x}{x^2+2x}$

4. a. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x^2-2x+1}$

d. $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2+6x-7)}{x-1}$

e. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$

c. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{(x^3-7x-6)}{(x+2)}$

5. a. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3-\sqrt{2x+5}}{x^2+6x-16}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}{x}$

e. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{4-x}}{x^3-x}$

c. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

6. a. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

d. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}-2}{x-2}$

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

e. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-a}{x-a}$

c. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$

2. Limit Fungsi $f : x \to f(x)$ untuk $x \to \infty$

Bentuk limit fungsi aljabar dengan variabel mendekati tak hingga yang sering dijumpai adalah $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dan $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) - g(x)$. Dengan substitusi kedua bentuk limit itu akan diperoleh bentuk tak tentu, sehingga dalam menyelesaikan limit fungsi aljabar yang variabelnya mendekati tak hingga (tak tentu) diubah menjadi bentuk tentu dapat kita gunakan cara berikut.

a. *Membagi Pangkat Tertinggi*

Bentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ diselesaikan dengan cara membagi pangkat tertinggi dari pembilang dan penyebut.

b. *Mengalikan dengan Faktor Sekawan*

Bentuk $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$ diselesaikan dengan cara mengalikan sekawannya, yaitu $\frac{f(x) + g(x)}{f(x) + g(x)}$ sehingga bentuk limitnya berubah menjadi

$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \to \infty} \frac{f^2(x) - g^2(x)}{f(x) + g(x)}.$$

Selanjutnya dilakukan dengan cara yang pertama lagi.

Contoh 4.3

Hitunglah nilai limit berikut.

a. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - x - 6}{x + 4}$

b. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1}$

c. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{4x^2 + 7x}}$

Dimensi Matematika

Mencari Informasi Lebih Lanjut

Coba carilah materi ini di internet untuk membuktikan kebenaran kedua cara menghitung limit fungsi aljabar

Jawab:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x+4}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0}{0 + 0} = \infty$$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{3x^4 - 2x^2 + 3x + 1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^4}}{3 - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}}$

$$= \frac{0 - 0 + 0}{3 - 0 - 0 + 0} = \frac{0}{3} = 0$$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x+2}{\sqrt{x^2-3} + \sqrt{4x^2+7x}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{3}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2\left(4 + \frac{7}{x}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x+2}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}} + x\sqrt{4 + \frac{7}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{7}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5x + \frac{2}{\infty}}{\sqrt{1 - \frac{3}{\infty}} + \sqrt{4 + \frac{7}{\infty}}}$$

$$= \frac{5+0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{4+0}} = \frac{5}{1+2} = 1\frac{2}{3}$$

Contoh 4.4

Hitunglah nilai limit berikut.

a. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$

b. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2}\right)$

Jawab:

a. $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}\right) \times \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(x^2+2x\right)-\left(x^2-2x\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x-1}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = 2$$

Dimensi Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Bagaimana menyelesaikan bentuk limit tak hingga dari pecahan yang pembilang dan penyebutnya dalam bentuk akar? Kemukakan pendapat kalian!

b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+3)-(x+2)}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{3}{x}}+\sqrt{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0}} = \frac{0}{2} = 0$$

Latihan 4.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Hitunglah nilai dari limit fungsi berikut.

   a. $\lim_{x\to 1}(3x-1)$

   b. $\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{3x-4}$

   c. $\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x^2-9}$

   d. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x+3}$

   e. $\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{x^2-2x+1}$

2. Hitung nilai limit fungsi berikut.

   a. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-1}\right)$

   b. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+2}\right)$

c. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

d. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-\sqrt{x^2+3x}\right)$

e. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x+1}\right)$

f. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x-1}-\sqrt{x^2+2x-3}\right)$

g. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+x-1}-\sqrt{x^2+x-3}\right)$

h. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{2x^2-x+2}\right)$

3. Tentukan nilai dari limit berikut.

a. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+2}{5x^3+2x-1}$

c. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-1}{4x^2-2x+2}$

b. $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2x+1}{x^3-2x+1}$

d. $\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}+2}$

e. $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2+3+...+n}{2+4+6+...+2n}$

f. $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x-1}+1}{2^{x+2}-1}$

C. Teorema Limit

Perhitungan limit fungsi dan caranya telah kita pelajari pada materi sebelumnya. Dalam menghitung nilai limit, kita menggunakan beberapa sifat yang bisa kita peroleh dari teorema berikut.

Teorema 1

Jika m dan b adalah sembarang konstanta maka $\lim\limits_{x \to a} (mx + b) = ma + b$.

Contoh 4.5

$\lim\limits_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 10$

Teorema 2

Jika c adalah konstanta, maka untuk setiap sembarang bilangan a berlaku: $\lim\limits_{x \to a} c = c$.

Contoh 4.6

$\lim\limits_{x \to 2} 5 = 5$

Teorema 3

Jika $f(x) = x$, maka $\lim\limits_{x \to a} x = a$.

Contoh 4.7

$\lim\limits_{x \to 7} x = 7$

Teorema 4

Jika $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ maka:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) \pm g(x) = L \pm M$.

Contoh 4.8

a. $\lim\limits_{x \to 2} (2x + 7) = \lim\limits_{x \to 2} 2x + \lim\limits_{x \to 2} 7 = 4 + 7 = 11$

b. $\lim\limits_{x \to 3} (10 - 3x) = \lim\limits_{x \to 3} 10 - \lim\limits_{x \to 3} 3x = 10 - 9 = 1$

Teorema 5

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$ maka

$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

Contoh 4.9

$$\lim_{x \to 2} x(2x+4)$$
$$= \lim_{x \to 2} x \lim_{x \to 2} (2x+4)$$
$$= (2)(8) = 16$$

Teorema 6

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan n sembarang bilangan positif maka:

$\lim_{x \to a} (f(x))^n = L^n$

Contoh 4.10

$$\lim_{x \to 2} (x+1)^4 = (3)^4 = 81$$

Teorema 7

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M, M \neq 0$

maka $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$.

Contoh 4.11

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x}{3x-1} = \frac{\lim_{x \to 2} 2x}{\lim_{x \to 2} (3x-1)} = \frac{4}{5}$$

Teorema 8

Jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$ maka $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$.

Dengan syarat,

a. $L > 0$ untuk n bilangan bulat positif.

b. $L \leq 0$ untuk n bilangan ganjil positif.

Contoh 4.12

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{9x} = \lim_{x\to 3} \sqrt[3]{27} = 3$$

Teorema 9

Jika $a \in \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real, $a \neq 0$ maka $\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ $\lim_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$.

Contoh 4.13

$$\lim_{x\to 5} \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$$

Teorema 10

Jika $n \in$ bilangan bulat positif maka $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Contoh 4.14

$$\lim_{x\to 8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{8} = 2$$

Latihan 4.3

Selesaikanlah soal-soal di bawah ini dengan menggunakan teorema limit.

1. a. $\lim_{x\to 3} (2x-5)$ d. $\lim_{x\to a} (2x-4)$

   b. $\lim_{x\to 3} 7$ e. $\lim_{x\to a} 7$

   c. $\lim_{x\to 5} x$ f. $\lim_{x\to a} x$

2. a. $\lim_{x\to 2} 5x(2x+2)$ d. $\lim_{x\to a} (4x+5)$

   b. $\lim_{x\to 4} (x-2)^3$ e. $\lim_{x\to a} 3x(x+2)$

   c. $\lim_{x\to 3} \frac{5x+4}{2x-5}$ f. $\lim_{x\to a} 3x(x+2)^2$

   g. $\lim_{x\to 2} (3x-7)^{\frac{1}{2}}$ i. $\lim_{x\to 2} (x+3)(3x-1)$

   h. $\lim_{x\to 2} [(2-3x)(x^3-5)]^2$ j. $\lim_{x\to 3} (x^2-3x+4)$

3. a. $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{4x+1}$

   d. $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{x}$

   b. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{x}$

   e. $\lim_{x \to a} \sqrt[3]{4x+2}$

   c. $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x}$

   f. $\lim_{x \to a} \frac{1}{x}$

4. Hitunglah nilai dari limit fungsi berikut.

   a. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

   c. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{3x-1} - \sqrt{5x-1}}{x-1}$

   b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4x + 4}$

   d. $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{4x-3}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-2}}$

5. Tentukan nilai limit fungsi berikut.

   a. $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

   d. $\lim_{x \to 3} \frac{x+5}{x^2 - 9}$

   b. $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 - 2}{x+1}$

   e. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 2x}$

   c. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x}$

6. Selesaikan bentuk limit di bawah ini.

   a. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 2x + 1}$

   d. $\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 3x}$

   b. $\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x+2}$

   e. $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

   c. $\lim_{x \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$

7. Tentukan nilai limit berikut.

a. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\sqrt{5x+1} - \sqrt{3x+7} \right)$

b. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\sqrt{(x+1)(x+3)} - x \right)$

c. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\sqrt{(2x-1)(x+2)} - (x\sqrt{2}+1 \right)$

d. $\lim\limits_{x \to \sim} \left((3x-2) - \sqrt{9x^2-2x+5} \right)$

8. Tentukan nilai limit berikut.

a. $\lim\limits_{x \to \sim} \sqrt{x^2-5x} - x - 2$

b. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(x - \sqrt{x^2-2x} \right)$

c. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x \right)$

d. $\lim\limits_{x \to \sim} \left(\sqrt{2x^2+5x+8} - \sqrt{2x^2+2x-1} \right)$

D. Menghitung Limit Fungsi yang Mengarah ke Konsep Turunan

Turunan dari fungsi $f(x)$ adalah $f'(x)$. Fungsi $f'(x)$ dapat ditulis dalam bentuk limit fungsi, yaitu $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Apabila f mempunyai turunan untuk tiap-tiap anggota dari domain D dengan $D \in \boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{R}$ himpunan bilangan real untuk a, b, ... $\in D$ maka

$$f'(a) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a+k)-f(a)}{h}$$

$$f'(b) = \lim_{k \to 0} \frac{f(b+k)-f(b)}{h}$$

Untuk tiap-tiap anggota dari D diperoleh nilai f' yang sesuai. Dengan demikian diperoleh fungsi baru f' dengan domain D yang disebut fungsi turunan dari f. Jadi, fungsi turunan f ditentukan oleh rumus

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Contoh 4.15

Diketahui $f(x) = x^2 + 3$. Tentukan $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{((x+h)^2+3)-(x^2+3)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2hx+h^2+3-x^2-3}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2hx+h^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}\\ &= 2x+0 = 2x\end{aligned}$$

Contoh 4.16

Apabila $f(x) = 2x^2 - 1$, tentukan $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Jawab:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h)^3-1)-(2x^3-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-1-2x^3+1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-1-2x^3+1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(6x^2 + 6xh + 2h)}{h}$$

$$= 6x^2 + 6x\,(0) + 2(0) = 6x^2$$

Contoh 4.17

Apabila $f(x) = 3x^2$ maka tentukan $\lim_{h \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$.

Jawab:

$$\lim_{h \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{h \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$$

$$= \lim_{h \to 5} \frac{3x^2 - 3(5)^2}{(x - 5)}$$

$$= \lim_{h \to 5} \frac{3(x^2 - 5^2)}{(x - 5)}$$

$$= \lim_{h \to 5} \frac{3(x + 5)(x - 5)}{(x - 5)}$$

$$= \lim_{h \to 5} 3(x + 5)$$

$$= 3(5 + 5) = 3 \cdot 10 = 30$$

Dimensi Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Jelaskan peranan bentuk limit dalam ilmu sosial terutama dalam bidang ekonomi.

Latihan 4.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, jika diketahui:

   a. $f(x) = -2x^2 + 5$

   b. $f(x) = 5x^3 - 4$

   c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

   d. $f(x) = \sqrt{x}$

   e. $f(x) = x^2 + 2x - 8$

   f. $f(x) = 4 - \sqrt{x^2 + 7}$

   g. $f(x) = 3x^2 + 6$

   h. $f(x) = x^2 + 5x + 6$

2. Tentukan $\lim\limits_{h \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, jika:

   a. $f(x) = 5x^2 - 1$ untuk $x \to 2$
   b. $f(x) = x^3 + x$ untuk $x \to 1$
   c. $f(x) = \frac{1}{x}$ untuk $x \to 3$
   d. $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ untuk x ® -2
   e. $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ untuk $x = 1$

3. Selesaikan soal berikut dengan menggunakan rumus $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, jika diketahui:

   a. $f(x) = 2x + 3$
   b. $f(x) = 5x - 2$
   c. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
   d. $f(x) = 5 - 2x - x^2$
   e. $f(x) = \frac{1}{x+2}$
   f. $f(x) = \frac{2}{x^2+5}$
   g. $f(x) = x^3 - 4$
   h. $f(x) = \frac{2}{x^2}$

Rangkuman

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ (limit kiri) $= \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ (limit kanan) $= L$.
2. Nilai $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ setelah disubstitusikan diperoleh:
   a. $f(a) = h$, berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = h$
   b. $f(a) = \frac{h}{0} = ¥$, berarti $\lim\limits_{x \to a} f(x) = ¥$

c. $f(a) = \frac{0}{h} = 0$, berarti $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$

d. $f(a) = \frac{0}{0}$, maka menyelesaikannya dengan:

1) difaktorkan sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$ atau

2) dikalikan dengan sekawan pembilang atau penyebut sehingga $f(a) \neq \frac{0}{0}$.

3. Teorema Limit

a. $\lim\limits_{x\to a} (mx + b) = ma + b$

b. $\lim\limits_{x\to a} c = c$

c. $\lim\limits_{x\to a} x = a$

d. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ maka:

1) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \times g(x) = L \times M$

3) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{f(g)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$.

e. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ dan n sembarang bilangan positif maka:

$\lim\limits_{x\to a} (f(x)^n) = L^n$

f. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ maka $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

g. Jika $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$ maka $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$

h. Jika $n \in$ bilangan bulat positif maka $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$.

Tugas Perorangan

Tentukan nilai dari limit fungsi berikut.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^4 - 8x^3 + 2x^2}{2x^3 - x^2}$
3. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{2x^3 - 2x}{3x^2 + 4x}$
4. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$

Refleksi

Setelah kalian mempelajari bab ini, manfaat apakah yang kalian rasakan dari materi limit? Buatlah dalam bentuk laporan.

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Nilai $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$ adalah ....

   a. 0
   b. 3
   c. $-\sqrt{3}$
   d. $3 - \sqrt{3}$
   e. $3 + \sqrt{3}$

2. Nilai $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$ adalah ....

   a. –9
   b. –5
   c. $-\dfrac{15}{4}$
   d. $-\dfrac{11}{4}$
   e. 0

3. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(a+x)^2 + (a-x)^2}{bx}$ adalah ....

a. 0
b. $\frac{a}{b}$
c. $\frac{2a}{b}$
d. $\frac{4a}{b}$
e. ∞

4. Nilai $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{2 - \sqrt{4x+6}}$ adalah ....

a. 4
b. 2
c. 0
d. –1
e. –2

5. Nilai $\lim\limits_{x \to 7} \frac{x-7}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$ adalah ....

a. $7\sqrt{7}$
b. $3\sqrt{7}$
c. $2\sqrt{7}$
d. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$
e. $\frac{1}{\sqrt{7}}$

6. Nilai $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ adalah ....

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4

7. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x-7} - \frac{2}{x-11}\right)$ adalah ....

a. $-\frac{1}{32}$
d. $\frac{1}{32}$
b. $-\frac{1}{24}$
e. $\frac{1}{24}$
c. 0

8. Nilai $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3} - x - 1}{1 - x^2}$ adalah ....

a. $-\frac{1}{2}$
d. $\frac{1}{4}$
b. $-\frac{1}{4}$
e. $\frac{1}{2}$
c. 0

9. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$ adalah ....

a. 0
d. $\frac{3}{2}$
b. $\frac{1}{3}$
e. 2
c. $\frac{2}{3}$

10. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{-2x}}$ adalah ....

a. 0
d. 4
b. 1
e. ∞
c. 2

11. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ adalah ....

a. $\frac{1}{6}\sqrt{3}$
d. $\sqrt{3}$
b. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
e. 3
c. 1

12. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 9}$ adalah ....

a. $\frac{1}{3}$
d. 1
b. $\frac{1}{9}$
e. $\frac{1}{2}$
c. 0

13. Nilai $\lim_{x \to a} \frac{x^2 + (3-a)\,x - 3a}{x - a}$ adalah ....

a. a
d. $a + 3$
b. $a + 1$
e. $a + 4$
c. $a + 2$

14. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ adalah ....

a. 0
d. 1
b. $\sqrt{2}$
e. 2
c. 3

15. Jika $f(x) = x^2$, maka $\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ adalah ....

a. ∞
d. 6
b. 0
e. 9
c. 3

16. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$ adalah ....

a. -2
b. -1
c. 0
d. 1
e. 2

17. Nilai $\lim_{x \to 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x^2}$ adalah ....

a. $\frac{1}{2}$
b. 0
c. $\frac{1}{4}$
d. 1
e. 4

18. Nilai $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{3x^2 + 8x - 3} - \sqrt{4x^2 + 9}}{x - 2}$ adalah ....

a. $-\frac{4}{5}$
b. 0
c. $\frac{2}{5}$
d. $\frac{5}{2}$
e. ∞

19. Nilai $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{2x - 2} - 2}{\sqrt{3x} - 3}$ adalah ....

a. 0
b. $\frac{2}{\sqrt{3}}$
c. $\frac{2}{3}$
d. 1
e. $\frac{3}{2}$

20. Nilai $\lim_{x \to 27} \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3}$ adalah ....

a. 9
b. 18
c. 27
d. 36
e. 45

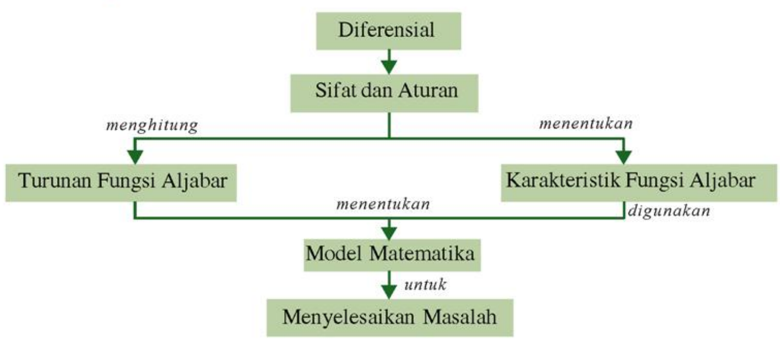
Bab 5

Diferensial

Pernahkah kalian melihat balap mobil atau motor? Kecepatan mobil hampir tidak pernah tetap. Pada awal perlombaan, mobil akan melaju dengan kecepatan yang rendah. Lama kelamaan mobil akan semakin cepat. Namun pada saat tikungan, pembalap akan mengurangi kecepatannya dan akan menaikkan kecepatan lagi pada jalan lurus. Pada saat mengurangi kecepatan, mobil mengalami perlambatan. Sebaliknya, pada saat menaikkan kecepatan, mobil mengalami percepatan. Bagaimana kalian menentukan percepatan atau perlambatan? Kamu dapat mempelajarinya pada bab diferensial.

Setelah mempelajari materi ini diharapkan kalian dapat menggunakan sifat dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi aljabar, menggunakan turunan untuk menentukan karakteristik suatu fungsi, aljabar dan memecahkan masalah, merancang model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar, serta menyelesaikan model matematika dari masalah yang berkaitan dengan ekstrim fungsi aljabar dan penafsirannya.

Peta konsep berikut memudahkan kalian dalam mempelajari seluruh materi pada bab ini.



Dalam bab ini terdapat beberapa **kata kunci** yang perlu kalian ketahui.

1. Limit
2. Diferensial
3. Turunan
4. Karakteristik
5. Ekstrim fungsi

Pada bab sebelumnya kita telah mempelajari materi pokok limit fungsi. Dari pengertian limit tersebut akan dikembangkan untuk mempelajari materi diferensial dengan menggunakan konsep, sifat, dan aturan dalam perhitungan turunan fungsi, diharapkan kita dapat menyelesaikan masalah yang berhubungan dengan turunan.

Sebelum membahas materi diferensial (turunan), kita sebaiknya mengingat kembali bahwa $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$.

A. Pengertian Turunan

Definisi Turunan Fungsi $f(x)$

Andaikan f mempunyai turunan untuk tiap-tiap anggota dari domain D dengan $D \in \boldsymbol{R}$ maka:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ disebut sebagai turunan fungsi $f(x)$.

Contoh 5.1

Carilah turunan fungsi $f(x)$ jika diketahui $f(x) = 4x^3$.

Jawab:

$f(x) = 4x^3$

$f(x+h) = 4(x+h)^3$

$\quad = 4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(4x^3 + 12x^2h + 12xh^2 + 4h^3) - (4x^3)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{12x^2h + 12xh^2 + 4h^3}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(12x^2 + 12xh + 4h^2)h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} 12x^2 + 12xh + 4h^2$$

$f'(x) = 12x^2 + 0 + 0 = 12x^2$

Jadi, $12x^2$ merupakan turunan dari $4x^3$.

Latihan 5.1

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

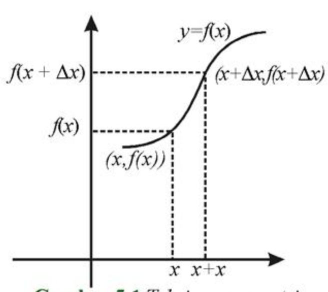
Carilah turunan fungsi-fungsi berikut dengan menggunakan rumus

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

1. $f(x) = 3x + 5$
2. $f(x) = x^2 - 1$
3. $f(x) = \frac{4}{x}$
4. $f(x) = \frac{2}{3x^2}$
5. $f(x) = 4x^{-3}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^3}$
7. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
8. $f(x) = x^2 - 4x$
9. $f(x) = \frac{5}{x^2}$
10. $f(x) = \frac{10}{x^3}$
11. $f(x) = x^3 + 1$
12. $f(x)\ 5x^4 - x$

B. Arti Fisis dan Arti Geometri Turunan di Satu Titik

Definisi Turunan Fungsi $f(x)$



Gambar 5.1 *Taksiran geometri turunan di titik y*

Andaikan f mempunyai turunan untuk tiap-tiap anggota dari domain D dengan $D \in \boldsymbol{R}$ maka:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ disebut sebagai turunan fungsi $f(x)$.

f' adalah turunan dari f dan proses mencari f' disebut menurunkan/mendiferensialkan f.

Perubahan nilai dari x dilambangkan dengan Δx sebagai pengganti h. Perhatikan Gambar 5.1.

Δx adalah perubahan nilai x

Δf adalah tambahan nilai f

Δf adalah $f(x + \Delta x) - f(x)$

Grafik $y = f(x)$ melalui titik $A(x, f(x))$ dan titik $B((x + \Delta x), f(x + \Delta x))$. Selisih absis antara titik A dan titik B adalah $(x + \Delta x) - x = \Delta x$.

Setiap perubahan absis dari suatu titik akan mempengaruhi perubahan nilai dari fungsi tersebut. Misal absis titik C adalah $(x + 2\Delta x)$ maka nilai fungsinya adalah $f(x + 2\Delta x)$.

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Karena h diganti Δx maka diperoleh $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Jadi, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{df}{dx}$.

Notasi ini diperkenalkan oleh Leibniz.

C. Laju Perubahan Nilai Fungsi terhadap Variabel Bebasnya

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ sehingga jika $x \to a$ diperoleh $x - a = h$, $x = a + h$.

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ karena $x = a + h$ dan $h \to 0$ maka $x = a$ sehingga diperoleh $x \to a$.

$$f'(a) = \lim_{x-a \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{x-a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

Sehingga laju perubahan nilai fungsi terhadap $x = a$ adalah $f'(a)$, yaitu:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

atau

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Contoh 5.2

1. Diketahui $f(x) = 5x^2$, tentukan nilai $f'(2)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{5x^2 - 5(2)^2}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{5(x^2 - 4)}{(x - 2)} \\ &= \lim_{x \to 2} \frac{5(x-2)(x+2)}{(x-2)} \\ &= \lim_{x \to 2} 5(x+2) \\ &= 5(2+2) \\ &= 20 \end{aligned}$$

Dimensi Matematika

Meningkatkan Sikap Kritis Siswa

Apakah perbedaan turunan dengan Deferensial? Jelaskan dengan kata-kata kalian sendiri, kemudian susun dalam bentuk laporan.

2. Diketahui $f(x) = \frac{1}{x}$, tentukan $f'(5)$.

Jawab:

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x \to 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \to 5} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{5}}{x - 5} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{\frac{5-x}{5x}}{x-5}$$

$$= \lim_{x \to 5} \left(\frac{5-x}{5x}\right)\left(\frac{1}{-(5-x)}\right)$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{-5x}$$

$$= -\frac{1}{25}$$

3. Jumlah penduduk suatu daerah pada saat tertentu (per bulan) memenuhi persamaan $f(t) = t^2 + 3t$; $t \geq 0$. Hitung laju pertambahan penduduk saat $t = 2$.

   Jawab:

$$f(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left\{(2+h)^2 - 3(2+h)\right\} - (2^2 + 3(2))}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4 + 4h + h^2 + 6 + 3h - 10}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 7h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 7)$$

$$= 7$$

   Jadi laju pertambahan penduduk pada saat $t = 2$ adalah 7 orang per bulan.

Latihan 5.2

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Carilah turunan fungsi-fungsi berikut dengan menggunakan rumus

   $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

   a. $f(x) = 3x + 5$
   d. $f(x) = 4x^{-3}$
   b. $f(x) = x^2 - 1$
   e. $f(x) = 5x^4 - x$
   c. $f(x) = x^2 - 4x$
2. a. Jika $f(x) = 2x^3 + 1$, tentukan $f'(1)$.

   b. Jika $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3$, tentukan $f'(2)$.

   c. Jika $f(x) = \sqrt{x}$, tentukan $f'(4)$.

   d. Jika $f(x) = x^2 - 4$, tentukan $f'(-1)$.

   e. Jika $f(x) = 5x - 7$, tentukan $f'(0)$.
3. Berat (dalam kilogram) sebuah durian pada saat t dalam minggu dinyatakan dengan $B(t) = 0{,}3t^2 - 0{,}08t$ tentukan laju pertumbuhan buah tersebut jika $t = 12$.
4. Devi menjual mangga di pasar. Jika dia menjual x kg dalam 1 hari, maka keuntungan yang diperoleh Devi sebesar $500x^2 - 200x$ (dalam rupiah) tentukan laju keuntungan jika yang terjual adalah 10 kg.
5. Andaikan sebuah benda bergerak sepanjang sebuah garis sehingga jarak dari titik asal setelah t detik dinyatakan dengan $(t^2 + 2t)$ meter. Tentukan laju pergerakan benda tersebut pada saat $t = 3$ dan $t = 5$.
6. Sebuah kota dijangkit epidemi TBC, seorang petugas kesehatan menaksir bahwa banyaknya orang yang menderita TBC setelah t bulan sejak mulainya epidemi dinyatakan oleh $V(t) = 50t + 25$ untuk $0 \leq t \leq 30$. Tentukan laju penularan TBC tersebut pada saat $t = 1$ bulan; 5 bulan.

D. Turunan Fungsi Aljabar

1. Menentukan Turunan Fungsi $f(x) = ax^n$

Contoh 5.3

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x) = c$, c = konstanta
c. $f(x) = x^2$
b. $f(x) = x$
d. $f(x) = x^3$

Jawab:

a. $f(x) = c$

$f(x + h) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$

$$= 0$$

Jadi, turunan fungsi konstanta adalah nol.

b. $f(x) = x$

$f(x + h) = x + h$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - (x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

Jadi, turunan fungsi identitas $f(x) = x$ adalah 1.

c. $f(x) = x^2$

$f(x + h) = (x + h)^2 = x^2 + 2xh + h^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2 + 2xh + h^2) - (x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h)}{h}$$

$$= 2x$$

d. $f(x) = x^3$

$f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h}$$

$$= 3x^2$$

Dari jawaban-jawaban tersebut diperoleh berikut ini.

$f(x)$	x	x^2	x^3	...	x^n
$f'(x)$	1	$2x$	$3x^2$	...	nx^{n-1}

sehingga diperoleh bahwa:

Jika $f(x) = x^n$ maka $f'(x) = nx^{n-1}$, dengan $n \in$ {bilangan asli}.

Jika $f(x) = ax^n$ maka $f'(x) = anx^{n-1}$, dengan $n \in$ {bilangan asli}.

Contoh 5.4

Tentukan turunan dari fungsi berikut.

a. $f(x) = x^6$

b. $f(x) = 4x^8$

Jawab:

Fungsi turunan $f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

a. $f(x) = x^6$ maka $f'(x) = 6x^5$

b. $f(x) = 4x^8$ maka $f'(x) = 4 \cdot 8x^7 = 32x^7$

2. Menentukan Turunan $f(x) = ax^n$, untuk n Bilangan Rasional

Contoh 5.5

Tentukan turunan dari fungsi berikut.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

b. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

Jawab:

a. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x-(x+h)}{h(x+h)x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h(x+h)x}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x^2+hx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

Jadi, jika $f(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$ maka $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$.

b. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

$f(x+h) = (x+h)^{\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}\right)\left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-(x)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{h}\right)} \times \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Jadi, jika $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ maka $f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.

Dari dua contoh tersebut dapat disimpulkan bahwa:

> Jika $f(x) = ax^n$ maka $f'(x) = anx^{n-1}$ berlaku juga untuk $n \in$ bilangan rasional.

Contoh 5.6

Tentukan turunan fungsi berikut.

a. $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}}$

b. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Jawab:

a. $f(x) = 3x^{\frac{5}{3}}$

$f'(x) = 3\left(\frac{5}{3}\right)x^{\frac{2}{3}} = 5x^{\frac{2}{3}} = 5\sqrt[3]{x^2}$

b. $f(x) = \sqrt{x} + = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

Contoh 5.7

Sebuah perusahaan sepatu untuk memproduksi x unit barang pada tahun 2008 menaksir biaya produksi sebesar $C(x) = \frac{1}{3}x^2 + 5x + 90$ ribu rupiah. tentukan biaya marginal dari biaya produksinya.

Jawab:

Biaya marjinal = $\Delta C = C(x + h) - C(x)$ dengan $h = 1$ sehingga

$$C'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$$

$$C'(x) = \frac{d\left(\frac{1}{3}x^2 + 5x + 90\right)}{dx}$$

$$= \frac{2}{3}x + 5$$

Jadi biaya marjinalnya adalah $C'(x) = \frac{2}{3}x + 5$

Latihan 5.3

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Carilah turunan dari fungsi berikut.

   a. x^9

   b. ax^4

   c. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$

   d. $(x + 2)^2$

   e. $(2x - 1)(3x + 2)$

   f. $x^{\frac{5}{2}}$

   g. $\frac{1}{2}x^{-5}$

   h. $\sqrt{x^3}$

   i. $x\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$

   j. $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$

   k. $\frac{x+2}{3x^{\frac{1}{3}}}$

   l. $\frac{(1-x)(3-x)}{\sqrt{x}}$

2. Diketahui $f(x) = 4 + 2x - x^2 + \frac{1}{3}x^3$. Carilah nilai dari $f'(0), f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(-1)$, dan $f'(1)$.

   Petunjuk:

   Carilah $f'(x)$ terlebih dahulu kemudian $f'(0)$, dan seterusnya.

3. Diketahui $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. Carilah nilai dari $f'(1)$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, dan $f'(2)$.

4. Diketahui $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 5$. Carilah nilai x bila:

   a. $f'(x) = 0$ b. $f'(x) > 0$ c. $f'(x) < 0$

5. Carilah $f'(x)$ untuk fungsi berikut.

   a. $f(x) = (x + 1 - \frac{1}{x})\ (x + 1 + \frac{1}{x})$

   b. $f(x) = x\sqrt{x}\ (x + \frac{1}{x})\ (x - \frac{1}{x})$

   c. $f(x) = \left(\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

   d. $f(x) = (x + \frac{1}{x})^3$

   e. $f(x) = (x^2 + \frac{1}{2x})^2$

6. Untuk memproduksi batik jenis tulis suatu perusahaan menaksir biaya produksinya: $B(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 5$ ribu rupiah. Tentukan biaya marjinal dari biaya produksinya.
7. Pertambangan penduduk suatu daerah terpencil dirumuskan dengan $P(t) = t^2 + 2t + 3$ (perminggu). Tentukan laju pertambahan penduduk kota tersebut.

3. Rumus Turunan Fungsi

Apabila u dan v adalah fungsi dalam x, n bilangan rasional, dan c konstanta, maka bentuk turunan fungsi adalah sebagai berikut.

a. $y = u \pm v$

b. $y = cu$

c. $y = uv$

d. $y = \frac{u}{v}$

e. $y = u^n$

Dengan menggunakan rumus turunan, yaitu:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ maka didapat rumus sebagai berikut.

a. Jika $y = u + v$ maka $y' = u' + v'$.

Bukti

$y = u + v$, misal $u = g(x)$ dan $v = f(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(g(x+h) + f(x+h)) - (g(x) + f(x))}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(g(x+h) - g(x)) + (f(x+h) - f(x))}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$y' = u' + v'$$

Demikian pula untuk $y = u - v$ maka $y' = u' - v'$.

b. Jika $y = c\,u$, c = konstanta maka $y' = c\,u'$.

Bukti

$y = c\,u$, c = konstanta.
Misal: $u = g(x)$ sehingga $y = cg(x)$.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{cg(x+h) - cg(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{c(g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$y' = c \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$y' = c\,g'(x)$$

$$y' = c\,u'$$

c. Jika $y = uv$ maka $y' = u'v + uv'$.

Bukti

$y = uv$, misal $u = g(x)$ dan $v = t(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)t(x+h) - g(x)t(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)t(x+h) - g(x)t(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)t(x+h) - g(x)t(x) + g(x+h)t(x) - g(x+h)t(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)t(x+h) - t(x) - g(x)t(x)}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)(t(x+h) - t(x)) + t(x)(g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$y' = \lim_{h\to 0} g(x+h) \lim_{h\to 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h} +$$

$$\lim_{h\to 0} t(x) \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$y' = g(x)t'(x) + t(x)g'(x)$
$y' = uv' + vu'$
$y' = u'v + uv'$

d. Jika $y = \frac{u}{v}$ maka $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Bukti

$y = \frac{u}{v}$, misal $u = g(x)$ dan $v = t(x)$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Leftrightarrow y' = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{g(x+h)}{t(x+h)} - \frac{g(x)}{t(x)}}{h}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)t(x) - t(x+h)g(x)}{ht(x+h)t(x)}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)t(x) - t(x+h)g(x) + (g(x)t(x) - g(x)t(x))}{ht(x+h)t(x)}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{(g(x+h)t(x) - g(x)t(x)) - (t(x+h)g(x) - g(x) \cdot t(x))}{ht(x+h)t(x)}$$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{t(x)(g(x+h) - g(x)) - g(x)(t(x+h) - t(x))}{ht(x+h)t(x)}$$

$$y' = \frac{\lim\limits_{h \to 0} t(x) \lim\limits_{h \to 0} g(x+h) - g(x) - \lim\limits_{h \to 0} g(x) \lim\limits_{h \to 0} t(x+h) - t(x)}{ht(x+h)t(x)}$$

$$y' = \frac{\lim\limits_{h \to 0} t(x) \lim\limits_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} - \lim\limits_{h \to 0} g(x) \lim\limits_{h \to 0} \frac{t(x+h) - t(x)}{h}}{\lim\limits_{h \to 0} t(x+h) \lim\limits_{h \to 0} t(x)}$$

$$y' = \frac{t(x)g'(x) - g(x)t'(x)}{f(x)f(x)}$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Contoh 5.8

Tentukan turunan dari:

a. $y = (x^3 + 2x)\,(x^{\frac{1}{2}})$

b. $y = \dfrac{x^2 - 2}{x + 2}$

Jawab:

a. Misalkan $u = x^3 + 2x$ maka $u' = 3x^2 + 2$

$v = x^{\frac{1}{2}}$ maka $v' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = u'v + uv'$

$y' = (3x^2 + 2)\,x^{\frac{1}{2}} + (x^3 + 2x)\,(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$

$y' = 3x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} + x^{\frac{1}{2}}$

$y' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}$

b. Misalkan $u = x^2 - 2$ maka $u' = 2x$

$v = x + 2$ maka $v' = 1$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$y' = \frac{2x(x+2) - (x^2 - 2)\,1}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 4x - x^2 + 2}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2 + 4x + 4}$$

Latihan 5.4

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan turunan fungsi berikut, kemudian sederhanakan.

   a. $f(x) = (x^2 + 2x) + (\frac{1}{4}x^2 - 5x)$

   b. $f(x) = (\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x) - (\frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + 2x)$

   c. $f(x) = (\frac{1}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3) - (\frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3)$

   d. $f(x) = (2x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}) - (4x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}})$

   e. $f(x) = (x^2\sqrt{x} + \sqrt{x}) - (4x^2\sqrt{x} - 3\sqrt{x})$

2. Carilah turunan dari fungsi berikut dengan menggunakan rumus turunan hasil kali dua fungsi.

   a. $f(x) = (2x - 1)(x + 2)$

   b. $f(x) = (4x - 5)(3 - 2x)$

   c. $f(x) = (x^2 - 2x)(2x^2 + 3x)$

   d. $f(x) = (x - 2x^2)(x^2 - 4x)$

   e. $f(x) = (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})$

3. Carilah turunan dari fungsi berikut ini dengan menggunakan rumus turunan hasil bagi dua fungsi.

   a. $f(x) = \dfrac{2}{3x^2 - 1}$

   b. $f(x) = \dfrac{(2x - 1)}{(3x - 2)}$

   c. $f(x) = \dfrac{5}{6x^2 - 4x + 2}$

   d. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 6}$

   e. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4x - 2}$

E. Turunan Fungsi Komposisi dengan Aturan Rantai

Dalil Rantai untuk Turunan

Sebaiknya kita ingat kembali pada pokok bahasan fungsi majemuk sebelum membahas dalil rantai.

Contoh 5.9

Jika $F(x) = (x^2 + x)^{\frac{1}{2}}$, tulislah F sebagai fungsi majemuk dua fungsi f dan g.

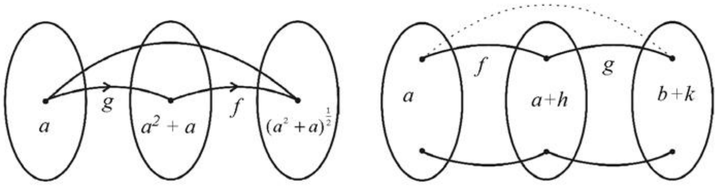
Jawab:

Dari gambar di samping tampak bahwa

$g : a \rightarrow a^2 + a$

$f : a^2 + a \rightarrow (a^2 + a)^{\frac{1}{2}}$

Jadi, $F = f \circ g$ atau $F(x) = f(g(x))$ dengan $g(x) = x^2 + x$ dan $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$.



Gambar 5.2 *Pendiferensialan fungsi komposisi fog*

Turunan $y = u^n$ dengan $u = f(x)$ dapat dicari menggunakan langkah-langkah sebagai berikut.

Menurut definisi: $F'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h}$, sedangkan dari Gambar 5.2 diperoleh bahwa:

$$F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(b+h)-F(b)}{h}$$

$$\Leftrightarrow F'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{F(b+k)-F(b)}{k} \times \frac{k}{h}$$

Karena $g(a + h) = b + k = g(a) + k$, maka $k = g(a + h) - g(a)$.

Sehingga: $F'(a) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{F(b+k)-F(b)}{k} \times \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$

$$\Leftrightarrow F'(a) = \lim_{k\to 0} \frac{F(b+k)-F(b)}{k} \times \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$$

$$\Leftrightarrow F'(a) = f'(b)\, g'(a)$$

Jika $F = f \circ g$ sedemikian hingga $F(x) = f(g(x))$, dengan f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai turunan maka turunan dari F adalah $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

Dalam notasi Leibniz $\frac{d(f(x))}{dx} = f'(x)$

apabila $y = F(x) = f(g(x)) = f(u)$

dengan $u = g(x)$, maka:

$F'(x) = \frac{dy}{dx}$, $f'(u) = \frac{dy}{du}$, dan $g'(x) = \frac{du}{dx}$ sehingga diperoleh dalil rantai sebagai berikut.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

Jika $y = u^n$ dengan $u = f(x)$ maka $y' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ dengan

$\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{dy}{du} = nu^{n-1}$, dan $u' = \frac{du}{dx}$.

Dalil rantai di atas dapat diperluas menjadi rumus berikut.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$$

Jika y adalah fungsi dari u yang didefinisikan sebagai $y = f(u)$ dan $\frac{dy}{du}$ ada, u adalah fungsi dari v dan $\frac{du}{dv}$ ada, dan v adalah fungsi dari x dan $\frac{dv}{dx}$ ada, maka y adalah fungsi dari x.

Jika $\frac{dy}{dx}$ ada, maka terdapat hubungan seperti berikut.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}$;demikian pula jika diteruskan akan terdapat hubungan $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dw}\frac{dw}{dx}$; dan seterusnya.

Jika $y = u^n$ maka $y' = nu^{n-1}u'$, dengan $u = f(x)$.

Contoh 5.10

1. Tentukan turunan dari $y = (x^2 + x)^5$.

   Jawab:

   Misalkan $u = x^2 + x$ maka $\frac{du}{dx} = 2x + 1$

   $y = u^5$ maka $\frac{dy}{du} = 5u^4$

   $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$

   $\frac{dy}{dx} = 5u^4(2x + 1)$

   $\frac{dy}{dx} = 5(x^2 + x)^4 (2x + 1) = (10x + 5)(x^2 + x)^4$

   atau $y = (x^2 + x)^5$

   Misalkan $u = (x^2 + x)$ maka $u' = 2x + 1$

   $y' = n\,u^{n-1}u'$

   $y' = 5(x^2 + x)^4(2x + 1)$

   $= (10x + 5)(x^2 + x)^4$

2. Tentukan turunan dari $f(x) = (3 - 2x)^4$ kemudian tentukan nilai $f'(0)$

   Jawab:

   Misalkan $u = 3 - 2x$ maka $u' = -2$

   $f'(x) = 4u^3\,u'$

   $f'(x) = 4(3 - 2x)^3(-2)$

   $f'(x) = -8(3 - 2x)^3$

   $f'(0) = -216$

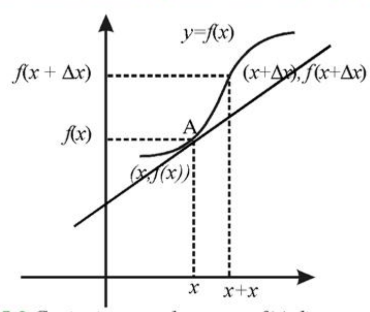
Latihan 5.5

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Carilah turunan dari fungsi berikut ini dengan menggunakan dalil rantai untuk turunan.
   a. $y = (x + 4x^2)^3$
   b. $y = (3x^3 - 4)^5$
   c. $y = (x^2 - 3x)^4$
   d. $y = \dfrac{1}{(2x^2 - 2x + 5)^7}$
   e. $y = (x^3 + x)^{\frac{7}{3}}$
   f. $y = (3x^2 - 2x + 1)^6$
   g. $y = (x^2 - 4x + 1)^7$
   h. $y = (4x - 2x^2)^{-8}$
   i. $y^3 = (4x^2 + 1)^2$
   j. $3y^5 = (4 - 3x^2)^4$
2. Carilah nilai untuk fungsi berikut.
   a. $f(x) = (x^2 + 1)^3$. Tentukan $f'(-1)$, $f'(0)$, dan $f'(1)$.
   b. $f(x) = (2x + 1)^4(2x - 1)^3$. Tentukan $f'(0)$ dan $f'(1)$.
   c. $f(x) = \dfrac{(2x+1)^5}{(2x-1)^4}$. Tentukan $f'(0)$ dan $f'(1)$.
   d. $2(f(x))^2 = (2x - 1)^3$. Tentukan $f'(1)$ dan $f'(2)$.
   e. $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x}$. Jika $f'(x) = 0$, tentukan nilai x yang memenuhi.

F. Persamaan Garis Singgung pada suatu Kurva

1. Gradien Garis Singgung pada Kurva $y = f(x)$ di $x = a$



Gambar 5.3 *Garis singgung kurva y = f(x) di x = a*

Koordinat titik A pada Gambar 5.3 adalah $(x, \; f(x))$, koordinat titik B adalah $B(x + h, \; f(x + h))$; $DE = f(x + h) - f(x)$, dan $FG = h$.

$\tan \angle CAB = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{DE}{FG} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ adalah gradien tali busur AB.

Jika titik $B(x + h, \; f(x + h))$ mendekati titik $A(x, \; f(x))$ maka $h \to 0$ dan sudut CAB mendekati sudut α.

Jadi, $\tan \angle CAB = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ menjadi

$$\tan \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Jika $x = a$ maka $\tan \alpha = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ adalah gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $x = a$.
Pada pokok bahasan sebelumnya telah dijelaskan bahwa $f'(x) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
Jadi, dapat disimpulkan bahwa:

$m = f'(a) = \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ adalah gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $x = a$.

Contoh 5.11

Tentukan gradien dari kurva berikut ini.
a. $y = x^2 - 4x + 1$ di titik $(3, -2)$.
b. $y = \sqrt{x}$ di absis $x = 4$.

Jawab:
a. $y = x^2 - 4x + 1$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

di absis $x = 3$ berarti $m = 2 \cdot 3 - 4 = 2$.

b. $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

pada $x = 4$ berarti $m = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$.

2. Menentukan Persamaan Garis Singgung pada Kurva

a. Persamaan Garis Singgung di Suatu Titik pada Kurva

Sebelumnya telah diterangkan bahwa gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $x = a$ adalah $f'(a) = m$. Jika kurva tersebut melalui titik (a, b) dengan gradien m maka persamaan garis singgungnya adalah

$$y - b = m\,(x - a)$$

Contoh 5.12

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 3x + 3$ di titik (2, 1).

Jawab:

$y = x^2 - 3x + 3$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 3$; jika di titik yang absisnya $x = 2$ berarti $m = 2 \times 2 - 3 = 1$.

Persamaan garis singgungnya: $y - b = m(x - a)$.

Di titik (2, 1) maka $y - 1 = 1(x - 2)$

$\Leftrightarrow y = x - 1$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $y = x - 1$.

Contoh 5.13

Tentukan persamaan garis singgung kurva $2y = x^2 - 6x$ di $x = 2$.

Jawab:

$2y = x^2 - 6x$

$\Leftrightarrow \quad 2y = 2^2 - 6 \times 2$

$\Leftrightarrow \quad y = -4$

Sehingga titik singgungnya (2, – 4).

$$2y = x^2 - 6x$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x^2 - 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = x - 3; \text{ jika } x = 2 \text{ berarti } m = 2 - 3 = -1.$$

Persamaan garis singgungnya: $y - b = m(x - a)$

$\Leftrightarrow \quad y + 4 = -1(x - 2)$

$\Leftrightarrow x + y + 2 = 0$

Jadi, persamaan garis singgungnya adalah $x + y + 2 = 0$.

b. Persamaan Garis Singgung Jika Gradiennya Diketahui

Contoh 5.14

Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = \dfrac{1}{x}$ yang tegak lurus dengan garis $y = 4x + 2$.

Jawab:

$y = 4x + 2$, sehingga $m = 4$

Gradien garis singgungnya $-\frac{1}{4}$ (karena tegak lurus maka $m_1 m_2 = -1$).

$$y = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -x^{-2}$$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

$$m_2 = \frac{dy}{dx}$$

$$-\frac{1}{4} = -\frac{1}{x^2}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Apabila $x = 2$ maka $y = \frac{1}{2}$, sehingga titik singgungnya $(2, \frac{1}{2})$.

Persamaan garis singgungnya:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\ (x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{4}x + 1$$

Apabila $x = -2$ maka $y = -\frac{1}{2}$, sehingga titik singgungnya $(-2, -\frac{1}{2})$.

Persamaan garis singgungnya: $y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x + 2)$

$$\Leftrightarrow y = \tfrac{1}{4}x - \frac{5}{2}$$

Contoh 5.15

Carilah titik singgung pada kurva $y = 2\sqrt[3]{x}$ jika garis singgung tersebut sejajar garis $6y = x + 4$, kemudian tentukan persamaan garis singgungnya.

Jawab:

$$6y = x + 4$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{6}x + \frac{4}{6} \text{ maka } m = \frac{1}{6}$$

Gradien garis singgungnya adalah $\frac{1}{6}$ ($m_1 = m_2$ karena garis singgung tersebut sejajar dengan kurva).

$$y = 2\sqrt[3]{x} = 2x^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$m = \frac{dy}{dx}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{6} = \frac{2}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^{\frac{2}{3}} = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{\frac{2}{3}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 4^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 8$$

Jika nilai $x = 8$ maka $y = 2\sqrt[3]{8} = 4$

Jadi, titik singgungnya (8, 4).

Persamaan garis singgungnya: $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$\Leftrightarrow \quad y - 4 = \frac{1}{6}(x - 8)$$

$$\Leftrightarrow \quad 6y - 24 = x - 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 6y = x + 16$$

Latihan 5.6

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan gradien pada setiap kurva berikut ini pada titik yang diberikan.
   a. $y = 4x$ di titik (1, 4)
   b. $y = x^2$ di titik (3, 9)
   c. $y = \frac{1}{x}$ di titik (–1, –1)
   d. $y = \sqrt{x}$ di titik (9, 3)
   e. $y = \sqrt[4]{x}$ di titik (16, 2)
2. Tentukan gradien pada kurva berikut.
   a. $y = x^2 - 2x + 1$ di $x = 1$
   b. $y = 1 - 3x - x^2$ di $x = 0$
   c. $y = (2x - 1)(x + 2)$ di $x = 2$
   d. $y = (2 - x)(1 + x)$ di $x = 1$
   e. $y = x^3$ pada $y = 8$
   f. $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ di $x = 2$
   g. $y = x^4$ di ordinat 16
   h. $y = x^4 - 2x^2 + 1$ di absis 2
   i. $y = x + \frac{1}{x}$ di absis $\frac{1}{2}$
   j. $y = 10x^{\frac{1}{2}}$ di absis 25

3. Tentukan persamaan garis singgung dari kurva berikut.

   a. $y = x^4 + \dfrac{1}{x}$ di titik dengan $x = 1$.

   b. $y = (x - 2)\sqrt{x}$ di titik dengan $x = 4$.

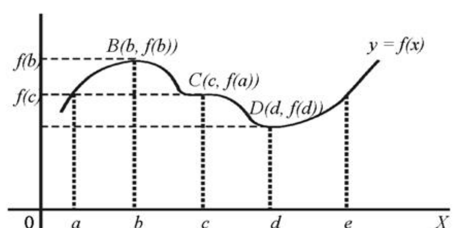
   c. $y = x^2 + 4$ yang gradiennya 16.

   d. $y = x^2$ di titik $x = 2$ dan $x = -2$.

4. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 4$ di titik potong dengan sumbu X.
5. Tentukan persamaan garis singgung yang sejajar dengan garis $y = 5x + 6$ dan menyinggung kurva $y = x^3 - 3x^2 - 19x + 7$.
6. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $4y = x^2$ di titik dengan absis 2. Jika garis singgung tersebut memotong sumbu X di A dan sumbu Y di B, tentukan koordinat titik A dan B.
7. Garis singgung parabola $y = x^2 - 4x + 4$ di titik dengan absis 4, memotong sumbu X di P dan sumbu Y di Q. Tentukan panjang PQ.
8. Tentukan titik pada kurva $y = x^2(x - 3)$ sehingga garis singgung di kurva tersebut sejajar dengan garis $9x - y + 1 = 0$. Kemudian, tentukan persamaan garis singgung tersebut.
9. Tentukan titik pada kurva $y = (x - 2)^2$ sehingga garis singgung kurva itu membentuk sudut 45° dengan OX.
10. Tentukan titik pada kurva $y = x^2 + \dfrac{4}{x}$ sehingga garis singgung kurva di titik itu tegak lurus dengan sumbu Y.

G. Interval Fungsi Naik atau Turun

1. Pengertian Fungsi Naik atau Fungsi Turun



Gambar 5.4 *Kurva y = f(x) pada interval a < x <b*

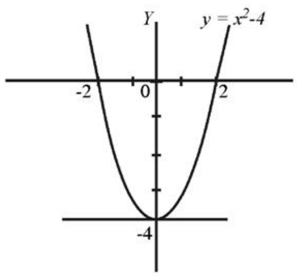
Gambar 5.4 menunjukkan bahwa pada interval $a < x < b$ dan $d < x < e$ grafik fungsi tersebut adalah naik dan pada interval $b < x < c$ dan $c < x < d$ grafik fungsi tersebut adalah turun.

Titik $B(b, f(b))$ disebut titik balik maksimum atau titik ekstrim maksimum.

Titik $D(d, f(d))$ disebut titik balik minimum atau titik ekstrim minimum.

Titik $C(c, f(c))$ disebut titik belok horizontal.

2. Menentukan Interval Fungsi Naik atau Fungsi Turun



Gambar 5.5 Grafik $f(x) = x^2 - 4$

Gambar 5.5 menunjukkan grafik fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 4$ sehingga $f'(x) = 2x$.

a. Jika $x < 0$ maka $f'(x) < 0$ dan dikatakan f turun untuk $x < 0$. Karena $f(x) < 0$ maka gradien garis singgung di setiap titik tersebut selalu negatif.

b. Jika $x > 0$ maka $f'(x) > 0$ dan dikatakan f naik untuk $x > 0$. Karena $f'(x) > 0$ maka gradien garis singgung di setiap titik tersebut selalu positif.

c. Jika $x = 0$ maka $f'(x) = 0$ dan garis singgung di titik $(0, -4)$ sejajar sumbu X. Jadi, *f tidak naik* juga *f tidak turun* dan dikatakan f mempunyai nilai *stasioner* $f(0) = -4$.

Jadi, secara umum untuk menentukan interval jika fungsi f naik atau turun adalah sebagai berikut.

a. Jika $f'(x) > 0$ maka fungsi f naik.

b. Jika $f'(x) < 0$ maka fungsi f turun.

Contoh 5.16

Tentukan interval fungsi f yang ditentukan oleh $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 4$, jika:

a. fungsi naik, dan

b. fungsi turun.

Jawab:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 4$

$f'(x) = x^2 + 8x$

a. Fungsi naik jika $f'(x) > 0$.

$\Leftrightarrow x^2 + 8x > 0$

$\Leftrightarrow x(x + 8) > 0$

$\Leftrightarrow x < -8$ atau $x > 0$

b. Fungsi turun jika $f'(x) < 0$.

$\Leftrightarrow x^2 + 8x < 0$

$\Leftrightarrow x(x + 8) < 0$

$\Leftrightarrow -8 < x < 0$

Contoh 5.17

Untuk memproduksi x tas jenis tertentu perusahaan menaksir biaya sebesar $B(t) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 5$ (dalam ribuan rupiah). Tentukan biaya marjinalnya. Apakah biaya marjinalnya naik atau turun seiring degan penambahan produksi barang?

Jawab:

Misal biaya marjinal $B'(t)=M(x)$

Biaya marjinal = $x^2 + 6x + 8$

Jadi biaya marjinal $M(x) = x^2 + 6x + 8$. Untuk mementukan apakah biaya marjinalnya naik atau turun seiring dengan penambahan barang, maka perhatikan.

$M(x) \quad = x^2 + 6x + 8$

$M'(x) \quad = 2x + 6$

Karena $x > 0$ maka $M'(x)$ akan selalu lebih besar dari 0 sehingga biaya marjinalnya akan naik seiring dengan penambahan produksi barangnya.

Latihan 5.7

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Tentukan interval fungsi berikut pada saat fungsi naik dan jika fungsi turun.

a.	$f(x) = -x^2$	g.	$f(x) = x^3 - 9x^2 + 7$
b.	$f(x) = x^2$	h.	$f(x) = 6x - x^3$
c.	$f(x) = x^2 - 4x + 3$	i.	$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
d.	$f(x) = x - 2x^2$	j.	$f(x) = x(x-1)^2$
e.	$f(x) = 6 - 2x - 3x^2$	k.	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - 4x$
f.	$f(x) = x^3$	l.	$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 13$

2. Tunjukkan untuk setiap $x \in \boldsymbol{R}$, fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ tidak pernah turun.
3. Tunjukkan bahwa $f : x \to 1 - \frac{1}{3}x^3$ tidak pernah naik untuk setiap x.
4. Tunjukkan bahwa $f(x) = x^5 + 40x - 6$ adalah fungsi naik untuk setiap nilai x.
5. Tunjukkan bahwa $f(x) = -\left(\frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{3}x^3 + 4\right)$ adalah fungsi turun untuk setiap nilai x.
6. Misalkan biaya produksi dari x unit sepatu dinyatakan dengan: $C(x) = 2x^4 + \frac{3}{2}x^3 - 10x^2 + 10x + 500$. Tentukan biaya marjinalnya. Apakah biaya marjinalnya akan naik atau turun sesuai dengan perubahan produksi sepatu?
7. Misalkan biaya produksi dari x unit barang dinyatakan dengan $B(x) = 4x + x^3 - 2x^2$. Kapankah biaya marjinalnya merupakan fungsi naik?

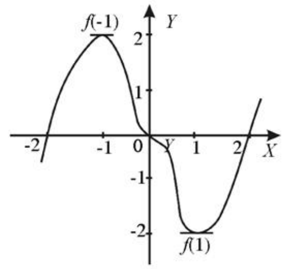
H. Titik Stasioner suatu Fungsi dan Jenis Ekstrimnya

Jika $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ maka diperoleh turunan pertama fungsi $f(x)$ adalah $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x + 1)(x - 1)$ yang grafiknya dapat dilihat pada Gambar 5.6.

Titik A, O, dan B diperoleh jika $f'(x) = 0$. Titik-titik tersebut dinamakan titik stasioner dan garis singgung pada titik tersebut sejajar dengan sumbu X. Jadi, pada titik tersebut fungsi f tidak naik dan tidak turun, serta mempunyai nilai stasioner $f(-1)$, $f(0)$, dan $f(1)$.

Nilai stasioner dari Gambar 5.6 diperoleh sebagai berikut .

1. Nilai stasioner pada A (untuk setiap titik di sekitar $x = -1$).
   Jika $x < -1$ maka $f'(x) > 0$.
   Jika $x = -1$ maka $f'(x) = 0$.
   Jika $x > -1$ maka $f'(x) < 0$.
   Dikatakan bahwa f mempunyai nilai balik maksimum $f(-1) = 2$ di $x = -1$.

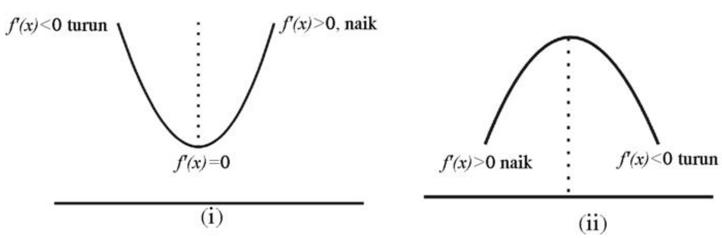


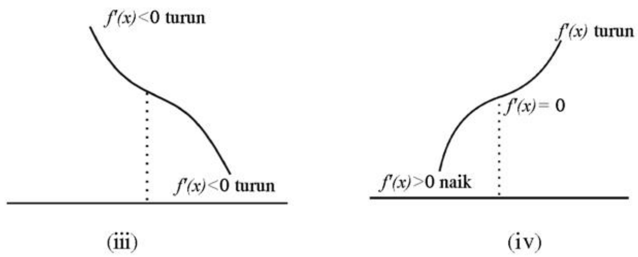
Gambar 5.6 *Kurva* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

2. Nilai stasioner pada B (untuk setiap titik di sekitar $x = 1$).
   Jika $x < 1$ maka $f'(x) < 0$.
   Jika $x = 1$ maka $f'(x) = 0$.
   Jika $x > 1$ maka $f'(x) > 0$.
   Dikatakan bahwa f mempunyai nilai balik minimum $f(1) = -2$ di $x = 1$.
3. Nilai stasioner pada O (untuk setiap titik di sekitar $x = 0$).
   Jika $x < 0$ maka $f'(x) < 0$.
   Jika $x = 0$ maka $f'(x) = 0$.
   Jika $x > 0$ maka $f'(x) > 0$.
   Dikatakan bahwa grafik mempunyai titik belok horizontal di O.

Jadi, jika $f'(a) = 0$ maka $f(a)$ adalah nilai stasioner pada $x = a$. Nilai stasioner mungkin nilai balik maksimum, nilai balik minimum, maupun titik belok horizontal pada grafik f. Secara umum, misalkan $x = a$ mempunyai nilai stasioner $f(a)$ dari suatu fungsi f. Jika $f'(x)$ ada untuk setiap titik di sekitar $x = a$ interval kecil pada sumbu X yang memuat a maka di sekitar $x = a$ terdapat 4 kemungkinan untuk grafik f.

Perhatikan Gambar 5.7 berikut.





Gambar 5.7 *Kemungkinan grafik f(x) dengan nilai stasioner pada x = 4*

(i)

x	a^-	a	a^+
$f'(x)$	–	0	+

$f(a)$ merupakan nilai balik minimum dari f.

(ii)

x	a^-	a	a^+
$f'(x)$	+	0	–

$f(a)$ merupakan nilai balik maksimum dari f.

(iii)

x	a^-	a	a^+
$f'(x)$	–	0	–

(iv)

x	a^-	a	a^+
$f'(x)$	+	0	+

Gambar 5.7 (iii) dan (iv) menunjukkan bahwa titik $(a, f(a))$ merupakan titik belok grafik fungsi f.

Keterangan: a^- (dibaca kurang sedikit dari a)
a^+ (dibaca lebih sedikit dari a)

Contoh 5.18

Tentukan titik stasioner dari fungsi $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$.

Jawab:

$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$ maka $y' = x^3 - x$

Titik stasioner diperoleh jika $y' = 0$.

$\Leftrightarrow \quad x^3 - x = 0$

$\Leftrightarrow \quad x(x^2 - 1) = 0$

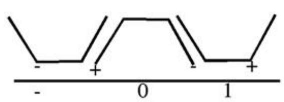
$\Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0; x = 1; x = -1$

Jika $x = 0$ maka $y = 5$ sehingga diperoleh titik (0, 5).

$x = 1$ maka $y = \frac{1}{4}(1)^4 - \frac{1}{2}(1)^2 + 5 = \frac{19}{4}$ sehingga diperoleh titik $(1, \frac{19}{4})$.

$x = -1$ maka $y = \frac{1}{4}(-1)^4 - \frac{1}{2}(-1)^2 + 5 = \frac{19}{4}$ sehingga diperoleh titik $(-1, \frac{19}{4})$.



Dengan memperhatikan letak ketiga titik tersebut maka dapat diilustrasikan seperti gambar di samping sehingga dapat ditentukan jenis titik tersebut.

Jadi, (0, 5) titik stasioner maksimum, serta $(1, \frac{19}{4})$ dan $(-1, \frac{19}{4})$ titik stasioner minimum.

Contoh 5.19

Sebuah home industri rotan dalam catatannya mendapatkan keuntungan (dalam ribuan rupiah per minggu): $K(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 96x + 600$ dengan x = banyaknya pekerja ($x > 0$). Tentukan keuntungan maksimum per minggu.

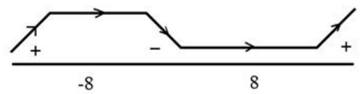
Jawab:

$K(x) \quad$ = keuntungan

$K'(x) \quad = -\frac{3}{2}x^2 + 96$

Keuntungan maksimum: $K'(x) = 0$

$$-\frac{3}{2}x^2 + 96 = 0$$
$$x^2 - 64 = 0$$
$$(x - 8)(x + 8) = 0$$
$$x = 8 \; ; x = -8$$



Jadi pada saat pekerja minimal ($x = 8$) maka perusahaan akan memperoleh keuntungan maksimal.

$$K(8) = -\frac{1}{2}(8)^2 + 96(8) + 600$$
$$K = 112$$

Jadi keuntungan maksimum per minggu Rp1.112.000,00

I. Titik Belok suatu Fungsi

Telah diterangkan di depan untuk mencari titik stasioner, syaratnya adalah $f'(x) = 0$. Sedangkan untuk menentukan jenis dari titik stasioner menggunakan turunan kedua.

1. Apabila $f''(x) > 0$ nilai tersebut merupakan titik balik minimum.
2. Apabila $f''(x) = 0$ titik tersebut merupakan titik belok jika $f'''(x) \neq 0$.
3. Apabila $f''(x) < 0$ titik tersebut merupakan titik balik maksimum.

Contoh 5.20

Tentukan nilai stasioner dari f yang didefinisikan dengan $f(x) = (2 - x)x^3$ dan tentukan jenis dari setiap nilai tersebut.

Jawab:

$f(x) = (2 - x)x^3 = 2x^3 - x^4$

$f'(x) = 6x^2 - 4x^3 = 2x^2(3 - 2x)$

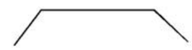
Nilai stasioner f didapat jika $f'(x) = 0$.

$\Leftrightarrow 2x^2(3 - 2x) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = \frac{3}{2}$

Jadi, f mempunyai nilai stasioner $f(0) = 0$ untuk $x = 0$ dan $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16}$ untuk $x = \frac{3}{2}$.

Jenis nilai stasioner (cara 1)

	$x = 0$	$x = \frac{3}{2}$
x	0^- 0 0^+	$\left(\frac{3}{2}\right)^-$ $\frac{3}{2}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^+$
$f(x)$	$-$ 0 $+$	$+$ 0 $-$
Bentuk grafik	 Titik belok (0,0)	 Nilai balik maksimum = $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{16}\right)$

Cara 2

$f(x) = 2x^3 - x^4$

$f'(x) = 6x^2 - 4x^3$

$f''(x) \quad = 12x - 12x^2$

a. Untuk titik (0, 0) maka $f''(0) = 0$ sehingga (0, 0) adalah titik belok.

b. Untuk titik $\left(\frac{3}{2}, \frac{26}{16}\right)$ maka $f''(\frac{3}{2}) < 0$ sehingga $\left(\frac{3}{2}, \frac{27}{16}\right)$ adalah titik balik maksimum.

Latihan 5.8

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat

Tentukan titik stasioner beserta jenisnya dari fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = x^2 + 2$
2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
3. $f(x) = 2 - x^2$
4. $f(x) = (x + 2)(x - 2)$
5. $f(x) = (3 - x)(4 - x)$
6. $f(x) = (2 - x)^2$
7. $f(x) = x^3 + 3x$
8. $f(x) = x(x - 2)^2$
9. $f(x) = \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$
10. $f(x) = x^3(x - 4)$
11. $f(x) = x^3 - 6x + 1$
12. $f(x) = 2x^4 - 2x^2$

J. Grafik Fungsi

1. Menggambar Kurva $y = f(x)$

Perhatikan hal-hal berikut dalam menggambar kurva $y = f(x)$.

a. Titik potong grafik fungsi dengan sumbu koordinat (jika titik itu mudah ditetapkan).

b. Titik stasioner dan jenisnya, yaitu: titik balik maksimum, titik balik minimum, atau titik belok horizontal.

c. Nilai y untuk nilai x besar positif dan untuk nilai x besar negatif (titik bantu).

Contoh 5.21

Gambarlah grafik kurva $y = -x^4 + 2x^2$.

Jawab:

a. Titik potong grafik fungsi dengan sumbu koordinat.

1) Grafik memotong sumbu X maka $y = 0$.

$0 = -x^4 + 2x^2$

$\Leftrightarrow 0 = -x^2(x^2 - 2)$

$\Leftrightarrow 0 = -x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = \sqrt{2}$ atau $x = -\sqrt{2}$

Jadi, titik potong grafik terhadap sumbu X adalah $(0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0)$, dan $(-\sqrt{2}, 0)$.

2) Grafik memotong sumbu Y maka $x = 0$.

Jadi, titik potong grafik terhadap sumbu Y adalah $(0, 0)$.

b. Titik stasioner dan jenisnya.

$y = -x^4 + 2x^2$

$\frac{dy}{dx} = -4x^3 + 4x$

Titik stasioner pada kurva jika $\frac{dy}{dx} = 0$, sehingga:

$-4x^3 + 4x = 0$

$\Leftrightarrow -4x(x^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow -4x(x - 1)(x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ atau $x = 1$ atau $x = -1$

Apabila $x = 0$ maka $y = 0$ dan titik stasionernya $(0, 0)$.

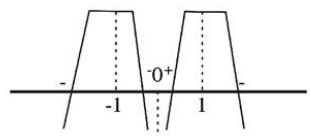
Apabila $x = 1$ maka $y = 1$ dan titik stasionernya $(1, 1)$.

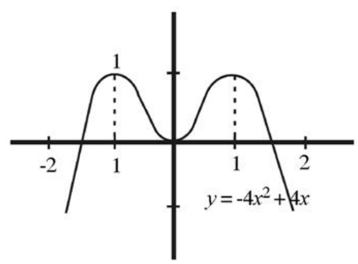
Apabila $x = -1$ maka $y = 1$ dan titik stasionernya $(-1, 1)$.

Berikut ini tabel jenis stasioner grafik y = $-x^4 + 2x^2$

	$x = 0$	$x = 1$	$x = -1$
x	0^- 0 0^+	1^- 1 $1+$	$(-1)^-$ (-1) $(-1)^1$
$f(x)$	$-$ $+$	$+$ 0 $-$	$+$ 0 $-$
Bentuk grafik	Titik balik minimum	Titik balik maksimum	Titik balik maksimum

Jenis nilai stasioner dapat ditentukan dengan cara sebagai berikut.
Pertama, gambarlah pada garis bilangan nilai x pembuat stasioner tersebut.
Misalkan $x = 2$ maka nilai $f'(x) = -4(2)^3 + 4(2) = -24$ sehingga diperoleh bentuk grafik seperti gambar di samping.
Titik balik maksimumnya $(-1, 1)$ dan $(1, 1)$, sedangkan titik balik minimumnya $(0, 0)$.
Grafiknya ditunjukkan pada gambar berikut.





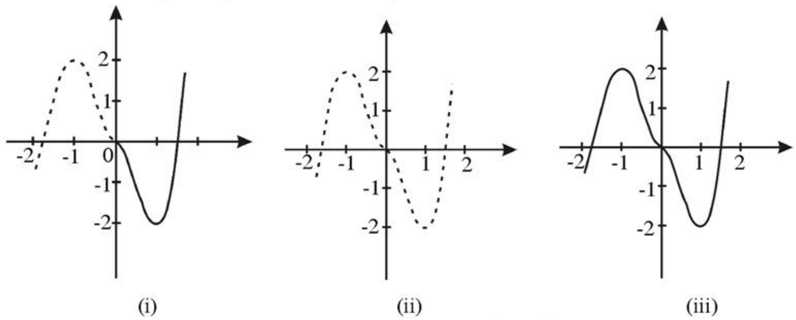
Latihan 5.9

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.
Gambarlah kurva berikut.

1. $y = 9 - x^2$
2. $y = x^2 - 6x$
3. $y = x^2 - x - 2$
4. $y = (3 - x)^2$
5. $y = x^4$
6. $y = x(1 - x)^2$
7. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$
8. $y = x^3 - 8$
9. $y = x^3 - 6x$
10. $y = x^3 - 3x^2$

2. Menentukan Nilai Maksimum dan Nilai Minimum Suatu Fungsi dalam Interval tertutup

Perhatikan grafik $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ pada Gambar 5.8 berikut.



Gambar 5.8 *Grafik* $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

Pada Gambar 5.8 (i) dalam interval tertutup:
$\{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ nilai minimum f adalah $f(1) = -2$.
Pada Gambar 5.8 (ii) dalam interval tertutup:

$\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$ nilai minimum f adalah $f(\frac{1}{2}) = -\frac{17}{32}$ dan nilai maksimum f adalah $f(0) = 0$.
Pada Gambar 5.8 (iii) dalam interval tertutup:
$\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ nilai minimum f adalah $f(1) = -2$ dan nilai maksimum f adalah $f(-1) = 2$.
Jadi, nilai maksimum dan minimum fungsi f dalam interval tertutup mungkin didapat dari nilai stasioner f dalam interval itu atau dari nilai f pada ujung-ujung interval.

Latihan 5.10

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi berikut dalam interval tertutup yang diberikan.

1. $f : x \to x^2$ dalam $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
2. $f : x \to x^2 + 6$ dalam $\{x \mid -4 \leq x \leq 4\}$
3. $f : x \to x^2 - 2x$ dalam $\{x \mid -1 \leq x \leq$£ $2\}$
4. $f : x \to x^2 - 4x + 5$ dalam $\{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$
5. $f : x \to x^3$ dalam $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
6. $f : x \to x(6 - x)$ dalam $\{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$
7. $f : x \to 6x^2 - 3$ dalam $\{x \mid -3 \leq x \leq 1\}$

8. $f : x \to x^4 - 2x^2$ dalam $\{x \mid -1 \le x \le 1\}$
9. $f : x \to 6 - 3x + x^4$ dalam $\{x \mid -2 \le x \le 4\}$
10. $f : x \to 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$ dalam $\{x \mid -1 \le x \le 4\}$

K. Model Matematika yang Berkaitan dengan Turunan

Persoalan-persoalan yang ada di sekitar kita akan mudah diselesaikan bila diterjemahkan ke dalam model matematika, termasuk persoalan yang terkait dengan diferensial.

Contoh 5.22

Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $\left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$ ratus ribu rupiah.

Berapa harikah pekerjaan tersebut dapat selesai agar biayanya minimum?

Jawab:

Langkah-langkah penyelesaiannya sebagai berikut.

a. Menjelaskan karakteristik masalah yang model matematikanya menentukan ekstrim fungsi.
   Menentukan biaya selama x hari
b. Menentukan besaran masalah yang dirancang sebagai variabel dalam ekspresi matematika.
   Biaya proyek per hari $\left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$
   Waktu yang dibutuhkan x
c. Merumuskan fungsi suatu variabel yang merupakan model matematika dari masalah.
   Biaya yang dibutuhkan $= \left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$
   $= 3x^2 - 900x + 120$
d. Menentukan penyelesaian dari model matematika
   Biaya $= 3x^2 - 900x + 120$
   $B(x) = 3x^2 - 900x + 120$

Biaya minimum : $B'(x) = 0$

$$\begin{aligned} 6x - 900 &= 0 \\ 6x &= 900 \\ x &= 150 \end{aligned}$$

Contoh 5.23

Pertumbuhan produksi tepung terigu suatu perusahaan setelah berjalan selama t bulan adalah $p(t) = (400t - 5t^2)$ ton. Tentukan produksi maksimum.

Jawab:

$p(t) = 400t - 5t^2$

$p'(t) = 400 - 10t$

Produksi maksimum jika $p'(t) = 0$ maka:

$$\begin{aligned} p'(t) &= 0 \\ 400 - 10t &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 10t &= 400 \\ \Leftrightarrow \quad t &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(40) &= 400(40) - 5(40)^2 \\ &= 16.000 - 8.000 \\ &= 8.000 \end{aligned}$$

Jadi, perusahaan tepung tersebut menghasilkan produksi maksimum 8.000 ton setelah berjalan 40 bulan.

Latihan 5.11

Kerjakan soal-soal di bawah ini dengan tepat.

1. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya total sebesar $(75 + 2x + 0{,}1x^2)$ rupiah. Jika semua produk perusahaan terjual dengan harga Rp40,00 untuk setiap produknya. Tentukan laba maksimum yang diperoleh.
2. Untuk memproduksi unit barang per hari diperlukan biaya $(x^3 - 2.000x^2 + 3.000.000x)$ rupiah. Berapa unit diproduksi setiap hari supaya biaya produksi per unit paling rendah.
3. Sebidang tanah terletak sepanjang tembok. Tanah itu akan dipagar untuk peternakan ayam. Pagar kawat yang tersedia panjangnya 800 m. Tentukan luas maksimum peternakan ayam tersebut.
4. Sebuah kotak tanpa tutup dan alasnya berbentuk persegi, jumlah luas kelima sisinya 432 dm^2. Tentukan ukuran kotak tersebut supaya volumenya maksimum.

5. Keuntungan K juta dolar untuk produksi x ribu mobil per tahun diberikan oleh persamaan $K(x) = -x^2 + 4x - 3$.
   a. Berapa banyak mobil harus diproduksi untuk mencapai keuntungan itu?
   b. Berapakah keuntungan maksimum dan berapa banyak harus diproduksi untuk memaksimalkan keuntungan?
6. Suatu pabrik gerabah memproduksi x buah per minggu setiap satu buah mengeluarkan biaya $\left(25 + \frac{200}{x}\right)$ rupiah. Hitung banyaknya gerabah yang harus dibuat per minggu agar keuntungannya maksimum. Hitung keuntungan maksimum.
7. Sebuah kotak dengan alasnya persegi akan dibuat agar dapat menampung 50 liter suatu cairan. Jika biaya pembuatan per satuan luas dari bidang alas dan atas kotak masing-masing adalah Rp50.000,00 sedangkan biaya pembuatan bidang sisi tegaknya adalah Rp20.000,00, berapakah ukuran kotak yang biaya pembuatannya paling murah? Hitunglah besar biaya pembuatan kotak itu.
8. Biaya untuk membuat x potong pakian per hari diberikan oleh $C(x) = (2x^2 - 160x + 3.400$ rupiah. Berapa banyak pakaian dibuat per hari dengan biaya produksi minimum? Berapa biaya minimum itu?
9. Biaya total produksi x pasang sepatu diberikan oleh $C(x) = \frac{1}{10}x^2 + 20x + 25$ rupiah dan harga jual masing-masing produksi x pasang sepatu adalah $\left(44 - \frac{1}{5}x\right)$ rupiah. Hitung berapa pasang sepatu harus diproduksi setiap hari supaya memperoleh laba maksimum.
10. Biaya bahan bakar untuk menjalankan sebuah lokomotif sebanding dengan kuadrat kecepatannya. Biaya bahan bakar untuk menjalankan lokomotif dengan kecepatan 30km/jam adalah Rp240.000,00 setiap jamnya. Jika biaya operasinya setiap jam Rp960.000,00, carilah kecepatan lokomotif yang biaya perjalanan per kilometernya paling ekonomis.
11. a. Dua buah bilangan bulat positif mempunyai hasil kali 100. Tentukan dua bilangan tersebut supaya mempunyai jumlah terkecil.
    b. Dua buah bilangan bulat positif mempunyai jumlah 40. Tentukan hasil kali terbesar dua bilangan tersebut.

12. a. Suatu persegi panjang mempunyai keliling 100 cm. Tentukan ukuran persegi panjang supaya mempunyai luas maksimum.
    b. Suatu persegi panjang mempunyai luas 900 cm^2. Tentukan ukuran persegi panjang tersebut supaya kelilingnya minimum.

Rangkuman

1. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
2. Jika $f(x) = x^n$ maka $f'(x) = nx^{n-1}$.
3. Jika $f(x) = ax^n$ maka $f'(x) = anx^{n-1}$.
4. Jika $y = u \pm v$ maka $y' = u' \pm v'$.
5. Jika $y = c\,u$ maka $y' = c\,u'$; c = konstanta.
6. Jika $y = u\,v$ maka $y' = u'v + uv'$.
7. Jika $y = \dfrac{u}{v}$ maka $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
8. Jika $y = u^n$ maka $y' = n\,u^{n-1}u'$; n = konstanta.
9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$ atau $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dv}\dfrac{dv}{dx}$
10. Jika $f'(x) < 0$ maka fungsi f turun.
11. Jika kecepatan pada waktu t dinyatakan dengan v maka:
    $v = \dfrac{ds}{dt}$ dan $a = \dfrac{dv}{dt}$.
12. Jika f suatu fungsi yang dapat didefinisikan pada suatu selang terbuka yang memuat c (c adalah nilai stasioner) maka:
    a. $f'(x) = 0$ dan $f''(c) < 0$ grafik f mempunyai titik balik maksimum.
    b. $f'(x) = 0$ dan $f''(c) > 0$ grafik f mempunyai titik balik minimum.
    c. $f'(x) = 0$ dan $f''(c) = 0$, serta $f''(c) \neq 0$ maka grafik f mempunyai titik belok horizontal.

Tugas Perorangan

1. Dengan menggunakan dalil rantai untuk turunan, carilah turunan dari fungsi berikut.
   a. $y = \dfrac{a}{px^2 + qx + r}$
   b. $y = \sqrt[3]{\left(x^2 - 4x + 1\right)^5}$
   c. $2y^5 = (x^3 - 4x^2 + x - 1)^6$
2. Carilah nilai untuk fungsi berikut.
   a. $2(f(x))^3 = (x^2 + 1)^4$. Tentukan $f'(0)$, $f'(-1)$, dan $f'(1)$.
   b. $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{22}{x}$. Jika $f'(x) = 0$, tentukan nilai x yang memenuhi.

Refleksi

Setelah memelajari bab ini, manfaat apakah yang paling kalian rasakan? Materi apa yang masih kalian anggap sulit? Carilah materi tersebut dari internet atau jurnal terkait kemudian diskusikan dengan teman kalian.

Uji Kompetensi

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Persamaan garis singgung pada kurva $y = \dfrac{2}{x^3}$ di titik yang mempunyai absis 1 adalah ....
   a. $y = -6x$
   b. $y = 6x + 8$
   c. $6x + y - 8 = 0$
   d. $2x - 3y + 4 = 0$
   e. $2x - 3y - 8 = 0$
2. Garis singgung pada kurva $y = x^3 - x^2$ di titik potongnya dengan sumbu X yang absisnya positif mempunyai gradien ....
   a. -4
   b. -2
   c. 0
   d. 1
   e. 4
3. Jika $f(x) = x^2 - 1$ maka $\lim\limits_{p \to 0} \dfrac{f(x+p) - f(x)}{p}$ adalah ....
   a. 0
   b. 1
   c. 2
   d. $2x$
   e. x^3

4. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 2$ melalui titik (2, 6) memotong sumbu X di titik ....

   a. $(\frac{1}{2}, 0)$ d. (2, 0)
   b. (1, 0) e. (3, 0)
   c. $(1\frac{1}{2}, 0)$

5. Grafik fungsi $f(x) = x^2 - 6x^2 + 9x + 2$ akan turun untuk interval ....
   a. $-1 < x < 2$ d. $1 < x < 4$
   b. $0 < x < 2$ e. $2 < x < 6$
   c. $1 < x < 3$

6. Diketahui $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$. Harga dari $f'(3)$ adalah ....
   a. 10 d. 19
   b. 15 e. 20
   c. 17

7. Dari pernyataan berikut yang benar untuk grafik fungsi $f(x) = x^4 - 32x$ adalah ....
   a. mempunyai titik tertinggi (0, 0)
   b. mempunyai titik terendah (2, –40)
   c. mempunyaititik belok di $x = 2$
   d. naik untuk $x < 2$
   e. turun untuk $x > 2$

8. Grafik fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ akan naik dalam interval ....
   a. $x < -2$ atau $x > -1$ d. $1 < x < 2$
   b. $-2 < x < -1$ e. $x < 1$ atau $x > 2$
   c. $-1 < x < 2$

9. Nilai $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \frac{a}{px+q}$ dengan a, p, dan q konstanta adalah ....

   a. $\frac{1}{px+q}$ d. $\frac{px+q-ap-aq}{(px+q)^2}$
   b. $\frac{a}{(px+q)^2}$ e. $\frac{apx-ap}{(px+q)^2}$
   c. $\frac{-ap}{(px+q)^2}$

10. Nilai stasioner fungsi $y = x^3 - 3x^2 - 24x - 7$ adalah ....
   a. -2 dan 4
   b. -35
   c. 1
   d. 21 dan -87
   e. 1, 21, dan -77

11. Nilai minimum dan maksimum fungsi $f(x) = 8 + 3x^2 - 3x^3$ pada interval $1 \le x \le 4$ berturut-turut adalah ....
   a. -136 dan 8
   b. -8 dan 20
   c. 10 dan 12
   d. -8 dan 10
   e. -8 dan 12

12. Jika $y = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$ maka $\frac{dy}{dx}$ adalah ....
   a. $5x^3$
   b. $3x^2 + 2x$
   c. $5x^4 + 3x^3 - 2x^2$
   d. $5x^4 + 3x^2 - 2x$
   e. $5x^4 - 3x^2 + 2x$

13. Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $\left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$ ribu rupiah. Agar biaya proyek minimum maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu ....
   a. 40 hari
   b. 60 hari
   c. 90 hari
   d. 120 hari
   e. 150 hari

14. Jika $p + q = 16$ maka harga maksimum dari pq^2 adalah ....
   a. 96
   b. 192
   c. 398
   d. 512
   e. 576

15. Jika nilai maksimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4, maka p adalah ....
   a. 3
   b. 4
   c. 5
   d. 7
   e. 8

16. Jumlah dua bilangan adalah 8. Pada saat hasil kali kedua bilangan tersebut mencapai maksimum, selisih bilangan terbesar dan terkecil adalah ....
   a. 0
   b. 4
   c. 8
   d. 10
   e. 12

17. Persamaan garis singgung di titik dengan $x = 2$ pada kurva $y = \frac{27}{\sqrt{5x-1}}$ adalah ....
   a. $5x + 2y - 28 = 0$
   b. $x + 2y - 20 = 0$
   c. $5x - 2y - 8 = 0$
   d. $x - 2y + 16 = 0$
   e. $2x - y + 5 = 0$

18. $f'(x)$ merupakan turunan $f(x) = \sqrt{6x+7}$. Nilai $f'(3)$ adalah ....
   a. $\frac{2}{3}$
   b. $\frac{3}{5}$
   c. $\frac{5}{7}$
   d. $\frac{7}{9}$
   e. $\frac{9}{11}$

19. Fungsi $f(x) = px^2 - (p + 1)x - 6$ mencapai nilai tertinggi untuk $x = -1$. Nilai p adalah ....
   a. -3
   b. -1
   c. $-\frac{1}{3}$
   d. $\frac{1}{3}$
   e. 1

20. Jarak yang ditempuh sebuah mobil dalam waktu t diberikan oleh fungsi $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$. Kecepatan tertinggi mobil itu dicapai pada waktu t adalah ....
   a. 5
   b. 4
   c. 3
   d. 2
   e. 1

Latihan Semester 2

Pilihlah jawaban yang paling benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf *a, b, c, d*, atau *e*.

1. Pada bilangan real didefinisikan fungsi $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = x^2 - 2x + 3$. Nilai $(g \circ f)(x)$ adalah . . . .
   a. $9x^2 - 18x + 11$
   b. $9x^2 - 15x - 9$
   c. $-9x^2 + 15x + 9$
   d. $9x^2 - 17x + 9$
   e. $-9x^2 - 17x + 9$

2. Diketahui fungsi f dan g dengan rumus $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 3x + 5$. Jika diketahui $(f \circ g)(a) = 19$, maka nilai a adalah . . . .
   a. 2 atau -1
   b. -2 atau 2
   c. -4 atau 1
   d. 1 atau 4
   e. -1 atau 4

3. Fungsi f dan g masing-masing adalah fungsi pada R yang didefinisikan oleh $f(x) = x^2 - 2x + 1$ dan $g(x) = x + 4$. Persamaan dari fungsi $(g \circ f)(x)$ adalah . . . .
   a. $x^2 + 2x + 5$
   b. $x^2 + 2x - 5$
   c. $x^2 - 2x + 5$
   d. $x^2 - 2x - 5$
   e. $x^2 - 2x - 3$

4. Diberikan tiga buah fungsi f, g, dan h dengan rumus persamaan masing-masing yaitu $f(x) = x - 3$, $g(x) = 4x$, dan $h(x) = x^2 - 1$. Rumus persamaan fungsi $(h \circ g \circ f)(x)$ adalah . . . .
   a. $16x^2 - 96x + 143$
   b. $16x^2 - 24x - 8$
   c. $16x^2 - 24x + 6$
   d. $4x^2 - 24x + 32$
   e. $4x^2 - 16$

5. Tiga buah fungsi f, g, dan h dengan rumus persamaan fungsi masing-masing $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x$, dan $h(x) = x^2$. Nilai dari $(f \circ g \circ h)(5) =$ . . . .
   a. 54
   b. 52
   c. 50
   d. 27
   e. 12

6. Nilai $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ adalah . . . .

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. 4

7. Nilai dari $\lim_{x \to a} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 5x + 6}$ adalah . . . .

a. -5
b. -4
c. $\frac{1}{5}$
d. $\frac{1}{4}$
e. 0

8. Nilai $\lim_{x \to 0} \frac{6x^2 + 4x}{2x^2 + x}$ adalah . . . .

a. -4
b. -2
c. 0
d. 2
e. 41

9. Sebuah fungsi dengan rumus $f(x) = x^2 + 5x - 10$, maka pernyataan berikut benar . . . .

a. $f(x)$ naik pada interval $x > \frac{5}{2}$
b. $f(x)$ naik pada interval $x > -\frac{5}{2}$
c. titik stasioner $f(x)$ di $x = -\frac{5}{2}$
d. $f(x)$ turun pada interval $x > -\frac{5}{2}$
e. $f(x)$ turun pada interval $x < \frac{5}{2}$

10. Diberikan sebuah fungsi dengan rumus $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x - \frac{4}{3}$, titik stasioner fungsi tersebut adalah . . . .

a. -3
b. -1
c. $-\frac{3}{2}$
d. 0
e. 1

11. Fungsi h yang dirumuskan dengan $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ turun pada interval . . . .

a. $1 < x < 3$
b. $1 < x < 4$
c. $1 < x < 6$
d. $-2 < x < 1$
e. $-1 < x < 2$

12. Grafik fungsi $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ akan naik dalam interval . . . .

a. $x > 6$
b. $x < 6$
c. $0 < x < 6$
d. $x < 0$ atau $x > 6$
e. $x < 2$ atau $x > 6$

13. Grafik dari fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 + 15$ turun untuk nilai . . . .

a. $x \geq 0$
b. $x < 0$
c. $0 < x < 2$
d. $-2 < x < 0$
e. $x < -2$ atau $x > 0$

11. Fungsi yang ditentukan oleh $p(x) = \frac{1}{3}x^3 - 1\frac{1}{2}x^2 + 2x - 7$ naik dalam interval . . . .

a. $x < 1$ dan $x > 2$
b. $1 < x < 2$
c. $-2 < x < 2$
d. $1 \leq x \leq 2$
e. $-2 < x < 1$

12. Diketahui $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$. Ordinat titik minimum kurva $y = f(x)$ adalah . . . .

a. 38
b. $3\frac{1}{3}$
c. 3
d. 2
e. -1

13. Grafik fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ turun untuk nilai . . . .
   a. $x < -2$ atau $x > 0$
   b. $0 < x < 2$
   c. $-2 < x < 0$
   d. $x < 0$
   e. $x \geq 0$
14. Fungsi $f: R \rightarrow R$ didefinisikan oleh $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$. Interval x untuk $f(x)$ turun adalah . . . .
   a. $-1 < x < 3$
   b. $-3 < x < 1$
   c. $-3 < x < -1$
   d. $1 < x < 3$
   e. $3 < x < 9$
15. Jika $f(x) = 3x^3 - 1$ dan $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{3}}$, maka $(f \circ g)(x) = \ldots.$
   a. $3x + 2$
   b. $3x - 1$
   c. x
   d. $x + 1$
   e. $x - 2$

Daftar Pustaka

Alisah, Evawati dan Eko Prasetyo. 2007. *Filsafat Dunia Matematika: Pengantar untuk Memahami Konsep-konsep Matematika*. Jakarta: Prestasi Pustakaraya.

Borowski, E.J and J.M Borwein. 1989. *Collins Dictionary of Mathematics*. Great Britain: Harper Collins.

Harahap, B. 2000. *Ensiklopedia Matematik*a. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Herrhyanto, N. 2003. *Teori Peluang Diskrit*. Bandung: Pustaka Setia.

Koesmartono dan Rawuh. 1983. *Matematika Pendahuluan*. Bandung : ITB.

Lipschutz, S. 1995. *Teori Himpunan (Set Theory). Terjemahan oleh Pantur Silaban*, Jakarta: Erlangga.

Spiegel, Murray R and Larry J. Stephens. 2007. *Statistik. Edisi ke-3*. Jakarta: Erlangga.

Sumarno, Ade, Baharudin dan Dedi Rohendri. 1980. *Penuntun Pelajaran Matematika*. Bandung: Epsilon Group.

Stewart, J. 2002. *Kalkulus. Edisi ke-4. Terjemahan oleh I Nyoman Susila dan Hendra Gunawan*. Jakarta: Erlangga.

Tim. 1979. *Matematika 7-12a untuk SMA*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan

Tim. 2003. *Pedoman Umum Pengembangan Penilaian*. Jakarta: Direktorat Pendidikan Dasar dan Menengah

Tim. 2003. *Silabus dan Penilaian*. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Wahyudin dan Sudrajat. 2003. *Ensiklopedi Matematika dan Peradaban Manusia*. Jakarta: Tarity Samudra Berlian.

Walpole, Ronald E. 1993. *Pengantar Statistika. Terjemahan oleh Bambang Sumantri*. Jakarta: Gramedia.

Wilardjo, L. 1995.*Pengantar Matematika untuk (maha)siswa Sosial Ekonomi.* Bandung: ITB.

Indeks

Glosarium

Aturan rantai. Aturan untuk mencari turunan fungsi majemuk atau fungsi yang merupakan fungsi dari fungsi lain.

Diagram garis. Diagram (gambar) yang disajikan dalam bentuk garis.

Diagram lambang. (piktogram) yang menyatakan suatu peristiwa dengan bantuan kenyataan yang disederhanakan atau diperkecil.

Diagram lingkaran. diagram yang menggunakan daerah lingkaran untuk menggambarkan suatu keadaan.

Diagram. Gambaran untuk memperlihatkan atau menerangkan sesuatu.

Frekuensi kumulatif. Frekuensi yang dijumlahkan.

Frekuensi. Kekerapan (sering muncul suatu data)

Fungsi aljabar. Fungsi aljabar terdiri dari fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi terpangkat tinggi dan fungsi pecahan. Fungsi yang menggunakan operaso aljabar masuk fungsi aljabar.

Fungsi invers. Invers dari suatu fungsi yang merupakan fungsi berespondansi satu-satu.

Fungsi trigonometri. Fungsi yang menggunakan suku-suku trigonometri.

Gradien. Koefisien arah suatu garis singgung.

Interval. Nilai selisih antara batas bawah dan batas atas yang menentukan suatu kelas.

Invers fungsi. Kebalikan dari suatu fungsi.

Median. Ukuran (nilai) tengah dalam suatu kelompok ukuran setelah data diurutkan.

Modus. Nilai yang paling sering muncul.

Nilai maksimum. Nilai tertinggi suatu fungsi.

Nilai stasioner. Nilai fungsi di titik stasioner

Nili minimum. Nilai terendah suatu fungsi.

Peluang. Kemungkinan.

Permutasi siklis. Permutasi secara melingkar

Permutasi. Susunan berlainan benda yang disusun menurut urutan tertentu.

Statistik. Kumpulan data, baik bilangan maupun nonbilangan yang disusun dalam tabel atau diagram yang menggambarkan atau melukiskan suatu masalah.

Statistika. Pengetahuan yang berhubungan dengan cara-cara pengumpulan data, pengolahan, penganalisisnya dan penarikan kesimpulan berdasarkan data da pengalisisan yang dilakukan.

Turunan. Diferensial. Laju perubahan sesaat suatu fungsi $f(x)$ dalam interval tertutup $a < x < a+h$ dan $h \neq 0$.

Kunci

Bab 1. Statistika
Pilihan ganda

2. d	12. e
4. e	14. d
6. b	16. e
8. b	18. c
10. b	20. c

Bab 2. Peluang
Pilihan ganda

2. c	12. b
4. c	14. c
6. b	16. d
8. b	18. d
10. b	20. a

Bab 3. Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers
Pilihan ganda

2. d	12. c
4. e	14. b
6. d	16. c
8. d	18. a
10. a	20. a

Bab 4. Limit Fungsi
Pilihan ganda

1. e	11. a
3. e	13. d
5. c	15. d
7. a	17. a
9. d	19. d

Bab 5. Diferensial
Pilihan ganda

1. b	11. a
3. d	13. e
5. c	15. d
7. c	17. a
9. c	19. c

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Matematika XI IPS

Untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah

ISBN 978-979-068-846-9 (no.jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-848-3

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp 12.249,-